UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A ATIVIDADE DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA COM TECNOLOGIAS E A FLUÊNCIA TECNO-MATEMÁTICA DE JOVENS DO SÉCULO XXI

Hélia Maria da Venda Jacinto

Orientadora: Prof. Doutora Susana Paula Graça Carreira

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação na especialidade de Didática da Matemática

2017

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A ATIVIDADE DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA COM TECNOLOGIAS E A FLUÊNCIA TECNO-MATEMÁTICA DE JOVENS DO SÉCULO XXI

Hélia Maria da Venda Jacinto

Orientadora: Prof. Doutora Susana Paula Graça Carreira

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação na especialidade de Didática da Matemática

Júri:

Presidente:

- Doutor João Pedro da Ponte, Professor Catedrático e Presidente do Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Vogais:

- Doutor António Manuel Águas Borralho, Professor Auxiliar, Escola de Ciências Sociais da Universidade de Évora;
- Doutor José Reis Lagarto, Professor Associado, Faculdade de Ciências Sociais e Humanas da Universidade Católica Portuguesa;
- Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos, Professora Associada com Agregação, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira, Professora Auxiliar, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Susana Paula Graça Carreira, Professora Associada Convidada, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia pela atribuição de uma bolsa com a referência SFRH/BD/73363/2010.

2017

Resumo

O presente estudo incide sobre a atividade de resolução de problemas com tecnologias desenvolvida por jovens de 12-13 anos enquanto participam numa competição *online* de resolução de problemas de matemática. Pretende caracterizar a resolução de problemas de matemática enquanto sistema de atividade; descrever os processos de resolução de problemas que envolvem o recurso a tecnologias; e compreender de que forma a capacidade de resolver problemas e expressar as suas soluções procede da relação estabelecida com as ferramentas tecnológicas.

O quadro conceptual tem como eixos organizadores: o conceito de ser-humano-com-media, que perspetiva a reconfiguração do pensamento matemático na presença de tecnologias; a ideia de que resolver-e-exprimir são uma mesma faceta desta atividade de resolução de problemas, desencadeada a partir da perceção de *affordances* nas ferramentas; a conceção de um modelo de resolução de problemas de matemática com tecnologias (RPMT) para descrever a sequência de processos que incorporam esta atividade; e a noção de fluência tecno-matemática (FTm) relativa ao uso de tecnologias digitais para resolver e exprimir problemas de matemática.

Assumindo um posicionamento interpetativo, recorro a métodos qualitativos originários de três vizinhanças metodológicas (abordagem fenomenológica, abordagem etnográfica, estudo de caso). No estudo participam três jovens, selecionados de acordo com os propósitos e condições da investigação, de modo a poder caracterizar os seus sistemas de atividade, os seus processos de resolução de problemas com tecnologias e a sua fluência tecno-matemática. Os dados provêm de resoluções digitais produzidas pelos jovens, entrevistas semiestruturadas e em profundidade com utilização da técnica de retrospetiva incitada, e observação da atividade durante a resolução de um problema experimental, com utilização da técnica pensar em voz alta. A análise é interpretativa, indutiva e descritiva, suportada pelo programa NVivo, confluindo na elaboração de casos que ilustram três facetas da atividade de resolução de problemas com tecnologias.

A atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias repercute os aspetos sociais e culturais das experiências dos jovens, escolares e extraescolares. As regras de participação na comunidade regem a atividade de resolução de problemas com tecnologias: os jovens não só resolvem os problemas e exprimem as soluções à luz da sua própria interpretação dessas regras, como da audiência que imaginam ter, e com recurso às tecnologias da sua preferência. Esta é uma atividade distribuída no tempo, nos meios que a suportam e no espaço.

A tecnologia permeia todos os processos de resolução de problemas: a noção *resolver-e-exprimir-com-tecnologias* caracteriza-se pelo facto de as soluções produzidas pelos participantes serem auto-explicativas e revelarem os modelos conceptuais desenvolvidos. Fica patente a existência de microciclos nos processos de resolução de problemas de matemática com tecnologias. O processo *Integrar*, chave na atividade de matematização e expressão de pensamento matemático com tecnologias, surge associado ao processo *Explorar*, o que indica que os jovens introduzem a tecnologia para apoiar o seu pensamento matemático e que essa tecnologia desencadeia nova atividade exploratória. A natureza do pensamento matemático desenvolvido com a tecnologia altera-se no sentido em que se abrem mais vias de exploração, manipulação, observação, conjetura, prova, demonstração.

A FTm dos jovens participantes envolve conhecimento da tecnologia e conhecimento matemático mobilizável com essa tecnologia, ambos igualmente indispensáveis, e também formas produtivas de os conjugar. A FTm emerge de forma implícita a cada processo do modelo RPMT: no caso de Jéssica, assenta na sua capacidade de desenvolver pensamento geométrico durante a atividade de resolução-e-expressão-com-GeoGebra; no de Marco, assenta na sua capacidade de desenvolver pensamento visual durante a atividade de resolução-e-expressão-com-ferramentas-de-visualização; e, no de Beatriz, assenta na sua capacidade de desenvolver pensamento visual e covariacional durante a atividade de resolução-e-expressão-com-ferramentas-de-expressividade.

Palavras-chave: Fluência tecno-matemática; Humanos-com-media; Resolução de problemas de matemática; Tecnologias digitais; Sistema de atividade.

Abstract

This study addresses the technology-based problem solving activity developed by 12 to 13-year-old students, engaged in an online mathematical problem solving competition. In brief, it aims to characterize mathematical problem solving as an activity system, describe the processes involved in solving mathematical problems by means of technology, and understand how the ability of solving and expressing the solution of a problem emerges from the relationship established with technological tools.

The theoretical background revolves around the axes: the concept of humans-with-media, which describes the reorganization of mathematical thinking in the presence of technology; the idea that solving-and-expressing are a single unit in this problem solving activity, triggered by the perception of the affordances in the tools at hand; the design of a model of mathematical problem solving with technologies (MPST) to describe the sequence of processes in this activity; and the notion of techno-mathematical fluency (TmF) regarding the use of digital technologies to solve and express mathematical problems.

By assuming a naturalistic standpoint, this study uses qualitative methods from three methodological neighborhoods (phenomenological approach, ethnography, and case study). Three participants are selected in accordance with the research goals and assumptions, so that it enables to characterize their activity system, their processes while solving problems with technology, and their techno-mathematical fluency. The empirical data include the digital productions of the participants during the competition, semi-structured and in-depth interviews with a stimulated recall protocol, and also direct observation of the problem solving activity during an experimental problem, using the thinking aloud method. The analysis followed an interpretative, inductive, and descriptive perspective, supported by the NVivo analysis software, resulting in cases that illustrate three aspects of the problem solving with technology activity.

The mathematical problem solving activity with technology reflects the social and cultural aspects of the participant's experiences, in school and in beyond school contexts. The rules of participation in a community govern the problem solving activity with technologies: these youngsters not only solve problems and express solutions in the light of their own interpretation of those rules, but also according to the audience they believe

they have, and using the technologies of their own preference. This activity is distributed in time, in means, and in space.

Technology permeates all problem solving processes: the *solving-and-expressing-with-technology* notion is characterized by the fact that the solutions produced by the participants are self-explanatory and expose the developed conceptual models. The existence of micro-cycles in the processes of solving mathematical problems with technologies is quite clear. The *Integrate* process, the key in the activity of mathematization and expressing mathematical thinking with technologies, is associated with the *Explore* process, which indicates that the participants introduce technology to support their mathematical thinking and that this technology triggers new exploratory activity. The nature of mathematical thinking developed with technology changes, in the sense that alternative paths emerge for exploration, manipulation, observation, conjecture, and proof.

The TmF of the young participants involves technological knowledge and the mathematical knowledge conveyed by each technology, both equally crucial, as well as productive ways of combining them. The TmF implicitly emerges from each process of the MPST model: in the case of Jessica, it relies on her ability to develop geometric thinking during her activity of solving-and-expressing-with-GeoGebra; in the case of Marco, on his ability to develop visual thinking during the activity of solving-and-expressing-with-visualization-tools; and in the case of Beatriz, on her capacity to develop visual and covariacional thinking during the activity of solving-and-expressing-with-expression-tools.

Keywords: Techno-mathematical fluency; Humans-with-media; Mathematical problem solving; Digital technologies; Activity system.

Agradecimentos

A concluir este estudo gostaria de agradecer publicamente a todos os que me apoiaram e incentivaram, fazendo-me crer que este projeto era possível e eu, capaz.

À Professora Doutora Susana Carreira, pela disponibilidade incondicional e pelo carinho com que sempre abordou as minhas propostas. Pelas críticas oportunas, mas que mobilizam. Por me levar a questionar, mas também a aceitar a incerteza. Pelo equilíbrio sábio entre uma palavra de encorajamento e o semear de um desafio maior. Pela amizade, serei eternamente grata.

Um agradecimento especial a Jéssica, Marco, Beatriz, Teresa e respetivas famílias, por me receberem de braços abertos e me incluírem à sua mesa. Por abrirem as portas dos seus lares e partilharem comigo as suas experiências e preocupações em torno do ensino da Matemática, do (ab)uso de tecnologias pelos jovens, do futuro da Educação em Portugal.

À Professora Nélia Amado, estimada orientadora de estágio, com quem tudo começou e a quem devo este percurso de aprendizagem.

A todos os elementos da equipa do Projeto Problem@Web[1]. À Sandra e ao Nuno, pelos desafios que superámos juntos e pelas horas de desabafo. À Rosa Antónia, pelo carinho e pela inspiradora visão pragmática que inculca ao trabalho. Ao Jaime, pela amizade e por trazer o seu conhecimento do mundo às discussões. E ainda ao Juan, à Isa, à Sílvia e à Rita por todas as sugestões que surgiram nas discussões e pelo ambiente descontraído nas reuniões. Ao Professor Keith Jones, pelos comentários e sugestões, e também pelo realçar de vias e oportunidades de investigação. À coordenação do Projeto, por facultar o acesso aos dados de que necessitei e por tornar possível a minha participação em encontros e congressos científicos, a nível nacional e internacional.

Às instituições que promoveram condições para levar a cabo esta investigação. Ao Ministério da Educação pela concessão de Equiparação a Bolseiro sem Vencimento, que implicou a dispensa do trabalho letivo para me dedicar em exclusividade a este projeto de investigação. À Fundação para a Ciência e a Tecnologia, pela concessão de uma Bolsa

[1] Esta tese é um produto do projeto Problem@Web – “Resolução de Problemas de Matemática: Perspectivas sobre uma Competição Interactiva na Web”, PTDC/CPE-CED/101635/2008, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

de Doutoramento (SFRH/BD/73363/2010) e ao Instituto de Educação da Universidade de Lisboa por me ter facultado condições de trabalho na instituição de acolhimento.

Às duas gerações de colegas com quem dividi espaços, partilhei alegrias e desalentos. Uma palavra especial à Ana Isabel e à Cláudia, que me acolheram e me deram a conhecer parte da comunidade, pelos bons conselhos, pela motivação constante, pela profunda amizade que partilhamos. Estou ainda grata pela possibilidade de partilhar parte deste percurso com uma outra geração de doutorandas, com horizontes largos e confiança no futuro. À Joana, à Marisa e à Nádia, pela intensa partilha de experiências e conhecimentos, e por aprendermos a fazê-lo em momentos de indulgência própria. À Daniela, pela alegria de viver e o sonho de *cambiar el mundo*.

À minha família, uma palavra final de profunda gratidão. Ao Bruno, por me incentivar a percorrer este caminho e por acompanhar cada etapa com zelo, por acreditar em mim, sempre, e por me fazer acreditar em mim própria. Pela paciência com que me escuta, pela tolerância perante as minhas ausências. Pela compreensão, carinho e amor. Incondicionais. A meus pais, Maria e José, sempre presentes e que sempre esperam a minha presença. Por me apoiarem em todos os meus projetos, amparando quedas, limpando feridas e incentivando o retomar do percurso, tantas vezes a custo de sacrifícios pessoais, vivendo para e através de mim. O culminar desta etapa é um espelho da sua persistência e dedicação, é o exemplo de como uma pequena, pobre e deslocada família pode depositar na Escola Pública todas as suas esperanças num futuro melhor, e vivê-lo.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Índice de Anexos

Lista de siglas usadas

ACND – Áreas Curriculares Não Disciplinares
AGD – Ambiente de Geometria Dinâmica
APM – Associação de Professores de Matemática
CAMI – Communauté d'Apprentissages Multidisciplinaires Interactifs
CERME – Congress of European Research in Mathematics Education
EIEM – Encontro de Investigação em Educação Matemática
FTm – Fluência Tecno-matemática
GAVE – Gabinete de Avaliação Educacional
ICME – International Congress on Mathematical Education
ICTMT – International Conference on Technology in Mathematics Teaching
ME – Ministério da Educação (de Portugal)
MEC – Ministério da Educação e Ciência (de Portugal)
MERGA – Mathematics Education Research Group of Australasia
MPP – Models and Modeling Perspective
NCTM – National Council of Teachers of Mathematics
NRC – National Research Council
OCAM – Olimpíadas Concelhias do Algarve em Matemática
OCDE – Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Económico
PIAAC – Programme for the International Assessment of Adult Competencies
PISA – Programme for International Student Assessment
PME – The International Group for the Psychology of Mathematics Education
PMEB – Programa de Matemática do Ensino Básico
RPM – Resolução de Problemas de Matemática
RPMT – Resolução de Problemas de Matemática com Tecnologias
RPT – Resolução de Problemas Tecnológicos
SIEM – Seminário de Investigação em Educação Matemática
THCA/TA – Teoria Histórico-Cultural da Atividade / Teoria da Atividade
TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação
TME – The Mathematics Enthusiast
UE – União Europeia
VMT – Virtual Math Teams
YERME – Young European Reseachers in Mathematics Education
ZDM – The International Journal on Mathematics Education

1

INTRODUÇÃO

Entrámos numa nova era, que é, feliz ou infelizmente, a era atómica. E devemos abrir os olhos, fazer um esforço sério de adaptação, se não quisermos ficar para sempre agarrados a sombras, no mundo do passado

(Silva, 1947)

Preâmbulo

Entrámos numa nova era. As tecnologias digitais são hoje uma parte tão importante e fundamental das nossas vidas que seria difícil imaginarmo-nos sem elas. Num curto espaço de tempo, a Internet alterou radicalmente a forma como trabalhamos, como comunicamos, como nos envolvemos em novos relacionamentos profissionais ou pessoais, como nos exprimimos e felicitamos amigos ou colegas, como adquirimos bens e produtos, gerimos as nossas contas bancárias e controlamos o orçamento mensal, como planeamos as nossas férias, como procuramos assistência médica, como pesquisamos referências de uma pessoa ou instituição, como estudamos e aprendemos…

Hoje, indubitavelmente, vivemos de forma diferente do que vivíamos há uma década atrás. A facilidade de acesso, conjugada com alguns serviços governamentais, tais como a utilização de portais *online* para gestão da nossa cidadania, tem incrementado o nosso nível de literacia digital, na medida em que hoje compreendemos e aceitamos pacificamente esta intrusão do avanço tecnológico, que parece imprescindível à melhoria da qualidade de vida de cada cidadão e, em geral, ao progresso do país. Estas mudanças, não só em termos de bens e materiais mas, particularmente, em termos de conceções, estão a circunscrever com grande rapidez todos os interesses e necessidades da nossa vida do quotidiano pelo que estão a afetar a nossa própria forma de estar no mundo.

1.1 Olhar o passado recente

A entrada de Portugal na União Europeia (UE), em 1986, constituiu uma viragem marcante na nossa História. Abraçando o sonho europeu, o país aderiu ao projeto de criação de uma comunidade de paz e solidariedade entre as nações e seus cidadãos, e de progresso material e cultural. Os chefes de Estado e de Governo dos países membros cedo se aperceberam de que a transformação da UE no espaço económico mais dinâmico e competitivo do mundo estaria baseada no conhecimento e que a certificação e a qualificação profissional levariam ao crescimento social e económico desejado.

Inúmeras medidas governamentais, que se refletem em vários espectros da nossa sociedade, derivam de programas europeus, de que a Estratégia de Lisboa (Março de 2000) e o Tratado de Lisboa (Dezembro de 2007) são exemplo. O Plano Tecnológico destacou-se como o pilar para o desenvolvimento da generalidade das medidas adotadas, sendo o setor da Educação um dos que mais beneficiou com essa modernização. De facto, as Escolas estão agora apetrechadas com uma parafernália de equipamentos e de *software*; por norma as salas de aula têm ligação de banda larga à Internet ou *wi-fi*, foram criadas equipas de professores para assegurarem a implementação dos projetos, e os docentes foram convidados a certificar as suas competências na área das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC). Mas tal não significa que as infraestruturas e os equipamentos estejam a ser utilizados, nem tampouco que estejam a servir de rampa para a aprendizagem e o desenvolvimento das capacidades dos alunos portugueses.

A mais recente estratégia ‘Europa 2020’ desenrola-se em torno de três eixos: crescimento inteligente, sustentável e inclusivo. Apesar de admitir que a sociedade do conhecimento se encontra em construção, um dos cinco grandes objetivos da estratégia refere-se especificamente à Educação: “reduzir a taxa de abandono escolar precoce para 10 %, contra os 15 % actuais, e aumentar a percentagem da população com idade entre 30 e 34 anos que completou o ensino superior de 31 % para, pelo menos, 40 % em 2020” (Comissão Europeia, 2010, p. 13). Uma vez definidos os objetivos e as metas nacionais, o então Ministério da Educação convidou as Escolas a uma reflexão em torno desse Programa, insistindo num compromisso de cada instituição no sentido de (i) elevar as competências básicas dos alunos portugueses; (ii) assegurar o cumprimento da escolaridade obrigatória de 12 anos; e (iii) reforçar o papel das Escolas.

Contudo, antever um rumo para a Educação, e a evolução da dita “sociedade do conhecimento”, é um exercício que tem que ser feito na total ausência de ingenuidade e implica, necessariamente, um olhar consciente do passado.

O ano de 1986 é, de facto, um momento de grandes mudanças. É um marco na história de Portugal mas, também, na história da Educação Matemática nacional. Paralelamente à entrada na União Europeia, Portugal desenvolve uma série de esforços em busca de prosperidade económica e de estabilidade política. A Educação é uma prioridade, materializando-se essa preocupação na aprovação e na publicação da Lei de Bases do Sistema Educativo, que tem como principal consequência a revisão do Currículo e dos Programas do Ensino Básico: o anterior ensino obrigatório de 8 anos, dividido em ensino primário e em ensino preparatório, passa a ter a duração de 9 anos, numa nova distribuição que contempla três ciclos. É também em 1986 que nasce a Associação de Professores de Matemática num encontro que reúne, em Portalegre, duas centenas de professores de Matemática dos vários níveis de ensino e de diferentes regiões do país.

Dois anos mais tarde, Milfontes. O seminário intitulado “Renovação do Currículo de Matemática” reuniu 25 professores e investigadores em torno de uma preocupação comum: o ensino e a aprendizagem da Matemática em Portugal e, em particular, a renovação dos currículos do ensino básico e secundário. Desse seminário resultou o livro publicado pela APM, com o título Renovação do Currículo de Matemática, ainda afetuosamente apelidado de ‘pequeno livro amarelo, pretendendo-se que essas orientações servissem de “referência fundamental . . . nas discussões sobre o novo currículo” (Guimarães, 2008, p. 1).

Num breve diagnóstico, o documento produzido e reeditado vinte anos depois (APM, 1988/2009) refere a incapacidade dos alunos portugueses para resolver problemas da vida corrente, mesmo após terem obtido aprovação em provas e exames de natureza escolar. Referências contemporâneas de Milfontes (NCTM, 1987) apontavam que a aprendizagem da Matemática se devia basear no desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas e, também, da própria formulação de problemas. Esperava-se que, dessa forma, se potenciasse a curiosidade e a criatividade e que tais faculdades pudessem contribuir para uma melhor compreensão do mundo real, sendo que a tónica era colocada no “desenvolvimento da auto-confiança intelectual”, pelo que a atividade de resolução de problemas deveria proporcionar aos estudantes o "prazer de enfrentar um desafio" (APM, 2009, p. 30).

Cinco anos volvidos, Henrique Guimarães (1991) partilha no editorial da revista Educação e Matemática, da responsabilidade da APM, a expectativa de então face à mudança anunciada pela Reforma Curricular em Matemática:

> "Não podemos deixar de sentir satisfação ao constatar que ideias e perspectivas há muito defendidas, sobretudo ao nível das opções metodológicas, estão finalmente expressas, "preto no branco", na letra dos novos programas: a resolução de problemas, a observação, exploração e experimentação associadas aos aspectos intuitivos da Matemática, a utilização da calculadora e do computador, a utilização de materiais, o papel da Matemática na interpretação do mundo real." (p. 1).

Em 1997, a Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Económico (OCDE) anuncia a implementação de um estudo internacional designado por *Programme for International Student Assessment* (PISA) com o propósito de avaliar os sistemas educativos dos países que integram a organização para que os seus governantes os possam desenvolver e melhorar. O estudo PISA visa avaliar a capacidade dos jovens de 15 anos ao nível da aplicação de conhecimentos, nos domínios da língua, matemática e ciências, para enfrentar os desafios da vida real. Nesse sentido, o estudo baseia-se numa prova constituída por itens relacionados com a literacia de leitura, literacia matemática, literacia de ciências e ainda, com a resolução de problemas. Os itens são compostos por problemas de diferentes tipos: os que pretendem uma aplicação de conhecimentos curriculares permitem avaliar o nível de literacia matemática, enquanto os problemas que visam uma interligação de um conjunto de conhecimentos, porventura transdisciplinares, permitem inferir sobre os processos que os estudantes utilizam na própria resolução de problemas.

Em cada ciclo do PISA é definido um domínio principal, sendo os outros dois considerados domínios secundários. O segundo ciclo do estudo, desenvolvido em 2003, focou a literacia matemática e contemplou, num dos domínios secundários abordados, a resolução de problemas. Os resultados obtidos pelos participantes portugueses de 15 anos não foram animadores. O estudo identificou um elevado número de estudantes com níveis muito fracos de literacia matemática: "cerca de 30% dos nossos alunos têm um nível de literacia matemática igual ou inferior a 1, o nível mais baixo, quando entre os países da OCDE esse valor é de 21%" (GAVE, 2004, p. 14), ou seja, cerca de um terço destes jovens portugueses não vai além dos problemas em que são capazes de identificar informações e efetuar procedimentos de rotina, mediante instruções, pelo que só obtêm sucesso em situações simples e que decorrem diretamente do uso de técnicas e algoritmos em situações de aplicação direta dos mesmos.

Relativamente ao desempenho na resolução de problemas, o panorama era também preocupante: 25% dos alunos portugueses não atingem sequer o nível 1 desse item, ou seja, interpretam os problemas erradamente, falham na aplicação de processos, têm sérias dificuldades em analisar e em tomar decisões adequadas, pelo que estes estudantes "arriscam-se a não conseguirem fazer uma transição bem-sucedida entre a educação e o mundo do trabalho ou o prosseguimento dos estudos" (GAVE, 2004, p. 57).

Em 2005, é introduzido em Portugal um exame de Matemática no final da escolaridade obrigatória a que se segue a elaboração de um relatório (GAVE, 2006a) onde se analisam quatro aspetos da competência matemática dos alunos: conceitos e procedimentos, raciocínio, resolução de problemas e comunicação. Constata-se que o desempenho dos alunos na resolução de problemas é fraco, independentemente do domínio temático; na comunicação é igualmente fraco, principalmente na interpretação e utilização de diferentes representações; sendo satisfatório no raciocínio quando se trata de situações simples, mas muito fraco quando se refere ao raciocínio dedutivo. Como explicação para estes resultados, o relatório aponta que (i) durante o ensino básico os alunos não estão a ser expostos, de forma regular, a problemas que exijam análise, compreensão e interpretação; e que (ii) o raciocínio dedutivo é raro, ou está ausente das práticas de sala de aula, apesar de constar do programa do ensino básico.

Perante as evidências do nível de insucesso obtido, o Ministério da Educação (ME) promove uma reflexão nas escolas sobre estes resultados, solicitando que os professores se debrucem sobre o desempenho dos seus alunos, procurando encontrar explicações para esses resultados e propondo estratégias de intervenção exequíveis nas suas escolas. A análise dessas reflexões resulta num relatório nacional onde se sumaria as ocorrências que sugerem a introdução de melhoramentos nas práticas de sala de aula de matemática através de "uma maior incidência na resolução de problemas, em geral (41%), e, em particular, incorporando situações da vida real (20%), e no desenvolvimento do raciocínio, em particular, de raciocínio demonstrativo (27%)" (GAVE, 2006b, p. 17). Outro aspeto muito mencionado é a necessidade de recorrer à utilização de "tecnologias de informação (27%) e de materiais manipuláveis (28%)" (GAVE, 2006b, p. 17).

Esse diagnóstico projeta-se, de seguida, num plano nacional para promover o sucesso na disciplina de Matemática, denominado 'Plano de Acção para a Matemática' organizado em torno de 6 ações (equipas para o sucesso, reforço da formação contínua de professores, novas condições de formação inicial de professores, reajuste dos programas de matemática do ensino básico, criação de um banco de recursos educativos, e avaliação dos manuais escolares deste nível de ensino). Em particular com a primeira ação, o ME assume a responsabilidade de promover condições e práticas inovadoras para que as escolas possam aumentar o sucesso dos seus alunos na disciplina, numa lógica de definição, pelas próprias escolas, de objetivos e de iniciativas para a sua concretização. Inúmeros projetos vieram a focar-se no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, não só em sala de aula na disciplina de matemática, mas também em clubes ou salas de estudo e, na grande maioria das Escolas, aproveitando ainda outros espaços de trabalho com os alunos como as Áreas Curriculares Não Disciplinares (ACND) de Estudo Acompanhado ou de Área de Projeto.

Vinte anos após as primeiras grandes mudanças, uma nova resposta – o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007). Entre outros, o "novo programa" pretende valorizar aspetos e processos fundamentais da matemática "esquecidos ou subvalorizados", como a comunicação matemática, o raciocínio e a resolução de problemas (Ponte & Serrazina, 2009). Transpondo resultados da investigação relativamente estabelecidos na comunidade de educadores matemáticos, tanto nacional como internacionalmente, os autores instituem um espaço bem demarcado para a resolução de problemas, considerando que se trata de uma "atividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático" (ME, 2007, p. 6). No documento, a resolução de problemas surge: i) como parte integrante de uma das grandes finalidades do ensino da Matemática (promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados), ii) como um objetivo geral, mas também iii) como um importante meio para o desenvolvimento conceptual na medida em que "constitui uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos" (ME, 2007, p. 8). O documento curricular oferece, pois, recomendações para a implementação de tarefas desta natureza e a promoção do desenvolvimento desta capacidade fundamental e sua avaliação ao longo dos três ciclos do ensino básico, em estreita articulação com as demais capacidades transversais e temas matemáticos.

Apesar dos esforços envidados em grande escala – como os sucessivos reajustes curriculares e programáticos, o Plano da Matemática (I e II), o acompanhamento da implementação do Programa de Matemática ou a formação contínua de professores – os relatórios de implementação do Projeto Testes Intermédios, das Provas Finais de Ciclo e dos Exames Nacionais continuam a evidenciar a incapacidade dos alunos em resolver problemas. Tal como diagnostica o relatório de 2009 do Projeto Testes Intermédios, os itens com pior desempenho dos alunos de 3º ciclo são aqueles que "apresentam enunciados extensos" pelo facto de requererem "uma leitura, uma interpretação e uma tomada de decisão em face dos dados apresentados" e ainda por exigirem a "comunicação escrita de conceitos e/ou raciocínios" (GAVE, 2009, p. 5). Todavia, estas dificuldades são recorrentemente identificadas naqueles relatórios disponibilizados pelo GAVE entre 2009 e 2013 no que se refere às dificuldades dos alunos de 8.º e de 9.º ano. Em vários desses documentos surgem propostas de intervenção didática para fazer face aos desempenhos deficitários dos alunos nestas temáticas e que visam, explicitamente, orientar os esforços dos professores. Destaco as recomendações para que os professores insistam em tarefas de resolução de problemas que envolvam "a definição de uma estratégia não habitual" (GAVE, 2012, p. 14), que "exijam a mobilização de vários conceitos e propriedades" (GAVE, 2013, p. 22), ou que "permitam desenvolver o raciocínio matemático e a capacidade de abstração" (GAVE, 2013, pp. 22-23). Embora pontualmente, também surgem referências ao uso de tecnologias, tal como a recomendação de utilizar estratégias que envolvam "o recurso a programas de geometria dinâmica" (GAVE, 2010, pp. 11-12).

E eis que o estudo PISA 2012, cujo foco era precisamente a literacia matemática, reporta alguns dos progressos almejados em termos dos resultados dos alunos portugueses. Na verdade, o PISA 2009 já evidenciava um aumento significativo no desempenho dos alunos de 15 anos no domínio da resolução de problemas, facto agora consolidado pelo mais recente estudo. Portugal destaca-se agora como um dos países que mais progrediu, estando a aproximar-se da média da OCDE já que entre 2003 e 2012 os resultados obtidos revelam um aumento de 21 pontos. É ainda de assinalar que, nesse ciclo, não só se reduziu o número de alunos portugueses com o desempenho mais fraco, como se aumentou o número de alunos a atingir os níveis de proficiência mais elevados.

Já em 2013, uma brusca e dissimulada alteração curricular toma de sobressalto investigadores e professores, embora a revogação do Currículo Nacional do Ensino Básico – primeira medida do novo Ministério de Educação e Ciência – a Revisão da Estrutura Curricular, e a redefinição de Metas Curriculares levassem a adivinhar a intenção de substituição do PMEB de 2007. O conteúdo e a forma são duramente criticados pela Associação de Professores de Matemática, pela Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, por investigadores em Didática da Matemática, por Matemáticos, por professores do ensino básico e secundário e por encarregados de educação. Sem sucesso.

O PMEB de 2013 (MEC, 2013), redigido numa linguagem rígida, diretiva, patriarcal até, adverte o professor para vários 'perigos', dos quais destaco dois precisamente pela sua centralidade neste trabalho: a resolução de problemas e a utilização de ferramentas tecnológicas. Por um lado, a resolução de problemas é encarada como uma atividade de "seleção e aplicação de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados" incluindo "a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada" (p. 5), o que significa que os professores devem ensinar as regras, os procedimentos e ainda as estratégias adequadas, pelo que o papel do aluno se reduz à utilização desses conhecimentos. Além disso, a resolução de problemas "não deve confundir-se com atividades vagas de exploração e de descoberta que, podendo constituir estratégias de motivação, não se revelam adequadas à concretização efetiva de uma finalidade tão exigente" (p. 5), o que desvenda a perspetiva dos autores deste programa de que o grau de exigência está exclusivamente associado à automatização de regras e ao domínio de procedimentos. Totalmente infundado é o não reconhecimento da possibilidade do aluno conceber uma estratégia inovadora para obter a solução, ao arrepio de todo um corpo de conhecimento teórico produzido em torno daquilo que pode ser considerado 'um problema', não só na Didática da Matemática, mas num sem fim de outras áreas de investigação. Aliás, esta perspetiva mostra como os autores deste programa incorrem na 'distinção enganadora' entre exercício e problema, que Paulo Abrantes (1989, p. 8) criticava, na medida em que as orientações que constam do documento curricular sugerem que basta existir um contexto para que a tarefa seja considerada um problema. Esta visão está ainda espelhada nas Metas Curriculares, onde para cada temática se define a regra ou o procedimento que o aluno deve usar para resolver o alegado 'problema'. Quanto à segunda advertência, que se refere ao uso de tecnologias em sala de aula, os autores baseiam-se num diagnóstico sobre uma pretensa generalização do uso da calculadora "de forma pouco criteriosa" (MEC, 2013, p. 28) para justificar a sua visão de que tal pode comprometer a "aquisição de procedimentos e o treino do cálculo mental", constituindo mesmo um 'risco' para a "eficácia do próprio processo de aprendizagem" (p. 28). Assim, o uso de calculadora só é recomendado pontualmente em situações de "resolução de problemas que envolvam, por exemplo, um elevado número de cálculos, a utilização de valores aproximados, operações de radiciação . . . quando não haja intenção manifesta de, por alguma razão justificada, dispensar esse uso" (pp. 28-29).

Apesar de se ignorar as potencialidades do trabalho com a calculadora, sobretudo em atividades de exploração ou investigação, a utilização de programas de geometria dinâmica é, surpreendentemente, recomendada no domínio Geometria e Medida para o 2.º ciclo do ensino básico a propósito da "realização de diversas tarefas que envolvem a utilização de instrumentos de desenho e medida" para que os alunos "adquiram destreza na execução de construções rigorosas" (MEC, 2013, p. 14). Ora a redução de um ambiente dinâmico de geometria dinâmica à sua utilidade mais imediata, como "instrumento de desenho e medida", afasta possibilidades de trabalho bastante mais ricas como a exploração de conexões entre objetos de diferentes naturezas, por exemplo, entre objetos geométricos e algébricos.

Neste momento, sente-se como necessário um ponto de ordem nesta pequena resenha histórica, e que Carreira (2007) também procurou enfatizar após uma revisão do percurso da Matemática escolar em Portugal desde a fundação da Associação de Professores de Matemática à aurora da homologação do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007). E subscreve-se a ideia de que persiste o sentimento generalizado de que há ainda um longo um caminho a percorrer, pois há inúmeras recomendações que "permanecem actuais, vivas e veementes" (p. 5). No entanto, é preciso olhar com atenção para as mudanças decorrentes de esforços e iniciativas que se têm levado a cabo nas últimas décadas, pelo que da análise dessa evolução "fica a ideia de quão diferentes são as condições, os processos e os recursos da Matemática escolar" (p. 5). Apesar de nem sempre as mudanças perpetradas terem conduzido a um "cenário de contentamento", há que fazer jus a alguns progressos não sendo, de todo, intenção "delapidar o mais que pode ser conquistado e melhorado na Matemática" (p. 9). Porém, este descontentamento inspira renovadas discussões no panorama da Educação Matemática nacional e, em particular, reitera a importância e a premência de estudar e compreender o papel da resolução de problemas e das tecnologias digitais na aprendizagem da matemática e sua relação com o desenvolvimento da cidadania de pleno direito no século XXI. E é nesse sentido que evoco a provocação, tão atual, de Sebastião e Silva (1947) com que iniciei este capítulo: "*devemos . . . fazer um esforço sério de adaptação, se não quisermos ficar para sempre agarrados a sombras, no mundo do passado"*!

1.2 Resolução de problemas de matemática com tecnologias: porquê?

A rápida disseminação, o acesso facilitado e o uso constante de tecnologias digitais têm vindo a recolocar uma forte tónica no estudo da sua influência na própria natureza do conhecimento matemático (Artigue, 2007). A capacidade para compreender como é que a informação se transforma em conhecimento é uma faceta fundamental, indispensável à consciência plena de qualquer indivíduo no século XXI (Noss, 2001).

Ao mesmo tempo que a imersão numa sociedade altamente *e-permeada* (Martin & Grudziecki, 2006) potencia alterações ao nível das "capacidades matemáticas que são necessárias ao sucesso para além da escola" (Lesh, 2000, p. 177), também é necessário perceber que estas sofisticadas ferramentas digitais "introduzem novas situações de resolução de problemas nas quais a matemática é útil; introduzem novas normas e procedimentos para construção, argumentação e justificação; e expandem radicalmente o tipo de capacidades e compreensões matemáticas que contribuem para o sucesso nessas situações" (p. 178). Isto quer dizer que não é apenas o tipo de pensamento matemático necessário fora da sala de aula que se está a modificar, mas são igualmente as próprias "situações de resolução de problemas em que é necessário algum tipo de pensamento matemático" (English, Lesh & Fennewald, 2008, p. 5).

Apesar da resolução de problemas ter recebido muita atenção da parte dos investigadores na segunda metade do séc. XX, sob a marcante influência de Pólya, tem-se notado um declínio no interesse dos investigadores pela temática, materializado no decréscimo da quantidade de estudos realizados na última década (English, Lesh, & Fennewald, 2008; English & Sriraman, 2010; Lester & Kehle, 2003). Em Portugal, a resolução de problemas foi um terreno para produção de investigação particularmente fértil no início dos anos 80 mas, com o correr de uma década as atenções dos investigadores centraram-se nas atividades de exploração e investigação na sala de aula, passando a ser vistas como "um tipo especial de resolução de problemas" (Ponte, 2007, p. 419). Por outro lado, o corpo de conhecimento produzido sobre a atividade de resolução de problemas que ocorre fora da sala de aula é manifestamente insuficiente, pelo que impera a necessidade de se "perceber por que motivo os alunos têm dificuldades em aplicar conceitos e capacidades matemáticas (que, presumivelmente, aprenderam na escola) fora da sala de aula – ou em outras áreas disciplinares" (English, Lesh, & Fennewald, 2008, p. 5). Sublinha-se que esse imperativo se faz sentir, em grande medida, com as bruscas mudanças na natureza das situações problemáticas do dia-a-dia, e em consequência, da matemática necessária para as abordar, que são fruto da rápida metamorfose da sociedade tecnológica em que vivemos.

Na literatura encontram-se diversas palavras-chave que visam descrever e explicar o impacto das tecnologias digitais na sociedade atual: modificam, transformam, potenciam. Noss (2001) refere-se a uma metamorfose ao nível das representações como um aspeto nuclear nas 'sociedades pós-industriais' e, nessa reflexão, discute a forma sob a qual as representações digitais estão a catalisar modificações ao nível da própria natureza do conhecimento matemático. A capacidade de compreender essa transformação da informação em conhecimento, onde Noss (2001) inclui o ser capaz de analisar e criticar representações ou ainda desenvolver uma aptidão para modelar situações, é apontada pelo investigador como uma faceta fundamental e indispensável ao 'funcionamento' pleno de um indivíduo no século XXI.

Em 2010, a Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI) divulgou o seu 17.º estudo com o título *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain*. Ao longo dos vários capítulos, os autores refletem sobre os desenvolvimentos teóricos em termos do impacto das tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática, nas duas últimas décadas (Hoyles & Lagrange, 2010). Apesar de legítima, qualquer expetativa em encontrar discussões sobre o impacto da utilização de tecnologias do dia-a-dia ou em contextos exteriores à sala de aula na aprendizagem da matemática, sai gorada. Como se descreve nas primeiras páginas, a Conferência que deu origem ao estudo foi inaugurada por Seymour Papert – alguém com "visão, experiência e valor no campo da matemática, da educação matemática e da tecnologia" (Hoyles & Lagrange, 2010, p.

3). Munido de um portátil XO[1], Papert frisou que o fácil e pleno acesso às tecnologias, e em particular aos computadores, potencia o aparecimento de novas abordagens no campo da Educação Matemática. E deixou um repto: que os participantes reservassem pelo menos 10% do seu tempo e energia para refletir nos novos tipos de práticas matemáticas ou de conhecimento que poderão emergir do acesso pleno e do uso efetivo das tecnologias digitais. Os participantes, em homenagem a Papert que sofreu um terrível acidente no dia seguinte ao do seu discurso, talvez impelidos para responder ao desafio, procuraram dedicar em todas as sessões o que veio a ficar conhecido por "10% de Papert" (Hoyles & Lagrange, 2010, p. 4). De facto, uma leitura transversal da publicação deixa perceber que os trabalhos resultantes dizem respeito aos outros 90%, focando assuntos como a construção de ambientes de aprendizagem e de currículos; a aprendizagem da matemática e a avaliação através de e com as tecnologias digitais, entre outros. Estava inicialmente previsto um grupo de trabalho sobre o tema *Conectivity and virtual networks for learning*. Mas as poucas contribuições que surgiram acabaram por se integrar noutros grupos de discussão o que, segundo os editores, reflete os parcos esforços que se têm traduzido em investigações que assumam essas preocupações como centrais.

No início dos anos 80 já se fazia sentir um certo desconforto com a incapacidade da comunidade de investigação em explicar de que forma as ferramentas tecnológicas influenciam as aprendizagens matemáticas e em clarificar os "processos que são necessários quando os modelos matemáticos e as ferramentas tecnológicas são usados para resolver problemas em situações reais" (Lesh, 1981, p. 254). Para além de tais necessidades não terem ainda obtido a clarificação almejada, observa-se a emergência de várias outras que Santos-Trigo (2007) sistematiza assim:

> Que tipo de raciocínio matemático desenvolvem os alunos em resultado da utilização da tecnologia computacional nas suas abordagens de resolução de problemas? . . . Qual é o processo de transformação de um dispositivo, um programa, numa ferramenta de resolução de problemas matemáticos? Que quadros teóricos permitem explicar a construção ou desenvolvimento de novo conhecimento matemático baseado no uso de ferramentas computacionais? Como é que esses quadros se distinguem daqueles em que os alunos trabalham sobre os problemas usando papel e lápis? (p. 527).

De facto, as ferramentas consideradas em inúmeros estudos sobre resolução de

[1] O XO ficou conhecido como o "portátil de 100 dólares" quando a organização *One Laptop Per Child* anunciou que iria comercializar um portátil para crianças que custasse menos de 100 dólares. Nos Estados Unidos da América começaram a ser comercializados através da iniciativa *Get One Give One*, cuja filosofia era: por cada XO adquirido por uma família, outro seria doado a uma criança em idade escolar que vivesse num país em desenvolvimento.

problemas foram essencialmente o papel e o lápis (Cobb, 1985; Kieran, 2001; Pantziara, Gagatsis & Elia, 2009; Schoenfeld, 1985; Silver, Leung & Cai, 1995). Todavia, a ampla disseminação de ferramentas tecnológicas a que se assiste está a levantar reservas à adequação dos quadros teóricos anteriormente utilizados, sobretudo questionando se e em que medida continuam a permitir descrever a proficiência em resolução de problemas na presença de tecnologias mais poderosas (Barrera-Mora & Reyes-Rodríguez, 2013; Santos-Trigo, 2007, Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013).

Ciente de que a Escola é apenas um de muitos locais onde os jovens aprendem, uma parte da comunidade científica tem vindo a salientar a necessidade de aprofundar conhecimentos sobre o papel e a relevância das aprendizagens matemáticas que ocorrem em contextos extraescolares (Barbeau & Taylor, 2009), permeados pelas mais diversas ferramentas tecnológicas. Diversos trabalhos de investigação em Educação Matemática têm procurado compreender que conhecimentos ou que capacidades matemáticas são particularmente importantes ou absolutamente necessários para fazer face aos desafios da sociedade (Fernandes, 2004; Hoyles, Noss, Kent & Bakker, 2010; Hoyles, Wolf, Molyneux-Hodgson & Kent, 2002; Lesh, 2000; Santos, 2004; Scribner, 1984; Zevenbergen & Zevenbergen, 2009). A instituição 'escola' é, ao longo dos tempos, reflexo das características de cada época e da sociedade envolvente, pelo que essas particularidades são, com frequência, absorvidas pelo próprio currículo. Como está patente no livro Reorganização Curricular em Matemática (APM, 1988/2009), os programas de Matemática não têm sido exceção, pelo que se recomenda que as experiências de aprendizagem em Matemática estejam relacionadas com "motivações e interesses de natureza individual, social ou cultural resultantes das vivências que os alunos tiveram e têm ou que é possível proporcionar-lhes" (p. 31). Apesar de ter sido ali registada pela primeira vez, há mais de vinte anos, esta recomendação permanece extremamente pertinente, pelo que se justifica a necessidade de se compreender com maior detalhe as trocas de saberes, qual vaivém de conhecimentos e capacidades, que os jovens experimentam entre dois mundos aparentemente tão distintos: a "sala de aula" e "para além da sala de aula".

Tal como salientam vários autores, as tecnologias mais recentes potenciam processos de aprendizagem mais ricos e profundos do que aqueles que os jovens experienciam nas escolas (Gee, 2004; Jukes & Dosaj, 2006), embora os sistemas escolares continuem a ignorar, quase por completo, as competências e as capacidades que são desenvolvidas nesses ambientes (Oblinger & Oblinger, 2005). É então necessário alcançar uma compreensão densa da cultura destes jovens, procurando conhecer a sua linguagem, interesses e costumes, as suas experiências e as suas aspirações. Só assim será possível ajudá-los a "tornarem-se indivíduos não dominados mas pelo contrário independentes – no sentido de competentes, críticos, confiantes e criativos – nos aspectos essenciais em que a sua vida se relaciona com a Matemática" (APM, 2009, p. 29).

1.3 SUB14: uma competição de resolução de problemas de matemática

Atualmente, os estudantes portugueses têm à sua disposição uma oferta considerável de concursos e campeonatos relacionados com a Matemática, que se desenrolam em paralelo com as atividades letivas, e em complemento das aprendizagens escolares. A maior parte dessas iniciativas é promovida por instituições do Ensino Superior (PmatE, Canguru Matemático Sem Fronteiras, SUB12 e SUB14; Olimpíadas Concelhias de Matemática), mas igualmente dinamizados ou patrocinados por outras entidades a nível regional ou nacional, como a Associação de Professores de Matemática ou a Sociedade Portuguesa de Matemática (ProbleMatizando, SuperTmatik, Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, Olimpíadas Portuguesas da Matemática), ou ainda por professores ou equipas de professores nas suas escolas (AgenteX, Problema do Mês). Embora estes campeonatos se desenvolvam em colaboração com as escolas, apenas alguns são passíveis de serem desenvolvidos em sala de aula em estreita articulação com as orientações curriculares, sendo a maioria utilizados em *workshops*, laboratórios, salas de estudo, aulas de substituição, ou seja, na concretização ou dinamização dos planos anuais de atividades dos estabelecimentos de ensino.

As competições de resolução de problemas SUB12 e SUB14 desenvolvem-se, numa primeira etapa, através da Internet pelo que a comunicação entre a organização e os participantes se estabelece por via eletrónica. As competições têm, na sua essência, uma característica especialmente distintiva que as torna singulares no nosso país e mesmo no exterior: o facto de entrarem no seio das famílias dos jovens, agregando no decurso da sua realização os concorrentes, os professores, os amigos, os pais e outros familiares. Apesar de a Escola ter um papel importante na divulgação e no incentivo à participação, são os jovens e as suas famílias que se envolvem e se integram em todas as dinâmicas dos campeonatos. Este é um motivo relevante pelo qual se considera que investigar a atividade de resolução de problemas dos jovens participantes poderá oferecer um conhecimento mais preciso sobre a forma como lidam com a Matemática e, em particular, sobre o modo como resolvem problemas de Matemática com as tecnologias digitais disponíveis no seu dia-a-dia.

O presente estudo centra-se no Campeonato de Resolução de Problemas de Matemática SUB14, que ao longo de uma década foi promovido pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, com a sua primeira edição no ano letivo de 2005/2006. Trata-se de uma competição dirigida aos estudantes do Alentejo e do Algarve do 7.º e do 8.º ano de escolaridade. Integrado num projeto de espectro mais abrangente – Matemática 5 Estrelas[2] – o SUB14 tem outro campeonato associado, o SUB12, semelhante ao anterior mas dirigido a alunos do 2.º ciclo de escolaridade. No projeto incluem-se ainda as Olimpíadas Concelhias do Algarve em Matemática (OCAM), destinadas apenas a alunos do 3.º ciclo de escolaridade dos concelhos do Algarve.

O SUB14, tal como o SUB12, tem a particularidade de se poder desenvolver na íntegra fora da sala de aula e da própria Escola, pelo que, com relativa frequência, os participantes relatam e partilham aspetos singulares da sua vida, fruto da relação de proximidade que desenvolvem com a equipa que gere o campeonato. Embora os participantes se encontrem a frequentar o 3.º ciclo do Ensino Básico, a sua condição de estudantes e o seu desempenho escolar não são os aspetos mais relevantes para este estudo, mas antes a sua participação no campeonato e a atividade que aí desenvolvem, isto é, resolver problemas de matemática e utilizar ferramentas tecnológicas nesse processo. Todavia, procuro focar a investigação nesta atividade que decorre para além da sala de aula, sem negligenciar o contexto escolar destes jovens pois é também fonte dos seus conhecimentos matemáticos.

Os campeonatos surgiram como um complemento às atividades matemáticas desenvolvidas em sala de aula pelos professores e assumem como principal objetivo colmatar algumas das limitações apontadas pelos docentes, nomeadamente, a dificuldade em implementar um trabalho regular e sólido no âmbito da resolução de problemas. Os professores de Matemática justificavam essa dificuldade através da extensão dos programas, da heterogeneidade das turmas e da falta de condições físicas das escolas.

[2] Disponível em http://fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/.

Durante vários anos, as Áreas Curriculares não Disciplinares (ACND) – e em particular, o Estudo Acompanhado – constituíram uma oportunidade para muitos professores desenvolverem atividades de resolução de problemas, levando os campeonatos SUB12 e SUB14 para as suas salas de aula. A esta prática também se juntaram iniciativas como o Plano da Matemática (I e II), sobretudo quando os projetos das Escolas definiam como prioridade o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e explicitavam o recurso aos problemas dos campeonatos. Com o passar do tempo e o reconhecimento da pertinência e adequação dos problemas, inúmeras escolas algarvias passaram a integrar os Campeonatos de Resolução de Problemas SUB12 e SUB14, e as OCAM nos seus Planos Anuais de Atividades. Presentemente, o retrocesso sentido em termos de recomendações curriculares relativas à resolução de problemas e ao uso de tecnologia na sala de aula reforçam a necessidade de perceber de que forma este tipo de competições faz sentido e como se poderão ajustar às atuais experiências de sala de aula dos alunos.

1.3.1 Particularidades do SUB14: como se participa?

O SUB14 organiza-se em torno de duas fases: a primeira é a *fase de apuramento* e desenvolve-se integralmente a distância; a segunda fase, a *final*, tem um caráter presencial. A fase de apuramento decorre de Janeiro a Maio de cada ano e desenvolve-se através de um *website* mantido pela equipa organizadora, que os concorrentes consultam para obter informações relativas ao desenrolar do campeonato. Esta fase é constituída por dez jornadas quinzenais, correspondentes a dez problemas. Os participantes podem concorrer a título individual ou em pequenos grupos de dois ou três elementos. Os finalistas são apurados de entre todos os participantes com base num único critério: terem resolvido corretamente no mínimo oito dos problemas propostos. Os participantes apurados são convidados a participar na Final, que envolve a resolução de um conjunto de cinco problemas, apenas com recurso a papel e lápis. Esta fase tem um carácter presencial e individual, e decorre na Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade do Algarve. A Final conta ainda com diversas atividades para concorrentes e acompanhantes, e com um colóquio para pais e professores, em que se apresentam e debatem aspetos relacionados com o campeonato, a resolução de problemas e a Matemática em geral.

O *website* do SUB14 disponibiliza um conjunto de informações sobre o campeonato e o decorrer das jornadas: o regulamento, uma descrição dos prémios a que os participantes se candidatam, os avisos que a equipa do SUB14 julga serem necessários e indispensáveis ao normal funcionamento do campeonato, por exemplo, relembrando o início ou o fim de cada jornada (Figura 1.1). Os problemas de cada quinzena recebem um lugar de destaque na página e são acompanhados por um botão que permite submeter uma resposta. Findo o prazo de submissão de respostas, esse botão fica inacessível e, no seu lugar, são disponibilizadas as listas dos participantes com indicação do seu desempenho e um conjunto de resoluções do problema selecionadas de entre as corretas, algumas delas, 'resoluções admiráveis' – tal como a organização do SUB14 as denomina.

Figura 1.1. Aspeto da página de entrada no SUB14, edição 2012/2013

Um concorrente pode enviar a sua resposta através do seu *e-mail* pessoal ou utilizando o formulário facultado pelo *website* onde preenche os seus dados pessoais de identificação e os dos seus colegas de equipa, se for essa a sua situação. Esta janela de resposta disponibiliza um editor de texto simplificado, que possibilita ao concorrente digitar diretamente a sua resolução e permite, ainda, anexar um documento em qualquer formato, caso opte por utilizar outro programa para resolver o problema. O participante envia depois a sua resolução e o sistema comunica-lhe, de imediato, se a sua resposta foi ou não enviada com sucesso.

Os participantes, que podem concorrer em equipa ou a título individual, resolvem cada problema utilizando os métodos e as ferramentas da sua preferência. Todas as participações são avaliadas pela equipa do SUB14 e a cada concorrente é devolvida uma apreciação crítica da sua resolução num prazo médio de 1 a 2 dias. Às participações com resoluções corretas é dada a informação de que o problema está bem resolvido e encoraja-se a continuidade no campeonato. Às respostas incompletas ou incorretas é dado um *feedback* com indicação de que deve ser apresentado o processo de resolução completo, ou sugerindo aspetos a ter em conta numa nova tentativa. Os concorrentes podem corrigir as suas resoluções dentro do prazo estipulado para a aceitação de respostas, as vezes que forem necessárias até alcançarem uma resposta correta. Podem, ainda, pedir apoio a colegas, professores ou familiares, tanto na compreensão das propostas como na resolução dos problemas ou na explicação do raciocínio, o que não só é explicitamente indicado no regulamento, como é encorajado em momentos de dificuldade.

1.3.2 Particularidades do SUB14: que resolução de problemas?

Apesar de o SUB14 se apresentar como uma competição, não tem propósitos de seleção nem de identificação de alunos particularmente talentosos ou dotados para a matemática. É antes uma atividade de natureza inclusiva na medida em que procura manter os participantes envolvidos na resolução de problemas matemáticos durante um período de tempo relativamente extenso.

Reconhecidas as potencialidades pedagógicas deste Campeonato, pretende-se que a promoção desta resolução de problemas de matemática possa servir de complemento às tarefas curriculares. Deste modo, tratar a resolução de problemas como uma atividade em que se aplica um procedimento único e pré-definido, não faz parte dos objetivos deste campeonato. Uma vez que é permitida e valorizada a criatividade dos concorrentes, não se pretende entrincheirar os seus métodos num dos processos ou estratégias de resolução de problemas a que é possível recorrer. Porém, há certos aspetos que foram estimulados ao longo do campeonato. Entre eles, evidencia-se a obrigatoriedade de cada concorrente apresentar o processo de resolução seguido, ou seja, apresentar uma descrição do seu raciocínio numa linguagem o mais clara possível, a fim de que a resposta possa ser considerada. Essa obrigatoriedade é difundida através de mensagens disponibilizadas na página, tanto no separador dos avisos, como no enunciado de cada problema – que termina com a indicação “Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!” – e ainda de informações que constam do regulamento do campeonato.

Outro dos aspetos que caracteriza o SUB14 é a natureza do *feedback* que é devolvido a cada resposta submetida pelos concorrentes durante a fase de apuramento e que se constitui como o principal impulsor da faceta inclusiva da competição. Este *feedback* surge, inicialmente, com a intenção de complementar o trabalho que os professores desenvolvem na sala de aula, uma vez que lhes é bastante complicado gerir, corrigir e/ou valorizar as resoluções de cada um dos seus alunos, sobretudo em turmas extensas. Aliás, é prática bastante comum solicitar a um aluno que corrija um problema no quadro, frente a toda a turma. Mas esse aluno apresentará o seu método, enraizado nas suas preferências pessoais, demonstrando o seu próprio raciocínio. O professor poderá realçar a existência de vários caminhos aceitáveis para encontrar a solução, mas os alunos menos expeditos tendem a aceitar a estratégia do professor ou do colega que apresentou o seu raciocínio para a turma, podendo mesmo eliminar as suas próprias resoluções por falta de confiança. Carreira (2005) faz alusão a este facto quando afirma que os alunos forjam “uma imagem da Matemática como um conjunto de coisas desprovidas de sentido que têm que se fazer como o professor diz” (p. 123). É com esta preocupação em mente que a equipa do SUB14 devolve um *feedback* personalizado a cada resolução rececionada.

Enquanto dura a bateria

A Bárbara pediu à mãe a câmara de vídeo para filmar o ensaio geral da peça de teatro que está a preparar com os seus colegas no clube de teatro. Ela sabe que a bateria da câmara dura 2 horas se estiver em modo de gravação e 3 horas se estiver em modo de reprodução. A Bárbara quer gravar o ensaio e logo a seguir visionar o vídeo gravado com os colegas e não pode voltar a carregar a bateria. Qual é o tempo máximo, em minutos, que ela poderá gravar do ensaio para conseguir visionar tudo o que gravou, logo depois?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 1.2. Enunciado do problema 8 do SUB14, edição 2011/2012

Os problemas de Matemática que a Equipa do SUB14 propõe (ver exemplo na Figura 1.2) podem ser considerados ‘problemas de palavras’ (*word problems*, como surge na literatura inglesa), no sentido que Borasi (1986) lhes atribui: o seu contexto está totalmente expresso no enunciado; a formulação do problema é única e explícita; a solução pretendida é, quase sempre, única e exata; e a estratégia de abordagem envolve a combinação de diversos algoritmos ou técnicas conhecidas (p. 134). Todavia não são de modo algum aquilo que Abrantes (1989, p. 8) designa por "exercícios disfarçados" na medida em que, apesar de nem sempre o contexto ser relevante, as palavras não estão simplesmente a camuflar operações familiares, por mais difíceis que sejam. Assim, estes desafios também se enquadram na designação de *problemas não-rotineiros* uma vez que não se resolvem através da aplicação de regras ou processos comuns e ao imediato alcance dos concorrentes. Ao invés, requerem abordagens em que os jovens têm liberdade para construir, testar e modificar as suas próprias estratégias (English, 1996; Stanic & Kilpatrick, 1989).

Apesar de não haver intenção em caminhar a par do currículo, nos seus conteúdos específicos, existe uma clara preocupação em adequar os conhecimentos que os problemas do SUB14 exigem àqueles que os concorrentes já trabalharam na Escola, em particular, devido ao facto de um mesmo problema do campeonato se dirigir a concorrentes de dois anos de escolaridade. Um exemplo dessa preocupação é o evitar intencionalmente publicar problemas em que seja necessário recorrer ao Teorema de Pitágoras, que ainda não é conhecido pelos alunos no 7.º ano de escolaridade.

Estes problemas de palavras não rotineiros também envolvem alguma diversidade em termos dos temas matemáticos que encerram, existindo nomeadamente (i) os *problemas de raciocínio lógico* – que envolvem a organização de conjuntos de premissas, a formulação e o teste de suposições; (ii) os *problemas de carácter numérico/algébrico* – que podem conter situações de cálculo combinatório, ou que podem ser resolvidos através de equações ou sistemas de equações, incluir relações entre variáveis, a decomposição de números, ou o trabalho com sequências e contagens, e que são frequentemente resolvidos por processos algébricos ou por tentativa e erro; e (iii) os *problemas de carácter geométrico* – que envolvem noções como perímetros, áreas e volumes, ou a identificação de relações entre elementos geométricos. Todos os processos de resolução que conduzem à solução são aceites, o que pode incluir descrições textuais, cálculos, esquemas, tabelas, diagramas, imagens, ou suas combinações, nos mais variados formatos digitais.

1.4 Um estudo anterior e o projeto Problem@Web

O campeonato de resolução de problemas SUB14 constituiu o campo empírico de um estudo que realizei na área da Informática Educacional, no qual procurei descrever e compreender as perspetivas dos jovens participantes, relativamente à *atividade matemática* desenvolvida, focando-me igualmente no *papel das ferramentas tecnológicas* (Jacinto, 2008; Jacinto & Carreira, 2010a). Os dados recolhidos foram analisados considerando várias perspetivas teóricas sobre a resolução de problemas, a perspetiva da Matemática como atividade humana e o desenvolvimento de competências, conceitos estes que gravitavam em torno da tecnologia que sustenta o SUB14: a Internet. Em traços gerais, a análise dos dados permitiu observar que (i) os participantes encaravam o uso da Internet com bastante naturalidade (ii) demonstrando, simultaneamente, um elevado grau de sofisticação tecnológica na apresentação das suas resoluções aos problemas propostos, e que (iii) essa fluência era desenvolvida, sobretudo, fora da sala-de-aula.

Apesar de muitos aspetos não terem sido analisados aquando dessa investigação, por não constituírem prioridade face ao problema em estudo, os dados permitiram que, mais tarde e através de outras perspetivas, se verificasse que a utilização das tecnologias do dia-a-dia ia mais além da mera *apresentação* de raciocínios, estratégias ou resultados (Jacinto & Carreira, 2010b). Ponderando evidências que careciam de investigação mais aprofundada, observou-se que os jovens participantes demonstravam capacidades tecnológicas de ordens diferentes aquando da sua atividade de resolução de problemas matemáticos. Ficou patente a existência de um conjunto de participantes com uma elevada fluência digital, especialmente na utilização de ferramentas do dia-a-dia na resolução dos problemas, pois demonstraram fazer uso de editores de texto, de folhas de cálculo, de editores de apresentações, de ferramentas de edição e tratamento de imagem, de conversores de ficheiros para PDF, de *hardware* e *software* de digitalização, da câmara fotográfica digital, do telemóvel, de programas de geometria dinâmica, de repositórios *online* ou mesmo de linguagens de programação (Figuras 1.3 a 1.11).

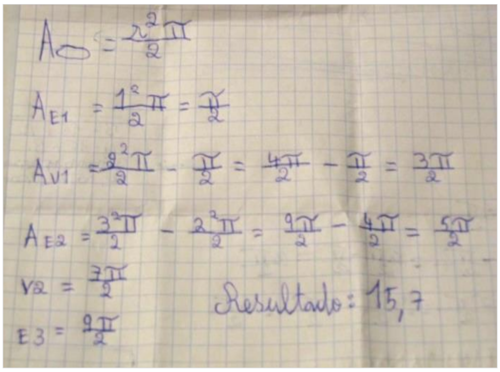


Figura 1.3. Resolução fotografada

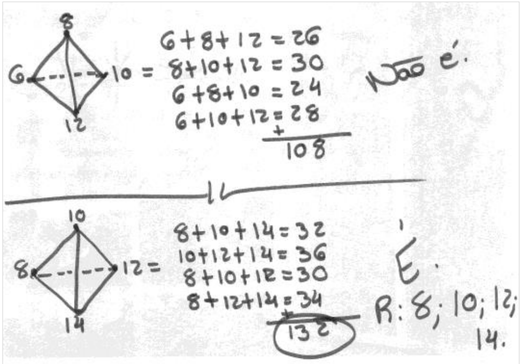


Figura 1.4. Resolução digitalizada

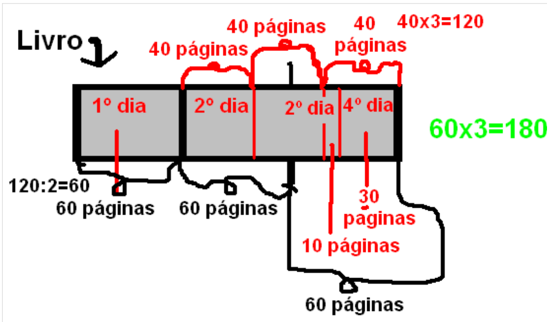


Figura 1.5. Resolução elaborada no Paint

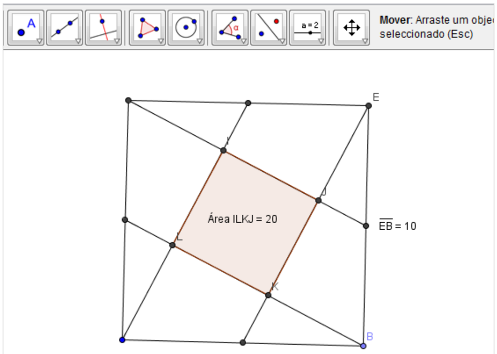


Figura 1.6. Resolução em GeoGebra

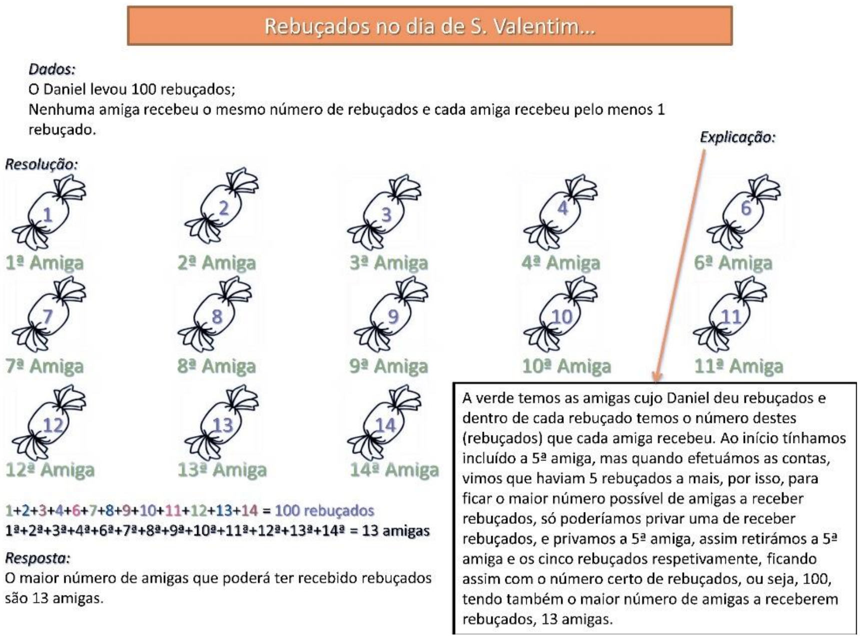
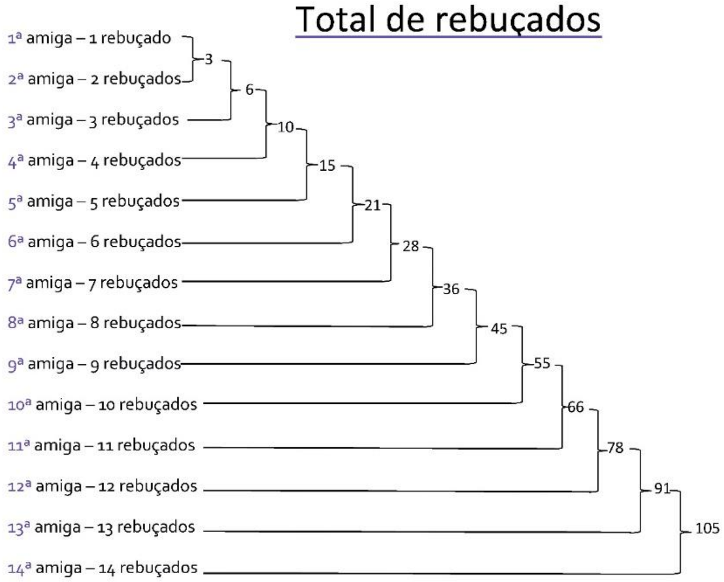


Figura 1.7. Resolução elaborada em PowerPoint

Problema nº4

Total de rebuçados



O Daniel só tem 100 rebuçados então não pode dar 105, por isso tem que ser tirado uma ou mais amigas para que o total de rebuçados seja 100. Existem duas maneiras de o fazer, tirando a 2ª (2 rebuçados) e 3ª (3 rebuçados) amigas ou tirando a 5ª amiga (5 rebuçados). Como a pergunta é o valor máximo eu estou interessada em tirar o menor número de amigas, por isso irei tirar a 5ª amiga, ficando assim com 100 rebuçados.

14 amigas – 1 amiga = 13 amigas

R: O número máximo de amigas é 13.

Figura 1.8. Resolução em Word

G9 =F9-C9

	A	B	C	D	E	F	G
1	idades			idades + 9			
2	Soraia	Irmão	produto das idades	Soraia	Irmão	produto das idades	diferença do produto das idades
3	1	4	4	10	13	130	126
4	2	5	10	11	14	154	144
5	3	6	18	12	15	180	162
6	4	7	28	13	16	208	180
7	5	8	40	14	17	238	198
8	6	9	54	15	18	270	216
9	7	10	70	16	19	304	234
10	8	11	88	17	20	340	252
11	9	12	108	18	21	378	270
12	10	13	130	19	22	418	288
13	11	14	154	20	23	460	306
14	12	15	180	21	24	504	324
15	13	16	208	22	25	550	342
16							
17							

Figura 1.9. Resolução em Excel

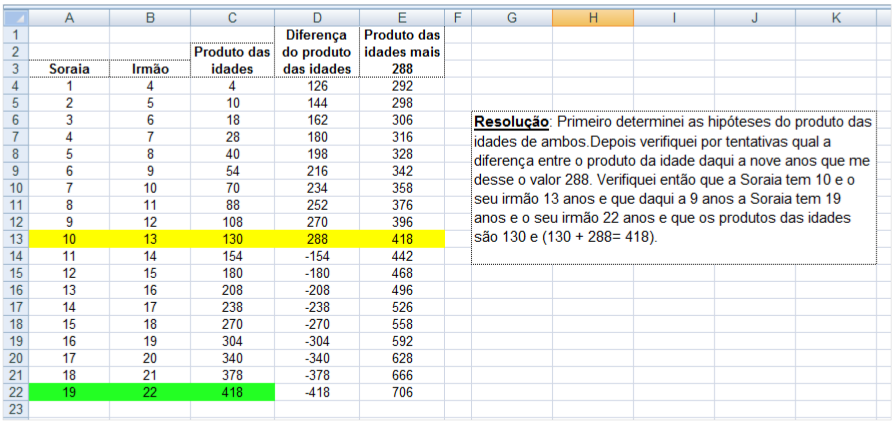
Resposta:
Para resolver este problema, criei um pequeno *script* numa linguagem de programação chamada AutoIt. Não pude fazer em Pascal porque o compilador dava sempre um erro.
http://drop.io/sub14_12
A resposta é 301.

Figura 1.10. Explicação que acompanha uma resolução

```
#NoTrayIcon

;Nota: o código faz basicamente isto: experimenta todos os múltiplos de
7 para ver qual tem resto 1 quando é dividido por 2,3,4,5 e 6.

$i = 0

While 1
      $i = $i + 1
      $valor = $i * 7
      If Mod ($valor, 2) = 1 and Mod ($valor, 3) = 1 and Mod ($valor,
4) = 1 and Mod ($valor, 5) = 1 and Mod ($valor, 6) = 1 then
            MsgBox (0, "SUB14", "O nº de bolos produzidos na pastelaria
Muito Doce foram: " & $valor)
            ExitLoop
      EndIf
Wend
```

Figura 1.11. Programa desenvolvido para resolver problema mencionado na Figura 1.9

De uma breve compilação dos ficheiros submetidos pelos concorrentes durante a fase de apuramento, nos anos subsequentes àquele estudo, sobressai o crescente recurso à folha de cálculo e a programas de geometria dinâmica por concorrentes de zonas geográficas e Escolas distintas (Figura 1.12, Figura 1.13). São muitos os participantes que optam por recorrer às potencialidades destas ferramentas para resolver problemas numéricos/algébricos ou geométricos, o que contrasta com a reduzida e incipiente utilização registada anteriormente. Nesse trabalho, para além da não existência de qualquer referência a programas de geometria dinâmica, poucos eram os registos referentes à utilização da folha de cálculo (cerca de 17% das soluções) sendo que, dessas, a esmagadora maioria baseava-se na utilização das linhas de grelha para organizar a forma de apresentar um raciocínio (Jacinto, 2008). Ao invés, resoluções mais recentes evidenciam utilizações mais sofisticadas destes dois tipos de programas, o que além de despertar interesse pelos fatores que as motivam, carece de mais investigação, sobretudo ao nível do papel que estas ferramentas desempenham ao longo da atividade de resolução de cada problema. Esta sofisticação tecnológica e a aparente naturalidade com que os jovens participantes lidavam com estas tecnologias e as usavam para pensar, resolver e comunicar, serviram de base a várias interrogações nomeadamente ao nível do papel da Escola e da disciplina de Matemática, na formação de jovens, matemática e tecnologicamente competentes, aptos para enfrentar os desafios da sociedade do *homo digitalis* (Terceiro, 1996).



Soraia	Irmão	Produto das idades	Diferença do produto das idades	Produto das idades mais 288
1	4	4	126	292
2	5	10	144	298
3	6	18	162	306
4	7	28	180	316
5	8	40	198	328
6	9	54	216	342
7	10	70	234	358
8	11	88	252	376
9	12	108	270	396
10	13	130	288	418
11	14	154	-154	442
12	15	180	-180	468
13	16	208	-208	496
14	17	238	-238	526
15	18	270	-270	558
16	19	304	-304	592
17	20	340	-340	628
18	21	378	-378	666
19	22	418	-418	706

Resolução: Primeiro determinei as hipóteses do produto das idades de ambos.Depois verifiquei por tentativas qual a diferença entre o produto da idade daqui a nove anos que me desse o valor 288. Verifiquei então que a Soraia tem 10 e o seu irmão 13 anos e que daqui a 9 anos a Soraia tem 19 anos e o seu irmão 22 anos e que os produtos das idades são 130 e (130 + 288= 418).

Figura 1.12. Resolução do problema 4 da edição 2010/2011, em Excel

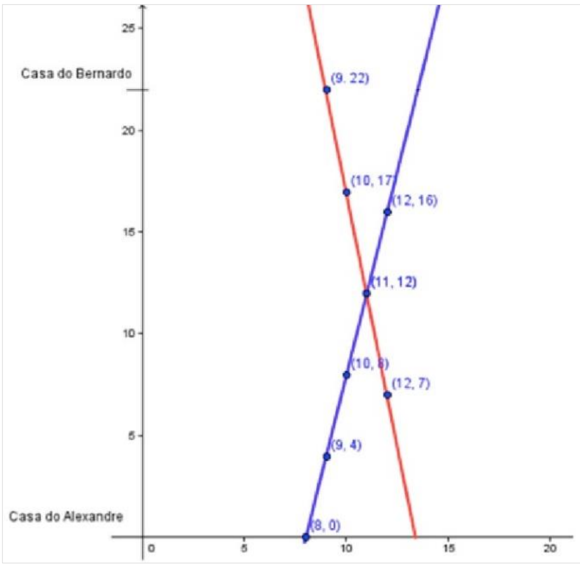


Figura 1.13. Resolução do Problema 1 da edição 2010/11, em GeoGebra

Desses trabalhos emergiram, também, algumas questões com relevância, a saber: como lidam e interagem estes estudantes com as tecnologias do quotidiano? Como fazem uso de conhecimentos tipicamente escolares para resolver um problema matemático fora da sala aula? Que ferramentas tecnológicas utilizam, o que motiva as suas escolhas, qual o seu papel na resolução de problemas? Enfim, como resolvem problemas de matemática com tecnologias digitais para além da sala de aula?

Com base nestes e noutros contributos da investigação até então realizada, nasce o projeto de investigação Problem@Web – *Resolução de Problemas de Matemática: Perspectivas sobre uma competição interactiva na web (SUB12 & SUB14)* – financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia e enquadrado na área da Educação Matemática, de cuja equipa de investigação fiz parte. Com a premissa de que estas competições matemáticas oferecem um contexto rico e multifacetado para o estudo de diversas questões relacionadas com a resolução de problemas num contexto que é exterior à sala de aula, a investigação desenrolou-se em torno de três grandes vertentes: (a) o pensamento e as estratégias de resolução de problemas matemáticos, os modos de representação e expressão do pensamento matemático e o uso de tecnologias digitais na atividade de resolução de problemas; (b) as atitudes e afetos relativos à matemática e à resolução de problemas matemáticos, tanto em contexto escolar como extraescolar, considerando alunos, pais e professores; e (c) a criatividade manifestada na resolução de problemas matemáticos e a sua relação com o uso de tecnologias digitais.

O trabalho de investigação que aqui se reporta esteve alicerçado no projeto Problem@Web[3], mais particularmente na sua primeira vertente que se refere às funções e influências da utilização espontânea das tecnologias digitais na atividade de resolução de problemas e nas formas de expressão do pensamento matemático que os jovens adotam. Este envolvimento encontra-se reportado em vários artigos e livros publicados, de investigação e também de divulgação, a nível nacional e ainda internacional.

Integrar a equipa do projeto Problem@Web foi de vital importância para a consecução desta investigação, não só por me permitir um abrir de horizontes relativamente às temáticas que circunscrevem o projeto e assim possibilitar um outro olhar sobre o meu problema de investigação mas, sobretudo, pela intensa e rica partilha de experiências de aprendizagem, quer com os jovens investigadores quer com os peritos que integraram a equipa. Assim, e embora sendo um exercício desafiador, parece oportuno explicitar de que forma a 'tese' e o 'projeto' se entrelaçaram. Por 'projeto' estarei a referir-me aos resultados em cujo desenvolvimento colaborei mais diretamente, ou seja, a uma parcela da investigação realizada pela equipa.

Esta tese é um dos produtos do projeto Problem@Web; nesse sentido, todo o trabalho que desenvolvi ao investigar o fenómeno que aqui relato foi executado de forma integrada e alinhada com uma das vertentes do projeto. Numa imagem, creio que posso considerar o desenvolvimento deste estudo como um veio que existiu de forma autónoma 'dentro' do projeto. No entanto, vários dos desenvolvimentos ou resultados do projeto decorrem de contribuições que nascem de trabalho relacionado com a tese, mas são satélites do meu estudo e não fazem parte da tese propriamente dita (por exemplo, as

[3] Disponível em https://sites.google.com/site/problematwebeng/.

consolidadas num livro para professores e encarregados de educação[4], numa plenária *keynote address*[5], numa monografia de investigação ou num livro publicado pela Springer na série *Mathematics Education in the Digital Era*[6]). Por outro lado, muitos desenvolvimentos ficaram circunscritos à tese, não tendo envolvido, de forma direta e explícita, trabalho coletivo da equipa do Problem@Web, nem tendo sido integrados noutros produtos do projeto (por exemplo, patente no quadro conceptual que apresentarei adiante e que, em dado momento, passou a diferenciar-se substancialmente dos desenvolvidos no projeto, ou ainda nos resultados reportados em artigos de conferências nacionais ou internacionais e submetidos a revistas).

Este estudo não o seria sem o projeto Problem@Web e a sua equipa de investigação.

1.5 Objetivo e questões do estudo

Desde a sua embrionária formulação, este estudo foi alvo de sucessivas revisões a par e passo e em virtude das também várias apreciações ou críticas que lhe foram dirigidas nos mais diversos fóruns. No entanto, e devido ao facto de esta secção conter o propósito que norteia este estudo, gostaria de frisar o processo reflexivo e interrogativo que se iniciou com as primeiras tentativas de formulação das questões do estudo.

A propósito de um seminário de orientação do mestrado em Didática da Matemática, no Instituto de Educação, tive oportunidade de encetar uma reflexão mais aprofundada sobre o desenvolvimento desta investigação. A proposta consistia em dar a conhecer 'o caminho percorrido, mais do que o produto obtido', já que os mestrandos estavam, nessa altura, a iniciar as suas investigações. Com a preparação dessa apresentação tomei consciência da transformação que se foi operando no meu estudo, impercetível no dia-a-dia, mas notória ao revisitar o meu pré-projeto, contrapondo com o

[4] Carreira, S., Amado, N. (Coords.), Ferreira, R. A., Rodriguez, J., Silva, J. C., Jacinto, H., Amaral, N., Nobre, S., Martins, I., Reis, S., & Mestre R. B. (2012*). Um olhar sobre uma competição matemática na Web: Os SUBs*. Faro: Universidade do Algarve. ISBN: 978-989-8472-19-9.

[5] Jacinto, H., Nobre, S., Carreira, S., & Amado, N. (2014). The use of digital tools in web-based mathematical competitions: degrees of sophistication in problem solving-and-expressing. (Keynote Address). In S. Carreira, N. Amado, K. Jones & H. Jacinto (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving*, (pp. 14-15). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

[6] Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2016). *Youngsters solving mathematical problems with technology: The results and implications of the Problem@Web Project*. New York, NY: Springer.

que efetivamente fui colocando em marcha e atenta à forma como isso se tem vindo a repercutir em alterações ao plano traçado.

Porém, a grande maioria dos artigos e teses que usei como referência apresentam um discurso que revela uma certa linearidade no processo, isto é, não encontro neles qualquer eco de eventuais sobressaltos e recuos na investigação, pelo que a sequência dos processos soa cristalina desde a sua génese ao seu epílogo. Seriam todos os estudos assim? Os ‘manuais do investigador’ advertem que a formulação do problema de investigação e das questões do estudo têm um caráter evolutivo, vão sendo refinados com o correr da investigação, e até os próprios métodos são passíveis de ajustamento. Mas, de facto, isso acaba por não transparecer nos produtos finais e rapidamente percebi que esta discrepância entre o método seguido e o que surge relatado está já bastante bem documentada (Araújo & Borba, 2004; Mellor, 2001; Russel, 2003).

Quero pois sublinhar a necessidade de adaptação que senti – que gerou avanços mas também recuos – com o propósito de resolver as dificuldades emergentes. Reconhecendo a limitação em termos de espaço para reportar todas as intenções e as ações infrutíferas ou abandonadas, adiante apresentarei um resumo de algumas inquietações que foram surgindo, bem como das reflexões e aprendizagens que me proporcionaram.

Do trabalho de investigação que havia realizado e das reflexões sobre investigações futuras, permaneceu latente uma curiosidade: como é que os participantes resolvem os problemas do campeonato com recurso a tecnologias? Porém, esta formulação não era, de todo, amigável. Para além de excessivamente abrangente, vaga, levantava uma grande dificuldade relacionada com a acessibilidade aos dados, decorrente do facto de a atividade de resolução dos problemas do campeonato poder ocorrer nos mais variados locais, ao longo de 15 dias, nomeadamente, nas residências dos participantes.

Não obstante as dificuldades, e ponderando as lacunas identificadas na literatura, seria pertinente e oportuno caracterizar a forma como estes jovens – na faixa dos 13-14 anos, cuja envolvência quotidiana em ambientes marcadamente tecnológicos é conhecida, que revelam uma clara propensão para tirar partido de recursos como a Internet, o computador, o *smartphone* e outros – se envolvem em atividades exteriores à sala de aula que requerem um ponto de vista matemático. E mais concretamente, compreender o papel que as tecnologias da informação e comunicação desempenham na resolução de problemas de Matemática, no âmbito de um campeonato que decorre *online*, à semelhança de alguns outros que se realizam nestes moldes, um pouco por todo o mundo.

O primeiro grande momento de reformulação do propósito central do estudo e das questões de investigação aconteceu após a defesa do projeto e, apesar de a diretriz não se ter alterado, esta formulação só mais tarde se tornou relativamente estável, talvez em resultado de um amadurecimento de ideias e de um nível de compreensão mais profundo sobre o problema em estudo (Creswell, 2007). Por exemplo, abandonei conceções prematuras sobre quem são estes jovens que resolvem problemas com tecnologias ao alterar o objetivo do estudo de "compreender como é que os jovens nativos digitais resolvem problemas de matemática num ambiente extraescolar e tecnologicamente rico, e quais são as implicações dessas suas preferências para a aprendizagem da matemática" (pré-projeto), para "compreender como é que os jovens de hoje resolvem problemas de matemática em ambientes extraescolares tecnologicamente ricos e que implicações poderão ter essas experiências na aprendizagem da Matemática escolar" (projeto).

A discussão do projeto foi muito útil, sobretudo para estabelecer delimitações mais claras e vincadas, como que uma bússola a apontar-me o norte: abandonei a explicitação da intenção de olhar às implicações para a aprendizagem da matemática escolar, pois essa formulação implicaria o desenvolvimento de métodos específicos para obter dados e analisá-los em conformidade. Na verdade, o foco do estudo que pretendia desenvolver já era o contexto exterior à sala de aula, pelo que as implicações para a aprendizagem ou para a sala de aula poderão vir a existir, ou não, consoante os resultados que apurar.

O objeto de investigação foi, assim, ganhando contornos sucessivamente mais nítidos. Neste trabalho proponho-me então *estudar a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias que ocorre no âmbito do campeonato SUB14*, com o intuito de oferecer uma compreensão mais profunda sobre a forma como estes jovens do século XXI resolvem problemas de matemática não-rotineiros para além da sala de aula.

Mas conhecendo e assumindo as dificuldades que a implementação de um estudo exterior à Escola comporta, desde cedo senti necessidade de enunciar questões subsidiárias que guiassem o *design* da investigação e a sua implementação. Também estas questões foram afinadas ao longo do tempo. No pré-projeto falava em "caracterizar as preferências e os estilos de resolução de problemas dos jovens participantes" e em "compreender como essas preferências influenciam a atividade de resolução de problemas". Uma tentativa de aclarar estas intenções conduziu a novas formulações no projeto de tese: "que tecnologias possuem estes jovens e usam no seu dia-a-dia? Com que fins? Que tecnologias usam na aula de Matemática? Com que fins? Que tecnologias utilizam para participar no Sub14?" e ainda "que evidências da fluência tecnológica se encontram nas estratégias utilizadas pelos participantes na resolução dos problemas do Sub14? Como é que as suas preferências tecnológicas influenciam a sua atividade de resolução de problemas matemáticos, num ambiente exterior à Escola?"

O envolvimento no projeto Problem@Web também influiu no processo de apuramento das questões-guia do estudo, por um lado, devido ao trabalho de investigação no âmbito da vertente 'tecnologias na resolução de problemas' e, por outro, fruto das discussões com a equipa. Exemplificando, na sequência de um trabalho em que procurava identificar os aspetos matemáticos e os aspetos tecnológicos subjacentes a um conjunto de resoluções, identificou-se uma certa dificuldade em estabelecer fronteiras claras entre o que podíamos considerar evidência de conhecimento exclusivamente matemático e o que poderia ser conhecimento exclusivo da ferramenta tecnológica.

Apesar de algumas intenções e correspondentes formulações terem sido abandonadas ou substituídas por outras, sempre com o intuito da clarificação, o que procuro é compreender os elementos que caracterizam esta atividade de resolução de problemas, pelo que optei por empreender uma nova delimitação das 'fronteiras' do estudo através da proposição das seguintes questões:

a) Como se carateriza, enquanto sistema de atividade, a resolução de problemas de matemática de jovens participantes numa competição baseada na Internet?

b) Como se (re)configura a resolução de problemas de matemática quando os jovens recorrem, de forma espontânea, ao uso de ferramentas tecnológicas?

c) De que forma a capacidade de resolver problemas de matemática e exprimir as suas soluções pode ser entendida a partir da relação dos jovens com as tecnologias?

1.6 Diagnóstico prévio: algumas inquietações e reflexões

A apresentação de elementos parcelares deste estudo perante a comunidade de investigação em Didática da Matemática foi acolhida de formas muito díspares, mas foram certamente as questões, as advertências, as críticas, que impeliram melhoramentos, clarificações. Na verdade, é isso mesmo que se espera: que aproveitemos as reações de uma diversidade de audiências (Cotton, 2002) para afinar o rumo. Nesta secção pretendo registar de forma contida a complexidade das inquietações que ao longo destes anos fui vivendo em conversas informais, reuniões de projeto, seminários doutorais, encontros nacionais, conferências ou congressos internacionais, bem como uma síntese das reflexões que me proporcionaram.

1.6.1 Sobre o domínio de investigação

A Didática da Matemática tem sido perspetivada como um "campo de investigação cujo principal objetivo é o estudo de como induzir o aluno a adquirir uma parcela de conhecimento matemático" (Warfield, 2014, p. 67). E, por isso, enquanto campo de investigação, tem sido particularmente fértil na produção de resultados com vista a solucionar problemas focados nos mais variados aspetos da *aprendizagem* e do *ensino* da matemática que têm lugar na sala de aula e na Escola. E também é esse o caso quando se trata de investigar a utilização de ferramentas digitais na aprendizagem ou no ensino de temas matemáticos. Paralelamente, são também reconhecidos neste domínio os estudos com foco no mundo do trabalho ou em questões exteriores à sala de aula que, embora de pendor mais etnográfico, se debruçam sobre os conceitos, os procedimentos ou o pensamento matemático que ali se produzem ou utilizam.

Estudar a utilização de ferramentas tecnológicas na atividade matemática tem sido uma preocupação clara da investigação em Didática da Matemática, como se pode comprovar pelos inúmeros fóruns de discussão promovidos a nível nacional e internacional, quer focados especificamente nesta temática, quer integrados em congressos que congregam uma diversidade de subáreas de investigação (ICTMT, PME, CERME, ICME, SIEM, EIEM). Atualmente, o papel das tecnologias no ensino da Matemática também está a ser analisado segundo perspetivas integradoras de diferentes tipos de conhecimento, por exemplo, conhecimento pedagógico, de conteúdo e da própria tecnologia (Koehler & Mishra, 2009). Todavia, quando a tónica se desloca para o papel das ferramentas digitais na aprendizagem da matemática, na mão do aluno, o grande foco continua a estar apontado para as 'tecnologias matemáticas' e as suas potencialidades enquanto recurso que auxilia os alunos na computação, na representação, na visualização.

Assim, este não é um estudo sobre o *ensino da matemática*, nem sobre o *ensino da matemática com tecnologia*. E não sendo um estudo sobre a *aprendizagem da matemática* *escolar* nem sobre a *aprendizagem da matemática com tecnologia*, enquadra-se no campo da Didática da Matemática? Sim. Este é um estudo que se debruça sobre a utilização de conhecimentos matemáticos e tecnológicos – uns certamente apreendidos pela via da instrução, mas também outros de influência menos formal – no desenvolvimento de processos de resolução de problemas matemáticos. Ao que se sabe sobre o uso de tecnologias na aprendizagem da matemática, este estudo espera vir a acrescentar uma outra dimensão relacionada com as competências e capacidades destes jovens quando, no pleno exercício da sua liberdade e preferências pessoais, resolvem problemas que requerem a utilização de recursos matemáticos e tecnológicos, em simultâneo.

1.6.2 Sobre o 'locus' da investigação

Ainda em jeito de sustentação da questão anterior, levantaram-se várias questões relacionadas com o interesse ou o potencial contributo de um estudo exterior à sala de aula no campo da Didática da Matemática. Começando por constatar a quantidade e diversidade de contributos provenientes de estudos realizados em contextos marginais à Escola, concluo que o problema não será o contexto em si mesmo, mas antes o que dele se pode esperar aprender.

O campeonato de resolução de problemas SUB14 apresenta-se como um contexto com características únicas, permitindo 'entender cientificamente' uma outra experiência matemática destes jovens participantes. Não é um ambiente com fins de educação formal; incentiva a criatividade; não coloca obstáculos às preferências pessoais; permite o amadurecimento de uma ideia ou estratégia ao longo de um período de tempo considerável; não reprime a intervenção de familiares, amigos, professores; valoriza o processo e não apenas a solução. Poder-se-ia situar o SUB14 numa interseção entre a Escola e o Quotidiano de cada jovem participante. Por um lado, esta ambivalência permite discutir aspetos que tradicionalmente são associados à aprendizagem em contexto de sala de aula, como os processos de resolução de problemas matemáticos ou o uso de tecnologia. Por outro, permite observar o cruzamento de saberes e experiências, típico de um mundo volatizado. É certo que a natureza do campeonato e o facto de ser promovido pelo Departamento de Matemática da FCT da Universidade do Algarve, influenciam a atividade dos jovens. Mas é essa mescla de características e a sua longevidade, isto é, o ter-se tornado uma dinâmica habitual para milhares de jovens no Algarve e Alentejo, que o tornam potencialmente interessante do ponto de vista da investigação.

Está bem documentado que a instituição Escola tem sido, ao longo dos tempos, reflexo das características de cada época e da sociedade envolvente pelo que, em consequência, o próprio currículo vai absorvendo essas particularidades de forma a que essas aprendizagens vão ao encontro do que é socialmente necessário num determinado tempo e contexto (Roldão, 1999, 2011). Tenho, assim, presente que os problemas no campo da Didática da Matemática estão profundamente enraizados "nos problemas mais gerais da educação e da sociedade" (Ponte, 1999, p. 328) e não se esgotam nas questões relacionadas com a atividade educativa (Straesser, 2007). Porém, questiono: como se poderá assumir que a escola e o currículo incorporam as características da sociedade – agora profundamente digital – e, simultaneamente, proibir-se o uso de telemóvel ou impedir-se o acesso às redes sociais na Escola? É certo que o uso de tecnologias digitais pode camuflar ideias e conceitos matemáticos (Noss, 2001; Straesser, 2007), sobretudo quando estão fora do contexto escolar. Mas ignorar que é necessário desenvolver determinadas competências para utilizar de forma efetiva essas tecnologias é ainda mais contraproducente. Na verdade, os empregadores estão cada vez menos disponíveis para investir tempo, material e dinheiro na formação associada ao uso de tecnologias que "desmistifiquem as caixas negras" matemáticas (Straesser, 2002, p. 130), isto é, que façam emergir e permitam explorar as ideias ou relações matemáticas imbuídas.

Assumindo a centralidade deste contexto, porque é modelador desta atividade de resolução de problemas com tecnologias, não pretendo fechá-lo sobre si próprio nem confinar a utilidade da matemática escolar à sua aplicação no quotidiano destes jovens. Espera-se que as ideias discutidas a partir da análise da atividade matemática com tecnologias, neste contexto, possam ser de utilidade ao debate global sobre o ensino e a aprendizagem da matemática de forma a aproximar discussões sobre esta 'resolução de problemas de matemática com tecnologias' no SUB14 da que pode ocorrer noutros contextos, nomeadamente, na sala de aula.

1.6.3 Sobre os contornos do problema de investigação: social vs cognitivo

Vejamos. Estudar os processos de resolução de problemas com tecnologias implica perscrutar não só *o que se faz*, por exemplo, o traçar de um plano estratégico, as operações realizadas e o seu significado no contexto do problema, as representações, a lógica da argumentação, mas também o *porquê daquilo que se faz*, ou seja, os aspetos do pensamento e do conhecimento matemático, e também do conhecimento sobre a ferramenta que caracterizam os modelos conceptuais, e que são trazidos à superfície e levados à sua materialização. Constato ainda que, na literatura, os processos de resolução de problemas têm sido observados, quase tradicionalmente, em experimentações de tipo laboratorial e assumindo perspetivas cognitivas da aprendizagem, que atribuem um papel central ao indivíduo cognoscente (Charles & Lester, 1982; Mamona-Downs & Downs, 2005; Lester, 2015; Schoenfeld, 1985; Waisman, Leikin, Shaul & Leikin, 2014; Yerushalmy, 2006). Penso pois que é oportuno estabelecer um olhar desta natureza como um aspeto incontornável neste trabalho.

Por outro lado, *o que se faz* no âmbito desta atividade de resolução de problemas com tecnologias não é independente do contexto ou, melhor dizendo, é efetivamente moldado pela competição matemática SUB14: porque é inclusiva, promove o envolvimento da família, dos amigos, dos professores numa grande comunidade de indivíduos que gostam de resolver problemas; tem um forte cunho cultural porque aceita as preferências de cada um, reconhece as individualidades, incentiva a criatividade ao publicar as resoluções admiráveis. Estas características são marcas socioculturais do SUB14. Portanto, parece prudente recorrer a uma lente teórica ancorada em perspetivas sociais, sob pena de perder a riqueza que estes aspetos encerram e que influenciam sobejamente os processos de resolução de problemas com tecnologias. Um exemplo, *a priori*, é o facto de as regras da competição determinarem explicitamente a apresentação de uma explicação do processo de resolução. Essa regra 'altera' o significado de resolver um problema já que não basta fornecer a solução obtida, é também necessário incluir uma descrição do processo seguido.

Reconhecendo a existência de uma certa colisão entre correntes cognitivistas e sociais, tenho consciência de que este confronto é ele mesmo uma marca profunda do fenómeno que me proponho analisar e que representará uma dificuldade, senão um desafio, ao longo deste estudo. Embora tenha ponderado resolver esta questão através de várias tentativas de reformulação do problema, parece-me que qualquer esforço que possa empreender para contornar esta dualidade de perspetivas conduziria a um olhar truncado sobre o fenómeno, o que não pretendo. Todavia, espero que a solução que desenvolverei adiante e que recorre a perspetivas enraizadas nestas duas correntes, e que se distribuem tanto pelo quadro teórico como pela própria análise de dados, possa ilustrar as duas faces dicotómicas do objeto de estudo, isto é, 'atividade de resolução de problemas com tecnologias no âmbito do SUB14'.

A concluir, registo o meu propósito de que este estudo avance na compreensão de um ambiente de aprendizagem ‘além da sala de aula’ em que estes jovens habitam e que, não sendo um contexto já explicitamente abordado na literatura, como o do mundo do trabalho, oferece um *milieu* para observar uma atividade matemática que, também tendo as suas regras e normas socio matemáticas próprias, não é marcada pelas constrições típicas da sala de aula. Espero ainda que estes dados e a sua análise produzam resultados que permitam ampliar a visão da utilização pedagógica de tecnologias digitais na resolução de problemas, incluindo no espaço da aula de matemática.

1.7 Guião do relatório

Este relatório encontra-se organizado em nove capítulos. Este primeiro capítulo, Introdução, dedica-se aos aspetos que motivam o estudo e justificam a sua pertinência no atual panorama da investigação em Didática da Matemática. A partir da caracterização da competição de resolução de problemas de matemática, SUB14, e da investigação realizada anteriormente e no âmbito do projeto Problem@Web, apresento o grande propósito desta pesquisa e as questões que a irão guiar. Incluo ainda um diagnóstico de algumas inquietações prévias e as reflexões que me proporcionaram.

O capítulo 2, Revisão da Literatura, apresenta uma análise bibliográfica que tem em vista uma apresentação do estado da arte sobre as temáticas que circunscrevem o fenómeno em estudo, nomeadamente, a resolução de problemas de matemática, a utilização de tecnologias na resolução de problemas de matemática, e a resolução de problemas de matemática para além da sala de aula. Para além de identificar tendências na investigação recente e aspetos que carecem de maior atenção e aprofundamento, procuro sintetizar um conjunto de ideias relevantes para orientar a construção de um quadro conceptual que providencie o suporte teórico e analítico necessário a este estudo.

No terceiro capítulo, Quadro Conceptual, desenvolvo essas ideias que emergiram da revisão bibliográfica, organizando-as e discutindo-as em torno dos pilares que confluem na conceptualização teórica deste estudo. Um elemento fundamental é a noção de *ser-humano-com-media* como unidade central de análise, espelhando a perspetiva de que a tecnologia reconfigura o pensamento matemático desenvolvido durante a atividade de resolução de problemas. A resolução de problemas de matemática com tecnologias é discutida com o pressuposto de que resolver-e-exprimir são uma mesma faceta dessa atividade e que a interação dos indivíduos com a tecnologia é encarada do ponto de vista de percecionar *affordances* nas ferramentas. Uma pedra angular deste quadro conceptual é a conjugação de um modelo de resolução de problemas de matemática e um modelo de resolução de problemas tecnológicos, a partir da qual proponho *o modelo de resolução de problemas com tecnologias* para descrever a sequência de processos que integram a atividade. Por fim, argumento que a capacidade para tirar partido das tecnologias digitais para resolver e exprimir problemas de matemática se pode explicar através da noção de *fluência tecno-matemática*.

O capítulo seguinte, Metodologia de Investigação, está organizado em duas fases: uma que diz respeito a um estudo preliminar e outra que se refere à investigação propriamente dita. O estudo prévio foi desenvolvido para testar formas de aceder aos dados, testar procedimentos de recolha e análise de dados e a adequação das grandes linhas teóricas, o que veio a influenciar a abordagem metodológica delineada para a segunda fase. Nas seções referentes ao estudo principal, apresento uma discussão sobre o *design* de investigação adotado, dedicando especial atenção ao modo como este interseta três vizinhanças metodológicas, discuto o papel da investigadora e refiro as questões éticas ponderadas. Em seguida apresento uma descrição detalhada das diferentes etapas do estudo, nomeadamente, os critérios que subsistiram à seleção dos participantes, a elaboração e a aplicação dos instrumentos de recolha de dados e dos métodos usados no tratamento e análise da informação recolhida.

O capítulo 5 é dedicado aos Problemas Propostos, pelo que começo por explicar como são criados esses problemas no âmbito do SUB14. Em seguida, apresento com maior detalhe os problemas que foram resolvidos pelos participantes neste estudo (que designo por por problemas experimentais), com recurso a tecnologias, e incluo uma descrição de uma abordagem convencional a cada um deles. Por fim, faço uma resenha teórica sobre tipos de pensamento matemático que poderão ser espoletados durante o processo de resolução destes problemas, nomeadamente, a capacidade de visualização, o pensamento geométrico e o pensamento covariacional.

Os capítulos 6, 7 e 8 debruçam-se, respetivamente, sobre os casos de Jéssica-com-ferramentas-de-geometria, Marco-com-ferramentas-de-visualização e Beatriz-com-ferramentas-de-expressividade. Cada um destes capítulos empíricos ilustra os aspetos específicos e as teias de relações que constituem os sistemas de atividade de cada participante. Neles analiso também os processos de resolução de problemas de matemática com tecnologias, com base no modelo de resolução de problemas com tecnologias (RPMT), e caracterizo a capacidade de resolver-e-exprimir problemas de matemática com tecnologias em termos dos aspetos que caracterizam a fluência tecno-matemática de cada jovem.

O capítulo 9, Conclusões, faz uma retrospetiva sobre as intenções do estudo, a pesquisa realizada e os resultados alcançados, mas também apresenta uma reflexão sobre o seu significado e o seu eventual contributo para o campo da Didática da Matemática. Neste capítulo final procuro condensar a discussão de resultados em torno de cada uma das três linhas que foram ganhando relevo e autonomia ao longo do trabalho: uma caracterização dos sistemas de atividade em que cada jovem se insere, um quadro síntese dos processos de resolução de problemas de matemática com tecnologias, e uma caracterização das suas capacidades de resolver-e-exprimir problemas com tecnologias concretizadas nas suas fluências tecno-matemáticas. Faço ainda um balanço do trabalho realizado, sugerindo algumas implicações para a prática e apontando alguns desafios que podem dar continuidade a esta investigação.

2

Revisão da Literatura

We are attempting to educate and prepare students today so that they are ready to solve future problems, not yet identified, using technologies not yet invented, based on scientific knowledge not yet discovered.

(Joseph Lagowski[7])

Preâmbulo

Educar para a Sociedade do Conhecimento tem sido uma prioridade no mundo ocidental nas últimas décadas. Filósofos, sociólogos, psicólogos, pedagogos, didatas, têm discutido veementemente o papel da Escola na formação de cidadãos ativos, críticos e produtivos, que possam responder com eficácia aos desafios do futuro.

A experiência pessoal é, muitas vezes, uma feliz metáfora. Ted McCain (2005), no seu livro *Teaching for Tomorrow – Teaching content and problem-solving skills*, reflete sobre a ineficiência dos currículos escolares perante os desafios do dia-a-dia a partir da sua própria experiência enquanto jovem adulto prestes a entrar no mundo do trabalho. Em termos académicos, McCain sempre foi considerado um excelente aluno. Mas tal não o impediu de ter sido despedido logo do seu primeiro emprego por não conseguir responder com eficácia a uma solicitação do patrão: uma situação problemática para a qual não conseguiu encontrar uma solução eficaz. Ao longo do livro vai troçando dessa situação para confidenciar que, por vezes, se sente uma 'pessoa inútil altamente qualificada' (*highly educated useless person*, no original) especialmente quando está a contribuir para a formação de mais 'pessoas inúteis altamente qualificadas'. Essa expressão dá o mote às

[7] Citado por Zollman, A. (2010). Comentary 2 on Problem Solving for the 21st Century. Em B. Sriraman & L. English (eds), *Theories of Mathematics Education*, pp. 297- 301. Springer.

ideias que passa a desenvolver, insistindo na resolução de problemas como uma das mais importantes aprendizagens escolares com efetiva utilidade na vida do quotidiano. Todavia, prever os conhecimentos e aptidões que serão úteis na ‘sociedade de amanhã’ de forma a preparar os estudantes de hoje para esses mesmos desafios, não é tarefa simples. Esta dificuldade prende-se, por um lado, com a rapidez com que ocorrem transformações ao nível das ferramentas tecnológicas, sintetizadas por Brady, Eames e Lesh (2015) como “um fluxo veloz de informação, um elevado nível de conetividade e uma extrema interdependência” (p. 7). Por outro lado, a complexidade da tarefa atrás mencionada também está relacionada com as rápidas alterações em termos dos conhecimentos matemáticos necessários para além da Escola, o que tem inquietado inúmeros investigadores e empresários pois as instituições e as políticas educativas não têm conseguido dar resposta às reais exigências do mundo do trabalho (Hamilton, 2007).

Note-se que os investigadores em Educação Matemática têm procurado compreender quais os conhecimentos ou capacidades efetivamente necessários para além da escola através da observação do pensamento matemático que os indivíduos levam a cabo em situações do quotidiano da sua vida profissional (Lesh & English, 2005; Brady, Eames & Lesh, 2015). De acordo com Lesh (2008), os trabalhadores mais requisitados em áreas relacionadas com a matemática e a ciência são os que demonstram capacidades para interpretar e operar eficazmente com sistemas complexos; os que são capazes de comunicar eficientemente com especialistas de diversas áreas; os que planificam, monitorizam e avaliam o progresso de projetos complexos; e os que demonstram ser capazes de se adaptar rapidamente à constante evolução das ferramentas tecnológicas. Atualmente, e tal como referem Brady, Eames e Lesh (2015), resolver um problema autêntico não remete somente para a utilização de conhecimentos ou procedimentos matemáticos como formas de conceptualizar a situação problemática. Para além disso, resolver um problema exige um grande “envolvimento em processos interpretativos”; o que leva a uma atividade baseada em “tentativas de impor ao mundo estruturas matemáticas e, de forma iterativa, refinar essas estruturas para melhorar a viabilidade da correspondência”, processo este que requer e fomenta um nível elevado de fluência com as ferramentas matemáticas fundamentais” (Brady, Eames & Lesh, 2015, p. 8).

Já no virar do século, Ponte questionava a integração das tecnologias na escola apontando ‘novos’ caminhos para a investigação:

> Tornou-se claro que é preciso ir mais longe e fazer outro tipo de perguntas: (iv) de que modo as TIC alteram (ou podem alterar) a natureza dos objectivos educacionais visados pela escola? (v) de que modo alteram as relações entre os alunos e o saber? . . . (viii) a emergência da sociedade de informação requer ou não uma nova pedagogia? (Ponte, 2000, p. 71).

Embora não nos apercebamos constantemente, as tecnologias digitais estão impregnadas de matemática. O formato, os componentes, a cor, o som, o movimento. A maior parte de nós, não só não se apercebe como não possui um conhecimento matemático avançado que permita compreender a complexidade matemática escondida nos aparelhos ou nos programas informáticos que usamos no dia-a-dia. Como funciona o ecrã táctil de um *tablet*? Como funciona um telemóvel? Skovsmose e Valero (2002) argumentam que as competências necessárias para lidar com as tecnologias determinam a existência de duas categorias de pessoas: as que conseguem construir tecnologia e as que apenas a conseguem utilizar. Deste modo, para contrapor os paradoxos da inclusão e da cidadania, a Educação Matemática deve considerar a instrução dos indivíduos que vão usar conceitos e propriedades matemáticas para construir tecnologia, dos que vão utilizar tecnologias que requerem algum tipo de pensamento matemático e, ainda, dos que poderão não vir a interagir com tecnologias que requeiram noções matemáticas.

É então imperativo procurar compreender os avanços da investigação nestes campos – resolução de problemas e utilização de tecnologias digitais – e o conhecimento acumulado que daí tem resultado. Sem ambicionar uma análise bibliográfica exaustiva, importa que os trabalhos analisados/examinados me permitam construir noções claras sobre as contribuições de vários investigadores para o avanço do conhecimento no campo da resolução de problemas, de forma a partir ‘equipada’ para a minha própria ‘aventura’ investigativa (Cardoso, Alarcão & Celorico, 2010).

2.1 Resolução de problemas de matemática: estabelecendo fronteiras

A utilização de ‘problemas’ enquanto tarefas na sala de aula tem sido uma constante nos currículos de Matemática desde a antiguidade, tal como Stanic e Kilpatrick (1989) mostraram de forma particularmente interessante. Todavia, a discussão em torno da noção de ‘resolução de problemas’ é mais recente, datada das últimas décadas do século XX, proporcionando importantes reflexões sobre a sua importância na aprendizagem da matemática e no desenvolvimento dessa ‘capacidade básica’ (NCSM, 1978).

O trabalho que mais tem inspirado o desenvolvimento do conhecimento que hoje se detém sobre a resolução de problemas de Matemática é, incontestavelmente, o de George Pólya, que publicou o famoso *How to Solve It* (1945/1978) e, mais tarde, *La Découverte des Mathématiques* (1967), onde clarificou e aprofundou algumas noções em relação à anterior publicação. Contudo parece ter sido o trabalho que Jeremy Kilpatrick levou a cabo no âmbito da sua dissertação de doutoramento que conduziu ao reconhecimento da Resolução de Problemas como campo de investigação na Educação Matemática (Lesh & Zawojewski, 2007). Desde então, a resolução de problemas tem inspirado uma multiplicidade de tomadas de posição sobre o ensino e o currículo de Matemática, com propósitos igualmente variados, mas com uma preocupação em comum: a reconhecida importância do aperfeiçoamento da capacidade de resolução de problemas para o desenvolvimento de capacidades matemáticas (APM, 1988, 2007; NCTM, 1989; ME, 2007).

Procurando equacionar os aspetos que se afiguram como relevantes no desenvolvimento de um referencial teórico que enquadre o presente estudo no que se refere à resolução de problemas, e mais concretamente, à resolução de problemas com tecnologias, sinto necessidade de registar algumas ideias que tal ponderação tem gerado, e clarificar o uso de alguns termos a que recorro e recorrerei com frequência.

2.1.1 O que se entende por 'problema' e por 'resolução de problemas'?

Refletindo sobre a natureza da resolução de problemas e a investigação levada a cabo nos últimos 40 anos, Lester (2013) faz notar que a noção de 'problema' tem sido analisada sob múltiplas perspetivas teóricas da cognição humana (Gestaltismo, Cognitivismo, Behaviorismo, Teoria do Processamento da Informação, entre outras), embora seja possível identificar um conjunto de aspetos transversais que são partilhados por todas essas visões teóricas.

Na investigação em Didática da Matemática, o conceito de 'problema' aparenta uma certa uniformidade, ainda que se percebam pequenas *nuances* num estudo ou noutro. Nem sempre foi assim. Nas duas últimas décadas do século XX, a discussão era particularmente vívida. Kantowski (1981) frisa a distinção entre 'problema' e 'exercício', colocando uma tónica forte no "facto de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que o conduzirá, com certeza, a uma solução" (citado por Abrantes, 1989, p. 8) quando está perante um problema. Com base nesta definição, Abrantes observa que a noção de problema se reveste de um carácter relativista na medida em que um exercício pode ser um problema se o indivíduo não conhecer a estratégia necessária à sua solução e, ao invés, um problema pode tornar-se num exercício rotineiro se o processo de resolução for já do domínio do indivíduo. Uma tarefa será um exercício se o indivíduo souber, de antemão, qual a ferramenta a usar para obter a solução, independentemente da dificuldade ou complexidade dos cálculos.

Outros autores (Lester, 1983; Ponte, 1992) sublinham ainda que para determinada tarefa ser considerada um problema, é necessário que o indivíduo sinta necessidade, demonstre interesse e se disponha a procurar a solução de forma ativa e empenhada. Kilpatrick (1985) refere que o próprio conceito de problema é, geralmente, definido como uma situação em que existe um determinado objetivo em vista, mas em que o caminho direto para atingir esse objetivo não está disponível. Esta opinião, partilhada por autores com influências provenientes da psicologia cognitiva (Robertson, 2001), é concordante com a emitida por Pólya ao discutir o conceito de problema no seu livro *La Découverte des Mathématiques* (1967). Tendo dedicado grande parte da sua vida à investigação de inúmeras questões relacionadas com a resolução de problemas, Pólya considera que um indivíduo está perante um problema quando procura "conscientemente uma certa ação apropriada que lhe permita encontrar um caminho ou transpor um obstáculo para alcançar um objetivo não atingível de maneira imediata" (1967, vol I, p. VII). Na perspetiva de Schoenfeld (1985, 1992a), a resolução de problemas pode ser descrita de forma geral como uma tentativa de atingir um certo fim quando o método para lá chegar não é do conhecimento do sujeito que pretende resolver o problema. Borralho (1991) condensa diversas destas perspetivas ao afirmar que um problema é uma tarefa para a qual o estudante tem que estar motivado e para a qual não possui "um procedimento acessível que garanta a solução" (p. 167). De forma muito semelhante, na publicação Princípios e Normas para a Matemática Escolar (APM, 2007) continua a identificar-se um problema como "uma tarefa cujo método de resolução não é conhecido antecipadamente" (p. 57). Portanto, a natureza desta atividade parece assentar na necessidade de encetar a criação de um processo de resolução, específico para o problema a resolver, com alguma razoabilidade mas sem garantias, isto é, subsistindo uma certa incerteza relativamente à eficácia do processo.

Estas perspetivas sobre o que é um problema e em que consiste resolver um problema de matemática têm algumas características em comum, inclusive, em termos da linguagem utilizada por diferentes investigadores ao longo dos tempos. De um modo muito genérico, é possível caracterizar-se a resolução de problemas como o encontrar um caminho entre o que é dado e aquilo que é pedido (Kilpatrick, 1985; Mason, Burton & Stacey, 1982/2010; Ponte, 2005; Schoenfeld, 1985; Ponte, Matos, Matos & Fernandes, 1992). Nas palavras de Mayer (1985, p. 123): "um problema surge quando um indivíduo é confrontado com uma dada situação – chamemos-lhe o estado inicial – e pretende alcançar outra situação – chamemos-lhe o estado desejado – mas não existe um caminho óbvio de realização desse objetivo".

Desta forma, parece inegável o contributo extenso e valioso que a resolução de problemas oferece à Educação Matemática, de forma a aproximar a aprendizagem do estudante à atividade matemática em si, ideia aliás defendida por diversos investigadores e educadores matemáticos e matemáticos (Pólya, 1945; Ponte, 2007; Schoenfeld, 1985). Ernest (1991) reporta-se a essa proximidade e identifica um paralelismo entre a atividade do matemático profissional e a resolução de problemas por parte dos alunos, afirmando que "qualitativamente não diferem" (p. 283), desde que essa atividade seja produtiva.

Esta ideia de 'atividade produtiva' tem sido sublinhada e desenvolvida por uma perspetiva de investigação que se debruça sobre a modelação e o desenvolvimento de modelos matemáticos (*models and modeling perspective*) como uma forma mais ampla ou complexa de resolução de problemas do mundo real. Lesh e Zawojewski (2007), dois dos impulsionadores desta corrente, discutem as noções de problema e de resolução de problemas salientando que as definições mais frequentes revelam uma proximidade com o contexto escolar, a aula de matemática. Os autores argumentam que é necessário rever estas definições para incorporar, por um lado, a ideia de que a resolução de problemas pode ser catalisadora do desenvolvimento de modelos conceptuais e de noções matemáticas (no que designam por *problem driven conceptual models*) como, por outro, para possibilitar a perceção da relação entre esses conceitos e as situações do mundo real, para além da sala de aula. Estes autores fazem a seguinte proposta:

> Uma tarefa, ou atividade direcionada para um objetivo, torna-se um problema (ou uma situação problemática) quando o solucionador, que pode ser um grupo de especialistas em colaboração, precisa de desenvolver uma forma mais produtiva de pensar sobre a situação dada. (Lesh & Zawojewski, 2007, p. 782).

Apraz-me salientar duas ideias nesta conceção, por considerá-las relevantes. Em primeiro lugar, os autores reconhecem um problema como uma tarefa que desencadeia uma "atividade direcionada para um objetivo" e, em segundo lugar, abrem a possibilidade de conceptualização do sujeito que empreende essa atividade como um grupo de indivíduos em colaboração. Estas duas facetas da 'definição' apresentada estão fortemente conotadas com as correntes que encaram a aprendizagem como um fenómeno social. Porém, os autores também colocam uma certa tónica no tipo de atividade cognitiva que o(s) indivíduo(s) empreende(m): uma forma produtiva de pensar sobre a situação existente. Esta 'forma produtiva de pensar' não só inclui o recurso a regras conhecidas ou a execução de certos procedimentos matemáticos como, na sua essência, está relacionada com uma observação de uma situação de um ponto de vista matemático – o que inclui ações como interpretar, descrever ou explicar (Lesh & Zawojewski, 2007, p. 782).

Lester (2013, p. 249), numa reflexão recente sobre a natureza da resolução de problemas matemáticos, encara-a como "uma atividade que requer que um indivíduo (ou grupo) se envolva numa diversidade de ações cognitivas, [em que] cada uma das quais exige algum conhecimento ou capacidade, e algumas das quais não são rotineiras", o que o autor considera uma "descrição útil". À semelhança de Lesh e Zawojewski (2007), esta abordagem também congrega fatores cognitivos e outros 'não cognitivos', conforme Lester designa, permitindo olhar para a resolução de problemas de matemática como uma atividade que requer o recurso a alguns conhecimentos e procedimentos matemáticos prévios e, necessariamente, a outros que não sejam rotineiros. Quer isto dizer que se para resolver um problema apenas for necessário utilizar um algoritmo ou procedimento conhecido, então não estamos perante um 'problema' nem a atividade desenvolvida pode ser considerada como 'resolução de problemas'. Na verdade, Lester retoma algumas das posições defendidas anteriormente, nomeadamente ao referir que o desempenho em resolução de problemas,

> parece ser uma função de várias categorias interdependentes de fatores, incluindo: aquisição de conhecimentos e controlo da sua utilização, crenças, afetos, contextos socioculturais, padrões implícitos e explícitos de produção de inferências, e facilidade com o uso de vários modos de representação (ou seja, simbólico, visual, oral, e cinestésico). (Lester & Kehle, 2003, p. 508).

E, mais concretamente, os mesmos autores especificam que o sucesso em resolução de problemas envolve uma conjugação entre esses fatores, nas suas palavras, "coordenar experiências anteriores, conhecimento, representações familiares e padrões de inferência, e intuição, num esforço para gerar novas representações e padrões de inferência" (Lester & Kehle, 2003, p. 510). A mobilização 'coordenada' – expressão que, na minha leitura, aponta para a existência de uma intencionalidade e estruturação – de experiências anteriores, conhecimentos matemáticos, representações, parece ser o motor que gera a criação de uma abordagem que permite superar o desconhecimento de estratégias ou representações de utilidade imediata para a obtenção da solução. Esta perspetiva vai ao encontro da ideia de resolução de problemas enquanto desenvolvimento de uma forma produtiva de pensar matematicamente, mas Lester e Kehle especificam aspetos particulares dessa atividade, nomeadamente, quanto à utilização de recursos cognitivos e não-cognitivos, de onde posso destacar a influência dos contextos socioculturais.

Uma visão distinta, oferecida por Lesh e Doerr (1998) e trazida à discussão por Zawojewski e Lesh (2003), é a de que a diferenciação entre os ‘problemas não-rotineiros’ e os ‘exercícios’ assenta na necessidade de no primeiro tipo de tarefa os alunos terem que “refinar / transformar / estender modelos conceptuais inicialmente inadequados (mas que evoluem dinamicamente) a fim de criarem interpretações ‘bem-sucedidas’ do problema” (Lesh & Doerr, 1998, citado por Zawojewski & Lesh, 2003, p. 318). Estes autores discutem ainda que esta perspetiva não encara a resolução de um problema como a procura de uma estratégia poderosa que faz a conexão entre *o que é dado* e *o que é pedido* (os *givens* e os *goals*), ambos bem especificados no enunciado – e que é um traço comum nos posicionamentos que inúmeros investigadores assumem sobre a natureza da resolução de problemas (e.g., Borralho, 1991; Lester, 1983; Mayer, 1985; Ponte, 2005; Schoenfeld, 1985, 1992a). Numa outra linha, a proposta de Lesh e Doerr (1998), retomada por Zawojewski e Lesh (2003), remete para a *interpretação* dos dados e dos objetivos como o aspeto fundamental que espoleta a necessidade de desenvolver um modelo conceptual da situação, ou seja, em vez de selecionar uma estratégia poderosa, os alunos têm que operar sobre a sua própria interpretação, têm que selecionar, aplicar ou criar procedimentos de forma cíclica ou iterativa, desenvolvendo assim a sua *abordagem*.

2.1.2 E se incluirmos a tecnologia como um recurso para resolver problemas?

Um problema matemático é, pois, uma tarefa para a qual o indivíduo que o pretende resolver não dispõe de um procedimento que lhe dê garantia imediata de encontrar a solução e para a qual será necessário desenvolver uma forma produtiva de pensar, ou seja, coordenar e associar experiências anteriores, conhecimentos, representações para montar uma abordagem que possa executar e seja potencialmente eficaz. Resolver um problema não se esgota nos procedimentos necessários para transformar os dados de forma a atingir o objetivo que é encontrar a solução, mas envolve também a produção de interpretações dessa solução que se constroem e se desvendam a partir do pensamento matemático desenvolvido. Uma tarefa pode constituir-se um verdadeiro problema para um indivíduo mas não o ser para outro, que pode conhecer uma técnica, um procedimento, uma ferramenta matemática, que consegue convocar para obter a solução com alguma segurança, independentemente do número de passos ou da sua complexidade.

A maior parte da literatura de referência que se debruça sobre a noção de problema e de resolução de problemas não inclui de forma manifesta ou suficientemente clara discussões em torno do papel das tecnologias na atividade de resolução de problemas matemáticos. Apesar de encontrar menções à utilização de 'ferramentas' para desenvolver uma abordagem os autores estão, de modo geral, a referir-se a uma técnica, um conceito, uma operação, um procedimento do campo matemático. Ao alargar a noção de 'ferramenta' para passar a considerar a possibilidade de recorrer a uma ferramenta tecnológica, como uma calculadora ou um *software*, surge de imediato a questão: o que se modifica nesta atividade? Uma tarefa matemática para resolver com papel-e-lápis que se considere um 'problema', continuará a constituir-se um problema caso se possa recorrer a um computador? A atividade empreendida continuará a ter traços de 'resolução de problemas'? E quanto ao sujeito que enfrenta o 'problema' e se envolve numa atividade de 'resolução de problemas', como o poderemos conceptualizar em termos da sua relação com as ferramentas tecnológicas?

Schoenfeld (2013) refere a dada altura:

> A pessoa que trabalhou sobre, e resolveu, um problema, não é a mesma pessoa que começou a trabalhar nesse problema. Ele ou ela abordará o problema seguinte sabendo mais do que antes. (Schoenfeld, 2013, p. 19-20).

Saindo por uns instantes da esfera da didática da matemática, é possível observar que o constante acesso a determinadas ferramentas tecnológicas, culminando nesta era de imersão num mundo digital, (quase) erradicou determinadas situações problemáticas das nossas vidas. E mais, a tecnologia que sustenta estes 'problemas antigos já resolvidos' aparece-nos agora bastante dissimulada, imperscrutável nalguns casos. Um exemplo de um problema que se colocou ao Homem desde os primórdios da civilização é o da localização precisa. Apesar de a observação do sol e das constelações ser uma técnica usada na Antiguidade para inferir a posição e a direção, os navegadores portugueses foram pioneiros no desenvolvimento de técnicas e tecnologias de navegação e identificação da posição relativa – o nónio e o quadrante náutico são exemplo de instrumentos de navegação desenvolvidos ou adaptados em pleno período dos Descobrimentos. Todavia, nos dias de hoje, o mais simples ou acessível telefone móvel traz incorporado um sistema de posicionamento integrado – o GPS. Mas é oportuno notar que os avanços da tecnologia despertam novos problemas e estes impelem novos avanços, sucessivamente. A investigação que mais recentemente se dedica à automação de veículos – terrestres, aéreos ou marinhos – colocou a descoberto novos problemas relacionados com a localização e o posicionamento. O sinal de GPS, que tantos problemas veio resolver à Humanidade, não é fiável no meio subaquático, no interior de edifícios, debaixo de viadutos ou pontes, pois nestas condições apresenta imprecisões grotescas que acarretam riscos para a sua utilização como referência. E assim, num movimento contínuo, a investigação nesta área foca-se naquilo que ainda não se consegue, propondo técnicas e ferramentas alternativas (e.g., Guerreiro, 2013) – e novo conhecimento.

Regressemos. Ao incluir a tecnologia como um ingrediente fundamental na atividade de resolução de problemas de matemática, e assim problematizar o que se entende por ‘resolver um problema com tecnologias’, o que se altera nos próprios processos de resolução de problemas? Que implicações traz a inclusão de uma ferramenta digital para a compreensão do problema? Para o estabelecimento de uma abordagem? Para a sua concretização? Para a comunicação do processo seguido ou da solução encontrada? E em relação ao que se considera uma solução de um problema, a sua natureza sofre alterações? Em que se distingue uma solução obtida por papel-e-lápis de uma obtida com o Excel ou o GeoGebra?

É curioso notar que Kantowski (1983) já apontava algumas vantagens do uso do ‘microcomputador’ no ensino da resolução de problemas, nomeadamente a da *interatividade*. Não só o microcomputador executaria cálculos complexos ou extensos, como o aluno poderia solicitar informação e responder ao que o computador pedisse, de onde a autora destaca a prontidão com que o computador classifica respostas corretas/incorretas. Aqui encontro traços da perspetiva, então contemporânea, do Ensino Assistido por Computador, embora pouco se vislumbre de ‘resolução de problemas’. Trinta anos mais tarde, ao revisitar o seu trabalho seminal, Schoenfeld (2013) regista numa secção com um título promissor – *Rethinking Technology (a.k.a. entering the 21st century* – a sua visão sobre o uso de tecnologias digitais:

> De igual modo, a presença de ferramentas computacionais – quer sejam calculadoras simbólicas, gráficas ou o Wolfram Alpha . . . – tem o potencial para reconfigurar radicalmente o conhecimento a que os estudantes *têm acesso nas* salas de aula de matemática, e as maneiras como podem *operar sobre* ele. (Shoenfeld, 2013, p. 31, *grifos meus*).

Nesta reflexão, Schoenfeld realça que o conhecimento matemático pode ser radicalmente reconfigurado mediante a presença de ferramentas computacionais. Todavia, a sua escolha de palavras deixa antever a sua perspetiva sobre o papel das tecnologias na aula de matemática e que se resume a facultar o *acesso* dos alunos ao conhecimento matemático (já radicalmente reconfigurado pela tecnologia) e a *operar* sobre esse conhecimento. O autor não desenvolve substancialmente estas duas ideias mas, admitindo que *aceder a* e *operar sobre* o conhecimento são aspetos fundamentais da aprendizagem em matemática, surge com naturalidade outra questão: e não será possível conceptualizar os alunos como *autores* de uma 'transformação radical do conhecimento ao qual acedem'? Neste excerto encontra-se uma visão dicotómica da aprendizagem com tecnologia: de um lado, o corpo de conhecimento matemático existente, exato, absoluto, inerte; do outro, o indivíduo que procura formas de lhe aceder ou operar sobre ele. Um pouco à semelhança da perspetiva de Kantowski, o papel das ferramentas computacionais é aqui simultaneamente valorizado – *radically reshape the knowledge* – e reduzido às funções de auxiliar, complementar, simplificar. E qual o papel do professor? E será que esta excentricidade do poder transformador do conhecimento matemático, conferido às ferramentas computacionais (não se podendo negligenciar o seu autor humano), poderia colocar em causa o próprio papel do professor na gestão da aprendizagem?

Constato, assim, que a literatura indicia que a introdução de uma ferramenta tecnológica digital na resolução de problemas de matemática provoca alterações profundas na atividade desenvolvida. Desde logo porque o tipo de tarefa que se pode considerar um 'problema' é variável na medida em que depende do sujeito que o quer resolver, isto é, das suas experiências anteriores (com problemas semelhantes, por exemplo), dos seus conhecimentos matemáticos, dos seus conhecimentos sobre a tecnologia que usar, dos seus conhecimentos sobre formas de representação de ideias matemáticas com a tecnologia, e até mesmo da sua intuição.

Esta problematização obriga a um olhar atento aos resultados da investigação desenvolvida nos últimos anos sobre resolução de problemas com tecnologias, com o propósito de compreender quais os avanços que estão relativamente firmes, as questões que estão ainda em discussão e, a partir dos estudos feitos, perspetivar o que não foi ainda investigado. Comecei por definir duas expressões-chave na pesquisa empreendida: i) resolução de problemas com tecnologias e ii) resolução de problemas para além da sala de aula. Em seguida, selecionei as fontes a consultar – revistas e atas de conferências de elevado reconhecimento no campo da Educação Matemática – e defini ainda uma janela temporal que compreende os últimos 10 anos (embora, nalguns casos, este intervalo de tempo se viesse a revelar insuficiente para captar algumas tendências). Na secção seguinte faço uma caracterização geral das tendências da comunidade de investigação sobre resolução de problemas de matemática.

2.2 Resolução de problemas de matemática enquanto campo de estudo

A existência de trabalhos de revisão do estado da arte, reconhecidos no seio da comunidade de investigação, leva-me a partir das constatações desses autores, pelo que procurei sumariá-las naquilo que considero relevante trazer para esta discussão. Comecei por recorrer a três revistas internacionais que dedicaram números temáticos à resolução de problemas de matemática: i) os dois volumes do número temático de 2005 do *The Journal of Mathematical Behavior*, com o título *Mathematical problem solving: What we know and where we are going*, editado por Jinfa Cai, Joanna Mamona-Downs e Keith Weber; ii) os números 5 e 6 do volume 39 da revista *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, editados por Günter Törner, Alan Schoenfeld e Kristina Reiss em 2007, e iii) os números 1 e 2 do volume 10 da revista *TME – The Mathematics Enthusiast*, editados por Manuel Santos-Trigo e Luis Moreno-Armella, em 2013. Na primeira subsecção apresento uma súmula destas publicações.

Em seguida procurei perceber os interesses mais recentes da comunidade de investigação sobre a temática da resolução de problemas de matemática. Uma vez que o processo de publicação de trabalhos científicos em revistas pode ser bastante moroso, e porque precisava de me inteirar o melhor possível das tendências atuais, resolvi alargar as pesquisas às atas de conferências e congressos internacionais. Assim, para além de recorrer às prestigiadas revistas *Educational Studies in Mathematics* e *ZDM*, recorri também às atas de encontros recentes do PME e do CERME.

Por fim, e porque me parece oportuno vincar de forma detalhada os contributos da equipa do Projeto Problem@Web, registo alguns dos resultados de investigação que decorreram do trabalho desenvolvido e que estão explicitamente relacionados com a resolução de problemas de matemática.

2.2.1 Espreitando os números temáticos sobre resolução de problemas

A edição *Problem Solving Around the World: Summing Up the State of the Art* inclui artigos que reportam a visão dos investigadores convidados sobre a investigação em resolução de Problemas nos seus países, a saber, Israel, França, Itália, Reino Unido, Holanda, Portugal, Alemanha, Hungria, China, Austrália, Singapura, Japão, Brasil, México, e Estados Unidos da América. Dessas, escolho duas contribuições: a de João Pedro da Ponte, que retrata o desenvolvimento da investigação em resolução de problemas que se havia levado a cabo até então em Portugal; e a de Manuel Santos-Trigo, por organizar e sumariar o panorama internacional e apontar pistas para o futuro da investigação em resolução de problemas de matemática, nomeadamente, no que concerne à utilização de ferramentas tecnológicas e digitais nesses processos.

Quanto à investigação sobre resolução de problemas em Portugal, Ponte (2007) relata o interesse dos investigadores nacionais neste tema durante a década de 80, inspirados pelo trabalho de Pólya e pelas publicações do NCTM, corporizado sobretudo através de estudos académicos. Reporta igualmente um gradual distanciamento desta temática que se veio a concretizar numa mudança de rumo bem vincada: a partir da década de 90 os investigadores nacionais passaram a interessar-se mais pelas atividades de exploração e investigação, que Ponte considera uma "abordagem particular da resolução de problemas" (p. 419). As orientações curriculares e os projetos influenciaram fortemente o rumo da investigação em Educação Matemática em Portugal, o que poderá explicar a transferência do interesse da resolução de problemas para as atividades de exploração e investigação. Aliás, por um breve período de tempo, os investigadores puderam ver transformados em orientações curriculares os resultados acumulados das pesquisas da comunidade. No entanto, parece que fica por explicar em que medida os resultados destes estudos reverteram para o campo da resolução de problemas, do seu ensino e aprendizagem, no qual as atividades de investigação se inscrevem.

No seu artigo, Santos-Trigo (2007) começa por identificar as questões de investigação centrais e os resultados que têm contribuído para o desenvolvimento da resolução de problemas como campo de estudo nos últimos 40 anos. O autor analisa uma diversidade de trabalhos, representando várias épocas, no que concerne aos temas que focaram, às metodologias que utilizaram e aos principais resultados a que chegaram. Nos anos 70 e início dos anos 80, as principais preocupações dos investigadores rondavam os aspetos que caracterizavam as tarefas de resolução de problemas, em particular, os que lhes conferiam dificuldade; as características dos alunos peritos a resolver problemas; ou a comparação entre os desempenhos de peritos e de novatos. É curioso notar que as abordagens metodológicas mais convencionais na década de 70 ainda se valiam das tradições quantitativas recorrendo a teste de hipóteses e análises de regressão estatística. Em termos de resultados relevantes, salienta-se o reconhecimento, por um lado, da importância das heurísticas na resolução de problemas e, por outro, da existência de diversas variáveis que influenciam as abordagens dos alunos como o conteúdo e o contexto dos problemas – as chamadas 'variáveis de tarefa'. Um pouco mais tarde, e até final dos anos 90, muitos estudos se lançaram na demanda de respostas para questões como a definição de pensamento matemático, o papel das heurísticas, o papel da metacognição, a influência dos afetos e das crenças na resolução de problemas. Os métodos de estudo deslocaram a sua tónica para uma perspetiva naturalista, recorrendo a entrevistas baseadas em problemas e a estudos de caso. Os resultados principais referem-se à identificação de categorias que explicam o desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas nos alunos.

De ora em diante, o investigador sublinha os aspetos que, na sua perspetiva, definem direções atuais e futuras para a pesquisa em resolução de problemas: qual a influência das tecnologias no raciocínio dos alunos durante a resolução de problemas, que alterações curriculares são necessárias para promover o uso de tecnologias na resolução de problemas, qual é o processo pelo qual os alunos transformam uma tecnologia numa ferramenta para resolver problemas, que quadros conceptuais explicam a construção de novo conhecimento matemático mediante o uso de tecnologias e como diferem dos quadros conceptuais em que os alunos resolvem problemas com papel-e-lápis (Santos-Trigo, 2007). Como principais resultados já consolidados aponta-se a distinção entre objeto e instrumento e a transformação de um objeto num instrumento através de uma apropriação, referindo-se sobretudo o processo designado por génese instrumental (Vérillon & Rabardel, 1995).

Na Introdução do número temático do *Journal of Mathematical Behavior*, intitulado *Mathematical problem solving: What we know and where we are going*, Cai, Mamona-Downs e Weber (2005) resumiram os seis artigos empíricos e os seis ensaios teóricos publicados. Quatro dos trabalhos empíricos dizem respeito ao papel do professor e ao impacto das suas ações na atividade de resolução de problemas dos seus alunos nas aulas de matemática. O artigo de Cifarelli e Cai (2005) desenvolve-se em torno de três questões de investigação que os autores já haviam abordado anteriormente e cujos resultados, perante novos dados e correspondente análise, são então confirmados e aprofundados. Em particular, debruçam-se sobre i) como os jovens estruturam e dão sentido às situações problemáticas; ii) como desenvolvem uma ideia inicial ou uma intuição numa conjetura ou objetivo; e iii) de que forma monitorizam e modificam as suas ações em situações de problemas abertos. De salientar que os autores estavam particularmente interessados na fase de exploração dos problemas, que consideram um processo recursivo na medida em que explicam a evolução das ideias iniciais através de cadeias de formulação e resolução de problemas. Consideram que é necessário explicar com mais detalhe as formas como as ações cognitivas influenciam as ações de definição de estratégias ou de monitorização.

Em três dos ensaios deste número temático discutem-se questões relacionadas com a resolução de problemas como atividade promotora de aprendizagem matemática e o seu lugar no currículo. Francisco e Maher (2005) reportam a sua reflexão, valendo-se de resultados de um estudo longitudinal em que procuram explicar como promover o raciocínio matemático na resolução de problemas. Apontam a existência de um conjunto de condições para que isso aconteça, nomeadamente reconhecendo "o papel de ideias elementares, de tarefas complexas, de variedades de problemas, da apropriação da atividade matemática por parte dos alunos, da justificação de ideias e ainda o trabalho colaborativo" (p. 371). Por outro lado, o ensaio de Mamona-Downs e Downs (2005) oferece uma reflexão sobre a identidade da resolução de problemas, em que os autores discutem a relação da resolução de problemas com o desenvolvimento de conceitos, a influência de outros campos na resolução de problemas e vice-versa, e ainda temas específicos para investigação futura em resolução de problemas. Nestes temas incluem-se: técnicas de resolução de problemas, aplicação de conhecimento matemático na resolução de problemas, trabalho durante a exploração do problema, leitura de textos matemáticos versus resolução de problemas. A partir da discussão, os autores indicam uma lista organizada de questões de investigação desafiadoras, de entre as quais: como é que se pode promover o desenvolvimento conceptual a partir de atividades de resolução de problemas; que processos permitem evidenciar conhecimento conceptual a partir da atividade de resolução de problemas; propor métodos matemáticos gerais relevantes para a resolução de problemas mas mais específicos que as heurísticas; desenvolver uma imagem unificada da exploração e investigar como o caráter especulativo da exploração interage com o caráter antecipador do controlo executivo; desenvolver modelos que expliquem os processos segundo os quais o conhecimento é acedido durante a resolução de problemas. A propósito desta última hipotética linha de investigação, os autores registam a sua tese de que possuir conhecimento matemático não é suficiente para resolver um problema, ou seja, é necessário possuir um "meta-conhecimento" que permita reconhecer as potencialidades de aplicação desse conhecimento na atividade de resolução de um problema em concreto (p. 389).

Não deixa de ser curioso notar que, apesar de diversos autores apontarem um decrescimento do interesse da comunidade de investigação pela resolução de problemas no virar do século (English, Lesh & Fennewald, 2008; English & Sriraman, 2010; Lester & Kehle, 2003), é possível encontrar na literatura recente sinais das mais diversas 'ondas' temáticas que surgiram no apogeu da investigação em resolução de problemas. Aliás, a pesquisa pela palavra-chave "resolução de problemas de matemática" nos últimos 10 anos devolveu uma enorme quantidade de artigos – o que também poderá ser um indicador da vivacidade do tema. Uma rápida leitura de uma parte dos trabalhos permite catalogá-los quanto ao seu âmbito mais específico, já que me interessa analisar com mais detalhe aqueles que se debruçam sobre a atividade de resolução de problemas com tecnologias.

Dos três volumes dedicados à resolução de problemas, o número temático da *The Mathematics Enthusiast* é o mais recente. Conta naturalmente com artigos de conceituados investigadores que se têm debruçado sobre o assunto, entre outros, Alan Schoenfeld, Richard Lesh ou Frank Lester. Os editores, Luis Moreno Armella e Manuel Santos-Trigo endereçaram um repto a um conjunto alargado de investigadores, de vários pontos do globo, para em conjunto refletirem sobre as tendências atuais na investigação em resolução de problemas e identificarem os resultados que mais influenciam as práticas dos professores e o *design* de currículos escolares. Identificaram três linhas temáticas: i) alicerces da investigação em resolução de problemas de matemática; resolução de problemas de matemática e as avaliações internacionais; e resolução de problemas de matemática e propostas curriculares.

Muito em particular, e possivelmente derivado das suas próprias áreas de interesses, os editores sublinham que os grandes avanços ao nível das tecnologias digitais levam a refletir sobre se a agenda de investigação atual está a ser ou precisa de ser transformada. Do seu ponto de vista, torna-se cada vez mais necessário considerar que "as ferramentas de mediação não são neutras, nem de um ponto de vista cognitivo nem epistémico", pelo que "o conhecimento que os alunos geram e/ou de que se apropriam está interligado com essas ferramentas" (Moreno-Armella & Santos-Trigo, 2013, p. 4), perspetivando ainda que o acesso e o uso de tecnologias digitais, tanto dentro da sala de aula como em ambientes extraescolares, está a alterar a forma como se entende a aprendizagem da matemática através da resolução de problemas.

Os 18 artigos deste número dedicam-se à resolução de problemas de matemática, cobrindo os vários níveis de escolaridade, desde os primeiros anos ao ensino universitário; focando o ponto de vista dos alunos e das aprendizagens matemáticas, o ponto de vista dos professores e do ensino, e ainda o desenvolvimento profissional ou a aprendizagem de futuros professores; discutindo também a resolução de problemas em relação com outras temáticas de investigação: a visualização e o afeto, os aspetos do raciocínio matemático como a prova ou a demonstração, ou outros mais ligados com questões de natureza curricular como o desenvolvimento de um currículo específico baseado na aprendizagem orientada pela resolução de problemas, o ensinar a resolver problemas e, naturalmente, o uso de tecnologias digitais na resolução de problemas. Dada a sua pertinência e relevância para este trabalho, alguns destes artigos serão retomados adiante, tanto neste capítulo (e.g., Barrera-Mora & Reyes-Rodriguez, 2013) como no capítulo seguinte em que desenvolvo e aprofundo um quadro conceptual de suporte a este estudo (e.g., Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013).

2.2.2 Tendências recentes na investigação com/sobre resolução de problemas

Nesta secção apresento, de forma um pouco telegráfica, uma seleção de estudos que a comunidade internacional de Educação Matemática tem discutido nos anos mais recentes. O propósito é captar tendências recentes, isto é, os interesses dos investigadores, as temáticas associadas, bem como os resultados que vão colocando à discussão.

Čadež e Kolar (2015) estudaram os processos de raciocínio de futuros professores dos anos iniciais quando lhes eram propostos problemas matemáticos e analisaram os tipos de generalização usados pelos participantes. Goizueta, Mariotti e Planas (2014) propuseram sessões de resolução de problemas a alunos de 9.º ano organizados em pequenos grupos, seguidas de discussões coletivas, com o propósito de estudar a procura de um modelo para descrever a situação problemática, e assim resolver o problema, bem como a justificação da validade desse modelo. Leikin e Lev (2013) analisaram a relação entre a criatividade matemática, perícia matemática e a os alunos talentosos e geniais recorrendo a problemas matemáticos especialmente desenhados para o efeito e que as investigadoras designam por 'tarefas de solução múltipla'. Morais e Serrazina (2013) recorreram à resolução de problemas de subtração com o propósito de compreender quais as estratégias de cálculo mental que os alunos usam e de que forma as situações de adição e subtração presentes nos problemas influenciam esse cálculo mental. Che, Wiegert e Threlkeld (2012) analisaram padrões nas estratégias escritas de resolução de problemas que envolviam raciocínio proporcional, de rapazes e de raparigas que frequentam turmas diferenciadas e portanto o foco do trabalho residia em associar as estratégias desenvolvidas ao género dos alunos. Lange (2012) analisou os tipos de cooperação entre estudantes de 5.º ano ao resolver problemas num clube de matemática.

Vários investigadores usam situações de resolução de problemas para estudar questões relacionadas com a aprendizagem em temas específicos: números e operações (Fritzlar & Rink, 2014; Huang, 2012, 2014), proporcionalidade (Hino, 2012; Silvestre & Ponte, 2011), geometria (Fujita, Jones, Miyazaki, 2011; Panaoura, Deliyianni, Gagatsis, Elia, 2011), ou estatística e probabilidades (Garfield, Le, Zieffler & Ben-Zvi, 2014; Lee & Yang, 2013). Alguns investigadores têm canalizado os seus interesses da psicologia da educação matemática aproximando-a de campos como a neurociência – é o caso de Leikin, Waisman, Shaul e Leikin (2014). Estes autores estudaram a atividade cerebral de rapazes adolescentes enquanto resolviam problemas curtos que envolviam noções algébricas ou geométricas. Com base nos seus resultados, observaram que a resolução de problemas algébricos ou geométricos está associada a diferentes padrões de atividade cerebral, de onde extrapolam a necessidade de adaptações didáticas específicas para o ensino da álgebra e outras para o ensino da geometria.

No que concerne à compreensão dos processos de resolução de problemas, vários estudos ao longo dos últimos 40 anos mostraram que o ensino de heurísticas não conduz necessariamente a uma melhoria significativa da capacidade de resolver problemas (Begle, 1973; Charles & Lester, 1984; Lesh & Zawojewski, 2007), nem influencia a aprendizagem da matemática (Cai, 2010). Todavia, as heurísticas na resolução de problemas continuam a ser foco de inúmeras pesquisas na atualidade. Por exemplo, Brockmann-Behnsen e Rott (2014) desenvolveram um estudo longitudinal em que propuseram o ensino e treino de heurísticas em tarefas de resolução de problemas especialmente desenhadas para desenvolver competências argumentativas. Concluíram que os alunos que eram envolvidos nesse tipo de trabalho obtiveram significativamente melhores resultados após o treino de que os jovens do grupo de controlo. Reiss, Heinze, Renkl e Groß (2008) também procuraram explorar o papel das heurísticas, nomeadamente ao estender a noção de 'exercício resolvido' e propondo o recurso a exemplos de problemas resolvidos com heurísticas de forma a promover a aprendizagem da argumentação e demonstração. Os investigadores concluíram que esta forma de trabalhar foi mais eficiente do que a instrução habitual na medida em que os alunos com menos competências na demonstração beneficiaram dos exemplos resolvidos em que podiam aperceber-se da natureza heurística deste processo, melhorando os seus resultados e passando a explicar o processo seguido nas demonstrações.

Desta ainda breve incursão por estudos recentes, emerge uma impressão global de que estes resultados estão a potenciar avanços no conhecimento que se situa no campo da Educação Matemática, cruzando-se de forma oportuna e relevante com a resolução de problemas mas apenas enquanto proposta de trabalho que gera ou promove o fenómeno que se pretende observar em cada um desses estudos, ou seja, que não é do âmbito da resolução de problemas de matemática enquanto campo de estudo. Dado que o propósito desta investigação se centra na atividade de resolução de problemas com a utilização de ferramentas tecnológicas, independentemente do conteúdo matemático que cada problema encerre, tive que refinar a pesquisa bibliográfica. Passo, de seguida, a reportar alguns resultados do trabalho produzido pela equipa de investigadores do projeto Problem@Web onde a minha própria investigação cresceu.

2.2.3 Investigação realizada no âmbito do projeto Problem@Web

Conforme mencionei na Introdução, esta investigação desenrolou-se no âmago do projeto Problem@Web e em estreita colaboração com os investigadores que integraram a sua equipa. Assim, sinto que é oportuno reportar os principais resultados alcançados pelos colegas investigadores em torno das três linhas de investigação desenvolvidas com foco na resolução de problemas de matemática no contexto das competições SUB12 e SUB14.

Relativamente ao trabalho desenvolvido na linha de investigação que se debruça sobre criatividade na resolução de problemas, existiu uma preocupação em assumir uma perspetiva que se afasta da corrente que vem existindo na literatura e que analisa a criatividade de jovens especialmente talentosos em matemática. A investigação de Amaral e Carreira (2012, 2014) reconhece a natureza inclusiva destas competições bem como a pertinência em estudar a criatividade matemática que os participantes manifestam nas suas produções, independentemente do seu grau de sucesso na disciplina de matemática. Perante a inadequação dos quadros teóricos que procuram explicar o fenómeno da criatividade matemática – em jovens talentosos – os autores desenvolveram um quadro de análise que considera diversas dimensões da criatividade matemática nas abordagens destes jovens de 10-12 anos enquanto resolvem os problemas da competição e exprimem as suas soluções. Para além de identificarem indicadores do *raciocínio matemático criativo* destes jovens (originalidade, fluência e flexibilidade) e respetivos descritores, os investigadores também se debruçaram sobre o papel das ferramentas digitais na criatividade encontrada nesta atividade de resolução de problemas.

No que concerne à linha de investigação sobre as atitudes e afetos relativos à matemática e à resolução de problemas matemáticos, Carreira, Ferreira e Amado (2013) discutiram o papel de algumas das características das competições SUB12 e SUB14 que as tornam inclusivas no sentido de envolverem os participantes na resolução de problemas matemáticos durante um período de tempo relativamente extenso. Caracterizaram os problemas das competições, desenvolvendo a noção de *desafio matemático moderado*, isto é, um problema autêntico mas cuja complexidade ou dificuldade não interfere com o gosto dos participantes, nem com a sua persistência na procura de uma solução. Em Amado, Ferreira e Carreira (2014) e Amado, Carreira e Ferreira (2016) as investigadoras debruçaram-se sobre as conceções dos participantes e identificaram ideias distintas muito vincadas sobre a 'matemática escolar' (associada a visões tradicionais do que é ensinar e aprender matemática) e a 'matemática dos campeonatos' (que revela as suas perceções sobre o papel da matemática no mundo dos dias de hoje). Estudaram ainda outros aspetos das questões afetivas, tais como a relação entre a procura de ajuda para resolver os problemas e as dificuldades sentidas pelos participantes, ou os sentimentos aquando da publicação das produções na página dos campeonatos, ou ainda a forma como essa publicação estimula "um maior investimento na expressão da solução e do processo de resolução" (Amado, Ferreira & Carreira, 2014, p. 90).

Na sua *regular lecture*, no ICME 12, Susana Carreira apresentava já algumas das ideias basilares no que ao papel das tecnologias digitais na resolução dos problemas dos campeonatos diz respeito. Mais concretamente, focava a sua palestra nas estratégias de resolução, nos modos de representação e expressão do pensamento matemático e no uso de tecnologias nessa atividade. Carreira (2015) recorreu a dois problemas de covariação (tempo-distância) para ilustrar a natureza das representações que os jovens encontram quando as tecnologias digitais se transformam em ferramentas naturais para exprimir o pensamento matemático, ou seja, os modelos das situações são recriados e materializados através de narrativas mediadas por representações digitais. Este discurso matemático digital expositivo torna-se então parte integrante do processo de resolução de cada problema e pode incluir particularidades como o uso da cor, linguagem natural, linguagem matemática, desenhos, fotos, ícones, diagramas, etiquetas, símbolos, tabelas, caixas de texto, *outputs* de programas específicos, tal como folhas de cálculo, programas de geometria dinâmica, entre outros. Carreira (2015) discute ainda como os modelos subjacentes a cada resolução, para além de incluírem expressões matemáticas, tal como expectável, dão também a conhecer a forma como o problema foi interpretado e permitem fazer uma reconstituição dos processos desenvolvidos no decurso da produção da solução.

Na mesma vertente, a investigação de Sandra Nobre debruça-se sobre a resolução de problemas com a folha de cálculo como forma de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 3.º ciclo. O seu estudo tem uma forte componente de sala de aula, pelo que foi uma mais-valia para este projeto. Em Nobre, Amado, Carreira e Ponte (2011) e Nobre, Amado e Carreira (2012) são analisadas resoluções de problemas que poderiam ser resolvidos por métodos formais mas em que os estudantes recorrem à folha de cálculo para obter a sua solução, provavelmente devido ao facto dessas técnicas estarem para além do seu conhecimento. Embora identifiquem a ausência de notações e métodos formais no trabalho dos alunos, os investigadores concluem que o tipo de pensamento que emerge da utilização da folha de cálculo se inscreve num tipo de atividades algébricas mais amplas. Observaram que a folha de cálculo suporta a materialização e compreensão das condições presentes nos enunciados dos problemas, sendo que os alunos encontram formas de representação de condições através de variáveis-coluna o que lhes permite resolver estes problemas algébricos, que têm um elevado nível de complexidade. Fazendo uma distinção entre notação algébrica e estruturas algébricas, os autores afirmam que o recurso à folha de cálculo pode ser usado para minimizar a lacuna que pode existir entre o desenvolvimento do pensamento algébrico e o uso de notações algébricas formais.

Nobre e Amado (2013) compararam o uso da folha de cálculo e o uso do papel-e-lápis na aprendizagem do método de substituição para resolver sistemas de equações, tendo por base a resolução de problemas algébricos. As autoras observaram que a identificação de variáveis, a transposição de condições e a identificação da solução numérica através do trabalho com a folha de cálculo constituem importantes experiências basilares para a aprendizagem do método de substituição com papel-e-lápis em que os alunos recorrem à linguagem algébrica embora lhe atribuam o significado encontrado através de métodos informais na folha de cálculo. Concluíram que existe uma grande proximidade entre os métodos informais que os alunos desenvolvem na folha de cálculo para resolver os problemas e o recurso a um método formal com papel-e-lápis.

Jacinto, Nobre, Carreira e Amado (2014, no prelo) discutiram o papel das tecnologias digitais na resolução de problemas e na comunicação da solução, como uma atividade síncrona de matematização de cada situação problemática e a correspondente expressão do pensamento matemático. Analisando os modelos conceptuais desenvolvidos durante a resolução-e-expressão de dois problemas dos campeonatos SUB12 e SUB14, respetivamente com o uso do GeoGebra e do Excel, identificaram diferentes níveis de sofisticação e robustez das abordagens desenvolvidas. As investigadoras procuraram explicar a atividade simultânea de 'resolver-e-exprimir com tecnologias digitais' e o 'desenvolvimento dos modelos conceptuais', por um lado, com o tipo de co-ação registada e, por outro, com o reconhecimento das possibilidades de ação com as ferramentas. Identificaram ainda diferentes níveis de sofisticação dos modelos conceptuais desenvolvidos com a mesma ferramenta para resolver um mesmo problema.

Já num trabalho mais exaustivo, Carreira, Jacinto, Nobre e Amado (2014) e mais recentemente Carreira, Jones, Amado, Jacinto e Nobre (2016) consolidaram os resultados da investigação realizada em torno do uso de tecnologias na resolução de problemas nestas competições. Além de retratarem o contexto, com base empírica, desenvolveram um quadro teórico suportado numa extensa revisão da literatura em que propõem algumas noções teóricas que visam suportar as particularidades da resolução de problemas com tecnologias que decorre nas competições. Em concreto, tendo já constatado que os processos de matematização e de comunicação do pensamento matemático decorrem em simultâneo, sobretudo quando essa atividade é suportada por tecnologias digitais, aprofundaram do ponto de vista teórico a noção de *resolver-e-exprimir problemas.* Os autores analisaram as produções de um conjunto diversificado de participantes que fizeram uso de diferentes ferramentas digitais, para discutir as diversas abordagens que os jovens desenvolvem para encontrar as soluções de vários problemas colocados na competição SUB14 bem como as formas de as comunicar, com as ferramentas tecnológicas que têm ao seu dispor, quer no dia-a-dia, quer na sala de aula. Os capítulos que apresentam dados empíricos mostram que os jovens desenvolvem diferentes modelos conceptuais para abordar um mesmo problema com uma determinada tecnologia digital, o que está relacionado com a perceção das potencialidades de ação com essa ferramenta.

Este resumo dos estudos realizados nas diversas vertentes do projeto Problem@Web desvenda, por um lado, a complexidade da atividade de resolução de problemas de matemática em que os participantes nas competições se envolvem e, por outro, a igualmente complexa teia de relações entre as várias perspetivas de investigação que se debruçaram sobre essa atividade. Não sendo possível capturá-las nos seus detalhes neste trabalho e sobretudo porque o âmbito do meu estudo se encontrava relativamente bem delimitado no projeto, recorrerei a estes outros conhecimentos sempre que oportuno. Todavia resolvi incluir nesta secção – de revisão da literatura – algumas das publicações em que colaborei, uma vez que foram desenvolvidas em paralelo ao estudo que aqui apresento e resultam da minha estreita colaboração com os demais investigadores desta equipa. Diversas destas ideias serão posteriormente aprofundadas e ilustradas com os dados que recolhi no decurso da implementação da abordagem que defini para investigar o fenómeno ‘atividade de resolução de problemas com tecnologias digitais’.

2.3 Resolução de problemas de matemática com tecnologias

Para construir uma imagem assertiva desta problemática, importa analisar os estudos que abordaram especificamente atividades de resolução de problemas com tecnologia, do ponto de vista do ensino mas sobretudo da aprendizagem da matemática. A intenção é identificar os principais resultados que a investigação em didática da matemática tem produzido a este respeito. Assim, proponho-me assinalar os aspetos que já foram bastante investigados, os que continuam a ser alvo de interesse e ainda aqueles que não estão suficientemente explorados mas emergem como relevantes das investigações realizadas.

À medida que o foco da pesquisa de termos ou palavras-chave se foi afunilando, com uma especificidade cada vez maior, comecei a sentir necessidade de diversificar as fontes de consulta. Por isso, os trabalhos analisados e sintetizados nas próximas secções proveem de uma seleção de revistas internacionais (e.g., *Computers & Education*; *Educational Studies in Mathematics*; *International Journal of Computers for Mathematical Learning*; *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*; *International Journal of Science and Mathematics Education*; *Journal of Mathematical Behavior*; *Mathematics Education Research Journal*; *The Montana Mathematics Enthusiast*; *ZDM*); de uma seleção de artigos publicados em atas de congressos internacionais (e.g., CERME; ICME; ICTMT; MERGA; PME) e ainda de investigação publicada sob a forma de capítulo de livro ou de livro.

Antes, um breve apontamento. A expressão 'tecnologias digitais', quando aplicada aos contextos de ensino e aprendizagem da matemática, apresentou-se como demasiado vaga para ser útil a uma pesquisa bibliográfica como a que delineei. Na verdade, o termo tem uma abrangência imensa: ao usar essa expressão poderia estar a referir-me a uma interface física (uma calculadora, um sensor de movimento, um computador) ou a um programa informático (um *applet*, uma folha de cálculo, um programa de geometria dinâmica, um jogo, um editor de funções). Na verdade, os participantes na competição SUB14 utilizam uma grande diversidade de 'tecnologias digitais', algumas das quais não seriam reconhecidas de imediato como 'ferramentas matemáticas' ou com potencial para desenvolver atividades matemáticas. Desse modo, optei por não restringir a revisão da literatura a uma ferramenta ou um conjunto de ferramentas, embora a seleção feita não pretenda fazer jus à quantidade de estudos que se debruçam sobre a resolução de problemas com uma certa tecnologia, mas à diversidade de tecnologias que lhes servem de suporte. Com esta pesquisa e consequentes leituras pretendo captar os interesses dos investigadores relativamente ao estudo de certos tipos de ferramentas tecnológicas na resolução de problemas, mapear os principais resultados que têm surgido desses estudos e identificar aspetos relevantes que daí emergiram e podem vir a ajudar-me a circunscrever o fenómeno que estou a estudar.

2.3.1 Estudos sobre resolução de problemas com calculadoras gráficas

As calculadoras foram o alvo de inúmeras pesquisas realizadas nas décadas finais do século XX, dado que eram o apanágio da introdução de tecnologias nas aulas de matemática, um pouco por todo o mundo (e.g., Drijvers & Doorman, 1996; Ruthven, 1990; Yerushalmy, 2000). Embora, nos últimos anos, a atenção dos investigadores tenha recaído sobre as potencialidades gráficas ou o cálculo algébrico simbólico (CAS) de calculadoras mais avançadas, friso uma certa dificuldade em encontrar estudos recentes sobre o uso de calculadoras na resolução de problemas, nas fontes pesquisadas.

Num estudo que combina diferentes tipos de tecnologia, associados com a calculadora gráfica, Doerr e Zangor (2000) investigaram o papel, conhecimento e crenças de um professor de matemática; como os alunos usaram a calculadora gráfica para auxiliar as suas aprendizagens matemáticas; a relação e interações entre o papel do professor, o seu conhecimento e crenças, e o uso da calculadora gráfica pelos alunos na sua aprendizagem; e as limitações e constrangimentos da calculadora gráfica na prática de sala de aula. O tipo de trabalho que foi proposto aos alunos consistia em problemas de modelação para serem abordados num ambiente tecnologicamente rico, isto é, em que os alunos combinavam diversas ferramentas tecnológicas, nomeadamente, calculadora gráfica, sensores de movimento, temperatura e pressão, e programas de computador. As investigadoras observaram cinco padrões de uso da calculadora gráfica: i) como ferramenta de cálculo de expressões numéricas, estimação e arredondamento; ii) como ferramenta de transformação da natureza da tarefa; iii) como ferramenta de recolha e análise de dados; iv) como ferramenta de visualização; e iv) como ferramenta de verificação e confirmação de conjeturas. Fazem ainda notar que a calculadora não foi considerada pelos estudantes como a fonte de autoridade nas aulas, o que atribuíram ao trabalho que o professor desenvolveu no sentido de assentar as decisões em argumentos e justificações matemáticas. O uso da calculadora permitiu ampliar o âmbito de determinadas tarefas levando os alunos a explorar propriedades globais, em vez de locais, como seria com papel-e-lápis.

Observaram ainda que o foco no uso da calculadora para calcular se transformou num uso para interpretar. É interessante notar que os instrumentos de recolha de dados não só potenciaram que os alunos modelassem matematicamente um fenómeno físico, mas ainda que fossem capazes de usar estas tecnologias para ajustaram a realidade a um modelo esperado, através de ciclos de interpretação dos dados que iam sendo recolhidos. Enquanto ferramenta de visualização, a calculadora permitiu desenvolver estratégias visuais de ajuste de parâmetros para encontrar equações que justifiquem determinados conjuntos de dados, definir janelas de visualização adequadas ao problema, relacionar a representação visual com o fenómeno físico e ainda resolver equações. Apesar de o professor ter discutido todos os métodos que podiam ser usados para resolver equações, incluindo o comando "*solve*", muitos alunos preferiam usar a abordagem gráfica pois envolvia menos cálculos mas permitia-lhes uma melhor interpretação da solução. Relativamente às limitações do uso da calculadora gráfica, as investigadoras concluíram que existiram duas: por um lado, alguns alunos usavam a calculadora como uma 'caixa negra' sem interpretar a situação problemática e, por outro, o uso 'privado' – individual e não partilhado – da calculadora fazia não só com que as interações de grupo deixassem de fluir, como cada aluno continuava a explorar possíveis soluções, mas interpretando e refinando o seu próprio pensamento.

No âmbito do projeto e-CoLab, Artigue e Bardini (2010) descreveram a apropriação pelos alunos e professores da calculadora TI-Nspire no âmbito da resolução de problemas e focaram-se na relação entre o desenvolvimento de conhecimento matemático e a génese instrumental, ilustrando-a em duas vertentes: como os professores gerem essa relação e como os alunos a vivenciam. Os investigadores observaram, por exemplo, que os alunos tinham tendência para recorrer a ficheiros produzidos a propósito de problemas anteriores. Todavia, essa escolha envolvia uma certa habilidade em percecionar quais as semelhanças e as diferenças entre os vários tipos de problemas a fim de escolher o ficheiro mais apropriado. Apesar disso, quando os alunos conseguiam obter um ficheiro adequado, tornava-se necessário estabelecer correspondências entre os novos dados e variáveis e compreender de que forma se refletiam na sintaxe específica da calculadora. Concluindo que existe uma interligação entre a matemática e a instrumentação, os investigadores sublinham que não se deve olhar para a matemática e para a tecnologia como domínios disjuntos e, portanto, o papel da tecnologia não deve ser reduzido a simples conversões entre os diferentes sistemas de representação. Além disso, os investigadores observaram que a relação entre os "diferentes instrumentos pertencentes ao espaço matemático dos alunos" (p. 1179) é sofisticada e que a sua combinação é motivada por práticas que poderão ter desenvolvido fora da escola.

Persson (2013) estudou o uso da calculadora gráfica TI-Nspire por 133 alunos do ensino secundário ao longo de alguns meses, com foco nos tópicos de álgebra e funções e em especial em tarefas de resolução de problemas. A investigação visava identificar as aptidões desenvolvidas pelos alunos quanto à utilização da TI-Nspire para resolver problemas e explorar tarefas matemáticas durante um período significativo de tempo e ainda exemplificar o desenvolvimento da génese instrumental e da génese documental durante o projeto. Os alunos tiveram oportunidade de trabalhar com problemas de três graus de complexidade, mas podiam recorrer quer à calculadora, quer ao emulador[8] de calculadora para computador. Apesar de algumas funcionalidades do *software* serem novas para os alunos, o investigador observou que as dificuldades encontradas pareciam estar mais relacionadas com os conhecimentos matemáticos necessários à resolução dos problemas. Relativamente aos métodos de resolução dos problemas, concluiu que enquanto uns alunos recorriam mais ao cálculo algébrico simbólico (CAS) na TI-Nspire, outros alunos preferiam desenvolver soluções gráficas. As diferenças são explicadas pelo facto de os vários professores envolvidos no estudo terem permitido, ou não, a utilização dessa funcionalidade nas suas salas de aula ao longo do estudo. Outro aspeto referido pelo investigador diz respeito à qualidade das explicações escritas que acompanhavam as resoluções dos problemas: enquanto os estudantes que usaram as calculadoras registavam explicações muito breves e incluindo expressões matemáticas, tal não se verificou nos que tinham tido a possibilidade de recorrer ao emulador no computador. Do ponto de vista das perceções dos intervenientes, a calculadora gráfica não só permitia uma maior rapidez e precisão na resolução das tarefas, como potenciava uma maior diversidade de formas de representação. Por fim, o investigador considerou que os alunos com menor desempenho encontravam mais dificuldades no uso do cálculo algébrico simbólico e que apenas uma pequena quantidade de jovens era efetivamente capaz de tirar o melhor partido dessa potencialidade deste tipo de super-calculadoras.

Partanen e Kaasila (2015) estudaram e descreveram os processos de negociação e produção de normas sociomatemáticas relevantes aquando da introdução de um tipo de trabalho inovador na aula de matemática: trabalho de grupo com problemas de investigação relacionados com os conteúdos de cálculo no ensino secundário em que os alunos usaram a calculadora TI-92. Apesar de este estudo não ser especificamente focado na influência da calculadora nos processos de resolução de problemas, alguns resultados são particularmente interessantes. Fazendo notar que a calculadora possibilitou a utilização e desenvolvimento de diferentes abordagens aos problemas propostos, os autores discutem como os alunos e a professora negociaram várias normas sociomatemáticas, por exemplo, quando se envolvem numa investigação matemática,

[8] Um emulador é um programa de computador que simula as funções de um determinado ambiente (*software* ou *hardware*).

devem abordar a temática de forma criativa, isto é, produzir algo por si próprios, desenvolver significado para determinado objeto matemático ou mesmo criar um novo objeto matemático, dar sentido ao problema, desenvolver uma abordagem para encontrar a solução, pensar numa maneira de verificar a razoabilidade dessa solução. Ao invés de normas pré-estabelecidas, sobretudo sob influência dos vários anos de escolarização em que desenvolveram a crença de que só o simbolismo e a formalização eram admissíveis em matemática, os alunos passaram a reconhecer que também é aceitável usar métodos numéricos, gráficos ou mesmo a escrita de sumários durante a resolução dos problemas de investigação com a TI-92. Os investigadores observaram ainda que os alunos e a professora não estavam inicialmente habituados a justificar as suas afirmações matemáticas nos diálogos de sala de aula, pelo que as decisões eram baseadas na autoridade do professor ou do manual. Após a experiência de ensino, uma nova norma havia sido negociada: a justificação explícita em matemática deve basear-se em propriedades dos objetos matemáticos.

2.3.2 Estudos sobre resolução de problemas com programas específicos para o ensino

A pesquisa por trabalhos que incidissem sobre o uso de tecnologias na resolução de problemas de matemática devolveu diversos estudos em que foram utilizados programas ou aplicações especialmente desenhados e concebidos para esses estudos, ou outros já existentes mas que tinham, originalmente, outros propósitos.

Hurme e Järvelä (2005) estudaram a atividade colaborativa de resolução de problemas assistida por computador, numa experiência que envolveu alunos do ensino secundário. O ambiente de aprendizagem disponibilizava um fórum *online* no qual os alunos discutiam os problemas e estratégias de resolução. As investigadoras analisaram os comentários colocados no fórum, a atividade de resolução de problemas e a atividade metacognitiva dos estudantes. Os resultados mostram que as discussões *online* fazem a mediação entre as questões dos alunos e o conhecimento matemático e que os jovens fazem uma co-regulação do pensamento, ou seja, usam conhecimento e fazem juízos de natureza metacognitiva durante as suas discussões no trabalho colaborativo *online*. Uma dificuldade identificada foi o facto de o fórum não permitir o uso de símbolos e a única forma de os incluir na discussão teve que ser através de uma imagem em anexo ao texto. Por um lado, esse problema talvez tivesse originado o pouco uso de símbolos matemáticos nas discussões mas, por outro, pode ter espoletado a necessidade de os alunos recorrerem a narrativas detalhadas dos seus pensamentos e processos para comunicar com os colegas, o que se tornou muito importante para a análise da atividade metacognitiva. Concluem as investigadoras que o trabalho colaborativo neste ambiente tecnológico contribuiu para que os estudantes fizessem uso dos seus conhecimentos matemáticos e tornassem visível o seu pensamento matemático.

Hwang, Chen e Hsu (2006) desenvolveram um estudo com foco na atividade de resolução de problemas de matemática em que alunos de 6.º ano, em Taiwan, recorriam a quadros interativos para resolver problemas que envolviam a divisão de frações. Foi desenvolvida uma aplicação para quadro interativo que combinava a possibilidade de os estudantes trabalharem colaborativamente na resolução de problemas, não só registando os seus processos escritos (recorrendo, por exemplo, a cálculos, esquemas ou outras representações) mas permitindo ainda proceder a uma gravação oral das suas explicações sobre a forma como pensaram e como procederam. Um dos propósitos desta investigação era compreender a satisfação percecionada pelos alunos relativamente à aplicação para quadro interativo e à comunicação entre pares proporcionada, examinando também o desempenho dos estudantes. Os resultados demonstraram que a maior parte dos jovens estava satisfeita com a facilidade de uso e a utilidade do quadro interativo, bem como com a comunicação entre pares e as discussões que se geravam sobre os tópicos matemáticos já que os professores os encorajavam a analisar e criticar os trabalhos desenvolvidos e registados pelos colegas. Os investigadores concluíram que os motivos dessa satisfação residem no facto de o sistema multimédia permitir que expressem os seus pensamentos, combinando texto, imagens e voz no quadro interativo. Outro dos fatores que mais contribuiu para o envolvimento dos alunos na resolução de problemas foi a possibilidade de desenvolverem essa atividade através de trabalho colaborativo. Observaram também que diversos alunos conseguem resolver corretamente alguns problemas mas as explicações que apresentam indicam que não compreenderam efetivamente a situação. Os autores salientam ainda que o desempenho das alunas é superior ao dos alunos sobretudo na qualidade das explicações verbais das suas soluções. Por estes motivos, recomendam que os professores solicitem explicações verbais das soluções encontradas, como forma de aferir se os estudantes realmente compreenderam as questões envolvidas na procura da solução dos problemas.

Yerushalmy (2006) estudou a resolução de problemas de palavras, envolvendo noções algébricas, com recurso a um programa de representação de gráficos que associava funções com equações e gráficos. No seu estudo, acompanhou uma turma desde o 7.º ao 9.º ano e comparou os métodos usados por alunos no grupo com pior desempenho em matemática e os que os alunos com melhores resultados desenvolviam. Descobriu que os alunos com menor desempenho recorriam à ferramenta para conseguirem ter uma perspetiva mais ampla sobre os problemas, para confirmar conjeturas ou ainda para realizar operações mais difíceis. Em relação às estratégias mais comuns, estes alunos evitavam recorrer ao formalismo típico da álgebra, mas procuravam resolver os problemas através de métodos numéricos ou representações gráficas. Apesar de esta e outras ferramentas tecnológicas terem estado sempre disponíveis para uso na sala de aula, a investigadora faz notar que os alunos com pior desempenho preferiam começar as suas abordagens aos problemas recorrendo ao papel-e-lápis, organizando dados numéricos ou escrevendo uma equação, o que contrastava com as atitudes dos alunos com melhores resultados. Por seu lado, os melhores alunos recorriam à ferramenta gráfica em momentos iniciais dos seus processos de resolução, para confirmar as suas ideias ou para completar as soluções que já tinham em desenvolvimento. No final da experiência de três anos, os alunos que inicialmente se encontravam no grupo de piores resultados já recorriam à ferramenta sempre que tal fosse encarado como potencialmente útil, ou seja, conseguiam percecionar se a ferramenta gráfica permitia relacionar a expressão e o gráfico com a situação problemática. Também de forma explícita, os alunos não recorriam à ferramenta gráfica quando o seu uso não fazia sentido no contexto de determinado problema. Yerushalmy concluiu que a ferramenta gráfica passou a integrar o raciocínio e a argumentação dos alunos na medida em que era usada para uma reflexão mais abrangente sobre as conjeturas elaboradas antecipadamente e para oferecer uma visão mais abrangente da situação problemática e da correspondente solução.

Num estudo focado na utilização de um *applet* para explorar e resolver um problema não-rotineiro, com múltiplas soluções, Lee e Hollebrands (2006) procuraram analisar as interações entre grupos de alunos de 8.º ano com determinadas características da ferramenta desenvolvida. O seu grande objetivo era perceber quando e de que forma os alunos utilizam as várias potencialidades do *applet* e se estas apoiam o processo de resolução do problema. As investigadoras organizaram as características da ferramenta em quatro subcategorias: as que o utilizador não consegue controlar e permanecem estáticas; as que são dinâmicas e por isso permitem ao utilizador manipular diretamente os objetos; as características dinâmicas que se atualizam para providenciar *feedback* ao utilizador durante a resolução do problema; e as que ativam partes do *applet* (p. 252). Adaptaram ainda as fases de resolução de problemas propostas por Schoenfeld (1985), de forma a investigarem padrões na utilização das características do *applet*, tendo considerado seis tipos de objetivos da atividade: análise, planeamento, implementação, avaliação, verificação e organização. Os resultados foram organizados em duas partes, sendo que uma se debruça sobre a atividade de resolução de problemas e o uso das características do *applet*, e a segunda assenta numa análise mais detalhada sobre a forma como essas diferentes características sustentam o trabalho dos alunos em cada um dos objetivos adaptados do modelo de Schoenfeld. O que é particularmente interessante é o facto de as investigadoras terem observado que, dos 4 pares de estudantes que integraram a experiência, 3 pares não recorreram a nenhuma das características da ferramenta quando se encontravam nas etapas *analisar* ou *planear*. Na verdade, estes alunos afastavam-se da ferramenta, focavam-se no enunciado e utilizavam recursos matemáticos para traçar um plano que mais tarde tentavam implementar com a tecnologia. Apenas um dos pares de alunos recorreu a alguma característica da ferramenta em todos os segmentos da etapa *analisar*. Em suma, Lee e Hollebrands (2006) concluíram que o *applet* permite o acesso a diferentes estratégias de resolução e diferentes representações que facilitam a atribuição de sentido ao problema; e discutiram como o *design* da ferramenta influencia a interação dos estudantes com essa tecnologia e, consequentemente, como influencia a aptidão dos jovens para compreender os conteúdos envolvidos bem como as suas capacidades de resolução de problemas.

Harskamp e Suhre (2007) estudaram a eficácia de um programa informático que funcionava como base de problemas matemáticos e, para cada problema, incluía um dispositivo de pistas desenvolvido com base no modelo de resolução de problemas de Schoenfeld (1985). Os investigadores procuravam compreender se os alunos do ensino secundário recorriam a essas pistas, em que momentos da resolução de um problema eram mais eficazes e, em última análise, se aquele programa informático contribuía para que os estudantes melhorassem as suas capacidades de resolução de problemas. Utilizando uma metodologia quase-experimental, com recurso a pré-teste-pós-teste com papel e lápis, observaram que os alunos recorreram às pistas fornecidas pelo sistema, em média, em 65% dos problemas propostos. Embora os alunos tenham recorrido com frequência às pistas nas fases de *análise* e de *planeamento*, quase metade dos estudantes não utilizou a opção ‘ferramenta’ incluída no conjunto de pistas referente à *exploração* e não procedeu à *verificação* da solução. As pistas fornecidas nas diversas fases tiveram eficácias também diversas, sendo que aquelas que estavam relacionadas com a abordagem (*planeamento*) e as que ofereciam *feedback* sobre a solução desenvolvida (*verificação*) foram as mais eficazes. Da análise do teste efetuado após o período experimental, os autores concluem que o programa teve grande influência na aprendizagem dos alunos a analisar os problemas e a encontrar uma abordagem correta para obter a solução. Como os alunos não resolveram os problemas, isto é, não desenvolveram atividade matemática, com o computador, diria que neste caso o principal papel da ferramenta é o de simultaneamente, ampliar o papel do professor no acompanhamento da atividade e fornecer feedback adequado, e dotar os estudantes de maior autonomia.

Num estudo que se debruça sobre os processos de verificação desenvolvidos por estudantes de 5.º e 6.º ano quando resolvem problemas não-rotineiros, Papadopulos e Dagdilelis (2008) oferecem uma comparação entre os ambientes digital e com papel-e-lápis. Estiveram disponíveis três ferramentas tecnológicas: o Cabri, um ambiente de geometria dinâmica, foi usado pelos alunos do 6.º ano; o MS Paint, um programa de edição de imagem da Microsoft, e o GeoComputer, um geoplano digital, foram usados pelos alunos de 5.º ano. Os investigadores caracterizaram os processos de verificação dos alunos de acordo com três categorias: i) estratégias empíricas, em que a visualização assume um papel de relevo; ii) estratégias numéricas, baseadas em cálculos ou na aplicação de fórmulas; e iii) estratégias idiossincráticas, ou seja, que revelam escolhas pessoais e indicam que o pensamento matemático desenvolvido não se baseia apenas na visualização. Cada categoria apresenta ainda subcategorias, sendo que opto por destacar apenas as que dizem respeito às últimas estratégias referidas atrás, a saber, verificações com base em a) copiar-colar; b) apagar-e-redesenhar; c) transformações; d) propriedades. Quando comparam a utilização dos programas informáticos, verificam que quanto mais potencialidades tem uma ferramenta, mais é usada em tentativas de verificação. A disponibilização destas ferramentas influencia não só a quantidade de verificações mas também a sua variedade. Aliás, quando excluem as estratégias visuais, os investigadores encontraram quatro tipos de processos de verificação no Cabri, dois no MSPaint e apenas uma no GeoComputer. Os autores observaram que, decorrente da sua experiência, os alunos faziam verificações, em média, o triplo das vezes que numa sala de aula tradicional. Concluíram que o recurso a ambientes computacionais espoleta o desenvolvimento de uma variedade de processos de verificação, o que não acontece na mesma medida com o papel-e-lápis; e ainda que o elemento visual é o que predominantemente mais influencia as escolhas dos alunos.

Chen e Hu (2013) investigaram a utilização de um *software* criado para elaborar mapas conceptuais com o propósito de auxiliar os alunos a analisar e a resolver problemas matemáticos através deste tipo de diagramas, e investigaram o impacto dessa ferramenta na capacidade de resolução de problemas dos jovens. Na experiência desenvolvida, duas turmas de alunos de 4.º ano em Taiwan foram ensinadas a usar a ferramenta para dissecar um problema em subproblemas, para raciocinar e resolver esses subproblemas mais simples, um a um, e identificar as relações entre os subproblemas de forma a sintetizar as respostas parciais e assim formar a resposta ao problema inicial. Utilizando uma metodologia mista de investigação, observaram que o grupo de alunos sujeitos a instrução com a ferramenta melhoraram significativamente o seu desempenho e que tal melhoria não dependia das capacidades matemáticas elementares pré-existentes. Concluíram que a ferramenta contribuiu para o desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas de estudantes que tinham diferentes níveis de conhecimento matemático. A vertente qualitativa da investigação permitiu-lhes perceber que os alunos com pior desempenho evidenciado no pré-teste não só tinham experiências negativas com a matemática, por um longo período de tempo, como se mostravam desanimados perante a ideia de aceitar novos métodos de aprendizagem e também novas tecnologias, recusando-se a reconhecer a sua potencial utilidade e, portanto, rejeitando a sua utilização na aprendizagem da matemática. Das entrevistas realizadas após a intervenção, os investigadores concluíram que a maioria dos alunos apreciou a utilização da ferramenta de construção de mapas conceptuais sobretudo no que toca à abordagem seguida pelos professores que os ensinaram a utilizar e a desenvolver um pensamento não linear com a ferramenta. Para além de valorizarem o que aprenderam a partir desta experiência em termos da utilização de mapas conceptuais na resolução de problemas, os alunos também referiram o aumento de confiança relativamente à sua capacidade de resolução de problemas similares.

2.3.3 Estudos sobre resolução de problemas com folha de cálculo

A utilização da folha de cálculo na aprendizagem da matemática é um tema de investigação que também conheceu tempos áureos no final do século passado, muito em particular no que diz respeito a atividades de investigação, de resolução de problemas ou de modelação. Todavia, o interesse dos investigadores parece ter-se concentrado nas potencialidades da folha de cálculo para a aprendizagem da álgebra (Haspekiam, 2005; Nobre, Amado & Ponte, 2015). Também interessante é o número temático da *Educational Studies in Mathematics* de 2014 (v.86, n.2) que contém várias experiências referentes ao conhecimento matemático desenvolvido em contextos de ensino vocacional com recurso à folha de cálculo, procurando compreender a transição da matemática escolar para o contexto do mundo laboral e vice-versa (e.g., Bakker & Akkerman, 2014).

Em 2004, Tabach e Friedlander investigaram as respostas de alunos de 7.º ano a problemas algébricos com a folha de cálculo, em três domínios: formulação de hipóteses, organização de dados e generalização algébrica de padrões. Os dados foram recolhidos no âmbito do projeto Compu-Math, baseado no uso de tecnologias para resolver problemas abertos referentes a todos os conteúdos programáticos do 7.º ao 9.º ano, pelo que esta pesquisa está mais relacionada com o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos do que com os seus processos de resolução de problemas. Os investigadores procuraram organizar as respostas segundo níveis de desempenho, mas os alunos não recorreram à folha de cálculo em todos os domínios categorizados, pelo que Tabach e Friedlander acabaram por definir esses níveis de desempenho apenas a partir do raciocínio matemático envolvido. À semelhança de estudos anteriores, concluíram também que a representação tabular na folha de cálculo permitiu que alunos de todos os níveis de desempenho conseguissem organizar dados. Relativamente ao domínio das generalizações, observaram ainda que a folha de cálculo impeliu os alunos a empregar estratégias para encontrar as soluções dos problemas que são consideradas ineficazes com papel-e-lápis. Mediante a análise da diversidade de respostas, Tabach e Friedlander (2004) concluíram que a folha de cálculo, enquanto ambiente de aprendizagem, proporcionou aos alunos oportunidades para seguirem diferentes percursos de génese instrumental, que variavam de acordo com o seu raciocínio algébrico e a sua perceção do que podiam fazer com a folha de cálculo.

Um outro estudo desenvolvido por Hong-chan e Hee-chan (2006) debruçou-se sobre a forma como um grupo de alunos do 10.º ano descobre regras subjacentes a uma certa situação problemática que envolve a evolução da concentração de cloro numa piscina, utilizando uma folha de cálculo. Os investigadores estavam ainda interessados em estudar os processos que conduzem os alunos à apresentação de justificações matemáticas para as suas observações. Concluíram que o Excel facilitou o processo de exploração e descoberta de regras e que, nessa fase, foi mais notória a interação dos estudantes com a folha de cálculo, sendo que o professor interveio menos. Apesar de os alunos serem capazes de representar as fórmulas de recorrência em papel-e-lápis, foi-lhes difícil compreender o significado do modelo algébrico subjacente. Por outro lado, a folha de cálculo permitiu-lhes manipular essas fórmulas e convertê-las em tabelas ou gráficos que mais facilmente podiam explorar. Além disso, estas representações na folha de cálculo passaram a funcionar como ferramentas conceptuais que os estudantes usaram para justificar as regras encontradas. Os investigadores registaram ainda que no decurso do processo de justificação o professor assumiu um papel mais ativo, pelo que a sua interação com os alunos ficou mais patente do que a interação entre os próprios alunos.

Calder (2007) investigou como alunos de 10 anos resolviam problemas com a folha de cálculo, em pequenos grupos, embora os problemas propostos acabassem por desencadear atividades investigativas. Através de vários episódios das investigações dos alunos, o autor identificou as tensões que surgiram quando as conceções dos alunos lhes sugeriam um resultado diferente daquele que a folha de cálculo devolvia, aquilo que o autor designa por ‘perturbações visuais’. A partir da análise de vários episódios em que ilustra diferentes aspetos do conceito, Calder concluiu que estas perturbações visuais vão influenciando as decisões que os alunos tomam ao longo do processo de resolução dos problemas pelo que as suas trajetórias de aprendizagem se adaptam em consonância. Em particular, estas perturbações visuais com origem nos *outputs* devolvidos pela folha de cálculo podem influenciar a atividade dos alunos, nomeadamente, levá-los a reformular as suas conjeturas, à renegociação de significados entre os membros do grupo, a solicitarem a intervenção do professor, ou até à tentativa de reconciliação entre o seu entendimento dos conceitos e o que observavam na folha de cálculo (o que remetia não só para um conhecimento matemático explícito como conhecimento sobre os aspetos técnicos da folha de cálculo, por exemplo, a sua sintaxe).

2.3.4 Estudos sobre resolução de problemas com ambientes de geometria dinâmica

Os ambientes de geometria dinâmica são ferramentas computacionais poderosas que permitem aos alunos construir e manipular objetos geométricos e explorar relações entre eles. Atualmente, muitos destes ambientes digitais congregam potencialidades que transcendem o campo da geometria, aliando a construção geométrica à correspondente representação algébrica ou incorporando uma folha de cálculo. Nos últimos anos tem surgido um número considerável de estudos que se debruçam sobre o impacto destas ferramentas na aprendizagem, tanto de conceitos como de processos matemáticos, em que os investigadores elegem como tarefas preferenciais problemas abertos ou não-rotineiros.

Christou, Mousoulides, Pittalis e Pitta-Pantazi (2005) desenvolveram uma investigação em que procuravam compreender de que formas futuros professores resolviam problemas num contexto de um ambiente de geometria dinâmica e de que forma o AGD apresenta oportunidades para formulação de problemas novos. Os investigadores observaram que o AGD permite que os estudantes adquiram novas informações sobre o problema ao arrastar objetos ou ao fazer medições, ajudando-os assim na compreensão das situações e acrescentando algum desafio à exploração das possíveis soluções. Concluíram que o arrastamento é uma ferramenta fundamental para resolver os problemas, mas que a medição é igualmente importante na verificação da correção das conjeturas. O AGD promoveu o uso de processos de modelação, de conjetura, de experimentação e de generalização na resolução de problemas, isto é, enquanto as imagens construídas no AGD permitiram um tipo de exploração que fez emergir conjeturas sobre as soluções, foi a experimentação que potenciou a confirmação ou rejeição das conjeturas e daí os alunos procuraram as soluções. Para além disso, concluíram que os processos de resolução de problemas envolvem processos de formulação de novos problemas. Por fim, os autores explicam que, enquanto uma figura construída no papel visa representar um caso geral, as figuras num AGD podem espoletar um conflito cognitivo quando os alunos se confrontam com casos especiais que emergem da manipulação da figura dinâmica e que causem essa surpresa.

A investigação de Baccaglini-Frank e Mariotti (2009, 2010) descreve os processos que podem ocorrer durante a formulação de conjeturas, a sua justificação ou demonstração num AGD, mas que as autoras consideram que estão relacionados com os esquemas desenvolvidos através do arrastamento de objetos durante a sua exploração. O modelo de conjetura sob manutenção do arrastamento (*maintaining dragging – conjecturing model*, no original) visa descrever os comportamentos dos alunos quando os esquemas de arrastamento são os adequados à formulação de conjeturas. Este modelo envolve: i) indução intencional de um invariante; ii) o invariante observado durante o arrastamento; iii) a descrição geométrica do trajeto; iv) a ligação condicional entre os invariantes. As investigadoras conjeturam que a utilização deste modelo para explorar situações geométricas com um AGD em sala de aula potenciará a ligação entre a formulação de uma conjetura e a sua efetiva demonstração.

Iranzo e Fortuny (2011) recorreram a um estudo de caso para investigar a influência do uso do GeoGebra por alunos do ensino secundário nas suas estratégias de resolução de problemas de geometria plana. Reconhecendo que um artefacto se pode tornar um instrumento diferente para diferentes utilizadores, os investigadores procuraram distinguir níveis de instrumentalização e instrumentação para os vários tipos de alunos que participaram no seu estudo, apresentando a seguinte categorização: autónomo, instrumental, procedimental, ingénuo. Os autores observaram que a maioria dos alunos recorreram às ferramentas algébricas e de medição, pelo que o uso do GeoGebra os ajudou na visualização dos problemas, na construção de múltiplas representações de conceitos geométricos, o que permitiu contornar dificuldades relacionadas com a manipulação algébrica, ou seja, o AGD promoveu o desenvolvimento do pensamento geométrico no contexto de cada situação problemática. O GeoGebra constituiu-se como uma ferramenta que sustentou a resolução dos problemas em termos visuais, algébricos e conceptuais, sendo que ao potenciar o percorrer de caminhos alternativos para resolver os problemas auxilia os alunos a aprofundar a sua compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Os investigadores apontam ainda que este AGD influenciou as estratégias de resolução dos alunos, embora essa influência aparentasse depender da natureza da própria tarefa e também dos estudantes, o que justifica a necessidade de investigação mais aprofundada.

Haug (2012) descreveu sumariamente um estudo com uma metodologia mista que envolveu 120 alunos que tralharam com um AGD para aprender técnicas de resolução de problemas, durante uma experiência de ensino. Numa fase introdutória, os alunos aprenderam a registar as suas aprendizagens seguindo um protocolo. Um pré-teste permitiu aferir o conhecimento dos jovens em relação a diferentes métodos de resolução de problemas, por exemplo, fazer conjeturas, identificar invariantes ou usar linhas auxiliares. Às quatro aulas de trabalho autónomo dos alunos, organizados em pares, resolvendo problemas com um AGD, seguiu-se um pós-teste. Seis meses mais tarde, os investigadores propuseram um outro teste aos jovens, incidindo sempre nas mesmas técnicas de resolução de problemas. Os resultados preliminares indicavam que os estudantes têm capacidade para adquirir técnicas básicas de resolução de problemas com o auxílio do AGD e que os jovens no grupo sujeito à intervenção foram capazes de documentar melhor os seus processos de resolução dos problemas.

Santos-Trigo, Camacho-Machín e Moreno-Moreno (2013) desenvolveram uma investigação com foco no trabalho de resolução de problemas matemáticos incluídos em manuais escolares num grupo de formação formado por investigadores, matemáticos, professores e futuros professores de matemática. Procuravam compreender que tipos de raciocínios exibe este grupo quando se recorre a programas dinâmicos para abordar aquele tipo de problemas. Concluíram que o uso da ferramenta digital promove a construção e a exploração dos modelos dinâmicos subjacentes a cada problema e que o raciocínio geométrico e visual complementam as abordagens mais formais. Mais, o arrastamento de objetos específicos que compõem um determinado modelo funciona como uma estratégia fundamental para identificar ou explorar invariantes ou relações matemáticas. Não só o programa desempenhou um papel relevante na conceptualização da tarefa como no desenvolvimento de uma postura inquiridora que ia além do reportar uma solução encontrada. O uso do AGD também potenciou uma análise gráfica das relações existentes que vieram a ser exploradas algebricamente. Os investigadores concluíram que a maior parte dos exercícios ou problemas rotineiros que surgem nos manuais escolares podem ser transformados para serem usados com esta ferramenta e assim levar os alunos a envolverem-se em verdadeiras atividades de resolução de problemas, ou seja, a construir modelos dinâmicos que possam servir de base para identificar e explorar diferentes abordagens. Recomendam ainda que os alunos tenham oportunidade de desenvolver as suas competências no uso de AGD através da experimentação e discussão de estratégias recorrendo às suas mais imediatas potencialidades: mover ou arrastar objetos, determinar áreas, comprimentos ou perímetros, discutindo diversas abordagens entre si.

Paiva, Amado e Carreira (2014) estudaram o papel do feedback que emerge das interações entre alunos em trabalho de pares na resolução de problemas de geometria com o GeoGebra e ainda o *feedback* que esta tecnologia lhes devolve durante esse processo. Recorrendo a um modelo de fases de *feedback*, os investigadores analisam as interações de um par de alunos – entre si e com o GeoGebra – durante a resolução de um problema. Observaram que a utilização do ambiente de geometria dinâmica alimentou um *feedback* contínuo e interativo que deu origem a um diálogo co-construtivo entre os alunos, isto é, a co-regulação teve origem no *feedback* entre o par e no *feedback* visual proveniente do computador. Um aspeto que sobressai é o facto de existirem fases do *feedback* que os investigadores não conseguem identificar a partir de expressões verbais nem de ações específicas, mas que associam às interações que decorrem no seio da tríade composta pelo par de alunos e o GeoGebra. Os investigadores concluem também que o *feedback* emergente dos vários tipos de interação pode potenciar o desenvolvimento de estratégias reativas, no caso em que os alunos ajustam ou reformulam a sua abordagem em consequência do *feedback* recebido, ou de estratégias proactivas, quando os alunos decidem explorar aspetos da figura que ainda não tinham sido analisados.

Existem também vários trabalhos sobre resolução de problemas com ambientes de geometria dinâmica que incidem sobre as práticas dos professores ou as aprendizagens de futuros professores. É o caso da investigação reportada por Barrera-Mora e Reyes-Rodriguez (2013). Estes investigadores desenvolveram um estudo sobre professores em início de carreira inscritos num mestrado em Educação Matemática que participaram num curso de resolução de problemas, em que também aprenderam a utilizar o programa Cabri-Geometry. O objetivo do estudo era identificar e analisar usos deste programa que pudessem levar os professores a desenvolver estratégias de resolução de problemas de otimização e a propor argumentos para justificar e validar as suas conjeturas. Os investigadores observaram que o programa permitiu que os professores desenvolvessem abordagens baseadas na observação da variação de atributos numéricos nas figuras, o que não seria possível com papel e lápis, visualizassem uma relação entre duas quantidades sem que tivessem sido analisadas algebricamente, estabelecessem a validade das construções através das ferramentas de medição, ou empregassem uma prova para obter uma solução exata e não apenas uma solução aproximada. Uma forte evidência foi o facto de os professores fundamentarem os seus raciocínios nas representações visuais e no dinamismo dessas representações, no qual assentou a formulação de conjeturas.

A equipa de investigadores concluiu que este *software* funcionou como um *reorganizador* do pensamento matemático, já que a "estrutura conceptual de quem resolve problemas pode ser estendida ao incorporar recursos da ferramenta enquanto a utiliza nos processos de resolução de problemas" (Barrera-Mora & Reyes-Rodriguez, 2013, p. 134). Isto sugere que a experiência de um indivíduo com uma dada tecnologia durante a atividade de resolução de problemas, tal como as potencialidades dessa ferramenta que são consideradas eficientes, podem ser incorporadas nos processos de pensamento matemático.

A investigação desenvolvida por Koyuncu, Akyuz e Cakiroglu (2015) também mostra que futuros professores de matemática desenvolvem estratégias diferentes para o mesmo tipo de problema geométrico, consoante a ferramenta que é disponibilizada: no caso de usarem papel-e-lápis, recorriam sobretudo a processos algébricos, enquanto ao usar o GeoGebra preferiam estratégias geométricas, apesar de no período de instrução que se antecedeu, as potencialidades algébricas do GeoGebra terem sido tão enfatizadas quanto as suas potencialidades geométricas. Uma das justificações apontadas é a de que estes estudantes estariam mais à vontade em resolver equações do que em explorar relações geométricas com o papel-e-lápis. Outro resultado interessante diz respeito às construções que os futuros professores realizaram com o GeoGebra e que os investigadores consideram terem ampliado a compreensão da estrutura lógica dos problemas, isto é, a necessidade de construir levou-os a "observar e absorver as condições do problema" (*s.n.*). Por outro lado, a observação e exploração das propriedades das figuras possibilitaram o desenvolvimento de soluções mais teóricas, ao invés das que desenvolveram com papel-e-lápis, muito centradas no cálculo e na manipulação algébrica. No entanto, os investigadores fazem notar que estes resultados podem ter sido influenciados pelo facto de os estudantes terem resolvido, primeiro, os problemas com papel-e-lápis e posteriormente no GeoGebra.

Santos-Trigo e Reyes-Rodriguez (2015) conduziram uma investigação em que compararam os processos de resolução de um problema geométrico com régua e compasso e com um AGD, focando vários aspetos: ideias principais envolvidas na estratégia, as heurísticas usadas, as justificações e os argumentos apresentados, e os conteúdos matemáticos utilizados. Os problemas foram colocados num seminário de resolução de problemas, destinado a professores de matemática, ao longo de um semestre. Os investigadores observaram que, com papel-e-lápis, as soluções eram exploradas identificando pontos notáveis ou relações entre alturas e lados do triângulo; as heurísticas consistiam em traçar linhas auxiliares ou trabalhar do fim para o princípio; a justificação assentava na dedução; e os conteúdos usados variavam entre semelhança de triângulos, o teorema de Pitágoras, propriedades de linhas e pontos notáveis no triângulo ou na circunferência. Já com o AGD, as soluções eram desenvolvidas tendo como abordagens principais a exploração do comportamento de famílias de triângulos, da exploração da interseção de pontos especiais, ou ainda encontrando um lugar geométrico; os métodos heurísticos assentavam no arrastamento controlado, na observação do lugar geométrico, na exploração da simetria; vários tipos de justificação eram apresentados recorrendo a argumentos visuais, empíricos, medição ou desenho, incluindo também processos dedutivos; e os conteúdos matemáticos usados consistiam em propriedades de linhas ou pontos notáveis, transformações geométricas, eixos de simetria, perpendicularidade. A partir destes resultados, os investigadores argumentam que o uso de um AGD torna-se fundamental para os alunos poderem construir e explorar modelos dinâmicos de cada situação problemática. A possibilidade de manipular a construção e, por assim dizer, o modelo, é de extrema importância para a exploração do comportamento dos objetos e da procura de invariantes. Todavia, os autores salientam que é, também dessa atividade de exploração que pode surgir novo conhecimento matemático, novas relações matemáticas.

2.3.5 Síntese intercalar

Com o propósito de fazer um mapeamento dos principais resultados obtidos em investigações que se têm debruçado sobre os processos de resolução de problemas com tecnologias, importa reter algumas pistas importantes que esses estudos oferecem. Dado que a expressão 'tecnologia' pode concretizar-se numa multiplicidade de ferramentas, tive necessidade de agrupar os estudos segundo as tipologias de instrumentos que envolvem. Começo por observar que este parco conjunto de estudos indicia a variedade de direções em que se tem investigado a utilização de tecnologias na resolução de problemas e que, à semelhança do que já havia identificado nas secções anteriores, embora aí com horizontes mais amplos, volta a emergir a impressão de que a resolução de problemas *per si* assume, muitas vezes, um papel secundário nestas investigações.

O número de estudos que envolvem o uso de calculadoras parece ter diminuído nos últimos tempos, talvez fruto do investimento que se tem feito em termos do uso dos computadores em sala de aula, ou até mesmo da disponibilização de emuladores das próprias calculadoras para serem usados no computador, projetados no quadro interativo ou mesmo na forma de aplicação para telemóveis de última geração. Os estudos analisados mostram que o uso da calculadora permitiu alargar o âmbito de certas tarefas ao favorecer a exploração de propriedades generalizáveis pelo que o seu uso, mais do que para calcular, se transformou num uso para interpretar. A calculadora permite que os alunos desenvolvam uma diversidade de estratégias de resolução e de modos de representação pelo que, com frequência, preferem as abordagens gráficas que lhes permitem visualizar, por exemplo, o ajuste de parâmetros ou mesmo economizar cálculos (Doerr & Zangor, 2000; Persson, 2013). Enquanto em 2000, Doerr e Zangor alertavam para o risco de os alunos usarem a calculadora como uma 'caixa negra' para resolver um problema, isto é, serem capazes de encontrar a solução sem compreender os conceitos envolvidos a fundo, o estudo de Partanen e Kaasila (2015) sublinha precisamente a possibilidade de levar os alunos a desenvolver significados para determinados objetos matemáticos mediante a sua utilização, criando inclusive novos objetos matemáticos.

A linguagem matemática, que com frequência é sinónimo de simbólica, pode ser um entrave ao uso de determinadas ferramentas computacionais, sobretudo as que não foram pensadas para ter aplicação no ensino ou na aprendizagem da matemática. No entanto, parecem oferecer um conjunto de novas possibilidades de trabalho, de expansão do que significa comunicar pensamento matemático durante a resolução de um problema. O recurso à exposição do pensamento matemático ou dos procedimentos seguidos através de narrativas detalhadas pode ser uma importante fonte de aprendizagem para os alunos ou, para o professor, de compreensão das suas dificuldades, pois os alunos podem conseguir obter a solução sem compreender realmente o conceito ou procedimento envolvido (Hurme & Järvelä, 2005; Hwang, Chen & Hsu, 2006).

O facultar de experiências matemáticas diversificadas em sala de aula parece influenciar a capacidade dos alunos em tirar partido das tecnologias para resolver problemas. Enquanto em alguns estudos se tenta perceber em que momentos da resolução de problemas os alunos recorrem à tecnologia (Harskamp & Suhre, 2007; Lee & Hollebrands, 2006), outras pesquisas mostram que um tipo de trabalho, continuado no tempo, focado na resolução de problemas com acesso a uma ferramenta leva os alunos a perceber quais os processos da resolução de problemas em que o seu uso pode ser mais útil ou eficiente (Yerushalmy, 2006). Desses estudos também se conclui que estas experiências com a tecnologia fomentam o relacionamento de diferentes representações com o próprio contexto dos problemas (Lee & Hollebrands, 2006; Yerushalmy, 2006). A tecnologia pode passar a integrar o raciocínio e a argumentação dos alunos, desencadeando compreensões mais abrangentes do problema e da solução. Por outro lado, quanto mais potencialidades são disponibilizadas pela ferramenta, mais propensão gera nos alunos para se envolverem em tentativas de verificação, não só em termos de quantidade de experiências, mas também em termos da sua diversidade sendo que as estratégias visuais são as mais frequentes (Papadopulos & Dagdilelis, 2008).

Os resultados dos trabalhos que reportam experiências com a folha de cálculo mostram que o uso desta ferramenta também possibilita que alunos com diferentes desempenhos desenvolvam as suas abordagens para encontrar as soluções dos problemas.

Em concreto, as potencialidades da folha de cálculo levam os alunos a desenvolver estratégias que não seriam possíveis ou seriam ineficazes com outros instrumentos como o papel e lápis (Tabach & Friedlander, 2004); facilitam o processo de exploração e descoberta de padrões, bem como o desenvolvimento de abordagens variadas consoante o pensamento algébrico dos alunos e os seus conhecimentos sobre a folha de cálculo (Hong-chan & Hee-chan, 2006), sendo que as estratégias de resolução de cada problema vão sendo desenvolvidas à medida que os alunos tentam resolver as tensões que surgem entre as suas conceções e os resultados devolvidos pela folha de cálculo (Calder, 2007).

Já no que se refere à utilização de ambientes de geometria dinâmica, observo uma profusão de publicações. Com um número crescente nos últimos anos, o GeoGebra é o ambiente que mais se encontra nos relatos de pesquisas, talvez, por ser gratuito e de fácil instalação nas escolas. No que toca aos resultados de estudos que envolveram o uso do GeoGebra na resolução de problemas, identifico alguns padrões, como passo a resumir.

Os ambientes de geometria dinâmica, quando usados para resolver problemas, facilitam a compreensão das condições envolvidas nas situações problemáticas e da sua estrutura lógica, quer através das construções que podem ser feitas, quer pelo arrastar de objetos ou pela possibilidade de fazer medições (Christou, Mousoulides, Pittalis & Pitta-Pantazi, 2005; Iranzo & Fortuny, 2011; Koyuncu, Akyuz & Cakiroglu, 2015). O facto de esta ferramenta possibilitar diferentes abordagens para obter a solução de um dado problema faz com que os alunos aprofundem a sua compreensão dos conceitos envolvidos. Um dos aspetos mais mencionado nestes estudos é o dinamismo que os AGD conferem aos conceitos matemáticos que são habitualmente tratados como estáticos, sobretudo quando o trabalho tem por base o papel e o lápis.

A construção de múltiplas representações de um conceito geométrico e a sua manipulação constitui-se como uma alternativa à manipulação algébrica para os alunos que não possuem essa destreza e que teriam muita dificuldade em desenvolver uma abordagem ao problema ou encontrar a sua solução apenas por métodos algébricos. Assim, estes estudos mostram que os AGD promovem o desenvolvimento do pensamento geométrico durante a resolução de problemas (Iranzo & Fortuny, 2011) e têm mostrado a influência dos AGD nos vários aspetos desse tipo de pensamento: a atividade de construção espoleta a exploração e faz emergir a conjetura (Christou, Mousoulides, Pittalis & Pitta-Pantazi, 2005), o arrastamento permite estudar propriedades invariantes

(Baccaglini-Frank & Mariotti, 2009, 2010; Santos-Trigo, Camacho-Machín & Moreno-Moreno, 2013; Santos-Trigo & Reyes-Rodriguez, 2015) e, em conjunto com a medição verificar conjeturas, avançar generalizações e propor justificações (Christou, Mousoulides, Pittalis & Pitta-Pantazi, 2005; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2009, 2010; Santos-Trigo & Reyes-Rodriguez, 2015). O estudo da atividade de justificação e de demonstração levou ao desenvolvimento de um modelo que visa conduzir os alunos a estabelecer uma ligação entre a formulação de uma conjetura num AGD e a sua efetiva demonstração, em contexto de sala de aula (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2009, 2010). De um modo geral, estes estudos mostram que os AGD sustentam a atividade de resolução dos problemas que envolvem noções de geometria em termos visuais, algébricos e também conceptuais (Iranzo & Fortuny, 2011; Paiva, Amado & Carreira, 2014; Santos-Trigo & Reyes-Rodriguez, 2015). Portanto, a utilização de ambientes de geometria dinâmica amplia as experiências dos alunos através da construção e exploração de modelos dinâmicos das situações problemáticas, o que desencadeia a procura de propriedades invariantes, podendo daí surgir novos conhecimentos matemáticos.

Em suma, a resolução de problemas de matemática com tecnologias é uma atividade que parece estar ao alcance de todos os alunos, de forma relativamente independente do seu desempenho na disciplina de matemática, (Chen & Hu, 2013; Tabach & Friedlander, 2004; Yerushalmy, 2006). Por isso, estes dois campos – a matemática e a tecnologia – não devem ser vistos como disjuntos nem, tal como defenderam Artigue e Bardini (2010), o papel da tecnologia se deve resumir ao de uma ferramenta de conversão entre sistemas de representação. Para além disso, a sofisticação dos alunos na utilização de diversas ferramentas sugere que deriva de experiências que trazem de fora da sala de aula ou da escola e se revelam relevantes na sua atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias (Artigue & Bardini, 2010). Deparo-me pois com a necessidade de compreender melhor algumas iniciativas extraescolares em que os jovens se envolvem e que, de alguma forma, remetem para uma atividade de resolução de problemas de matemática com ou sem recurso a tecnologias.

2.4 Resolução de problemas de matemática para além da sala de aula

Sendo o SUB14 uma competição de resolução de problemas de matemática que se assume como uma proposta de atividade extraescolar – não é organizada no seio da comunidade escolar a que se destina e, desde a sua conceção, estimula um envolvimento dos alunos que não está sujeito às mesmas regras que os espaços de aprendizagem formais estão – importa perceber em que medida os investigadores se têm debruçado nestas iniciativas, quais os aspetos concretos dessas atividades que têm despertado o seu interesse, e que conhecimento tem sido produzido, fruto dessa investigação. A recolha que aqui sintetizo seguiu um processo idêntico às anteriores no que diz respeito à escolha de fontes e à seleção dos trabalhos de investigação a analisar. Neste caso, a pesquisa foi orientada tendo em conta que interessava recolher estudos com foco na resolução de problemas de matemática a decorrer em contextos exteriores à sala de aula com o uso de tecnologias.

Novamente surge a dificuldade em encontrar publicações de relevo nas fontes já consultadas, o que deixa antever que este é um campo pouco explorado comparativamente com os contextos de ensino-aprendizagem mais explícitos e formais, como a sala de aula de matemática. Volta também a emergir a subtileza na escolha das palavras-chave que vão circunscrevendo a investigação que não é centrada na sala de aula: há estudos que se debruçam sobre as atividades matemáticas extracurriculares (*extracurricular*), passando pelas que decorrem para além da sala de aula (*beyond school*) e mesmo fora da escola ou as consideradas já no mundo do trabalho (*out-of-school, work world*).

Volto a frisar que, por via da revolução industrial, depois via revolução tecnológica e a da informação, este mundo 'exterior à escola' está hoje está profundamente impregnado de matemática embora esta apareça cada vez mais mascarada. Como bem lembra Noss (2001), os objetos matemáticos estão agora tão invisíveis que se torna muito difícil perscrutá-los nas mais variadas ferramentas tecnológicas que usamos no nosso dia-a-dia. E como também observou na investigação que conduziu com os seus colegas, a matemática efetivamente usada no mundo do trabalho serve para dar sentido à realidade de formas que são radicalmente diferentes daquelas que foram aprendidas ao longo da escolarização formal. Vão mais longe concluindo mesmo que, embora a resolução de problemas seja uma constante no mundo do trabalho, o uso de matemática nessa atividade é marcada por objetivos muito pragmáticos, técnicas rápidas e eficientes, que se afastam das que são preconizadas nos ambientes escolares em que se busca a consistência ou a sua generalização (Hoyles, Noss, Kent & Bakker, 2010).

As últimas décadas do século XX foram muito profícuas em estudos sobre as relações entre estes dois mundos: as aprendizagens que decorrem em cada um deles e as influências que essas experiências exercem um no outro mundo. Um dos trabalhos que considero marcante é o de Jean Lave (1988), e da sua equipa, que estudou a resolução de problemas que envolvem noções de aritmética na vida do dia-a-dia de adultos no âmbito do *Adult Math Project* (e.g., fazer compras no supermercado, controlar a dieta). Um dos resultados surpreendentes deste projeto foi o à-vontade com que os intervenientes faziam os cálculos necessários naquelas situações, facto que contrastava com as dificuldades observadas ao realizarem testes que incidiam sobre conceitos escolares. Lave discute então a cognição e a sua relação com a prática, a cultura e a sociedade, em geral, concluindo que o pensamento matemático desenvolvido no 'mundo real' é moldado social e culturalmente pelos contextos no seio dos quais é produzido. A aprendizagem da matemática, até aqui vista essencialmente sob o foco do cognitivismo, passa a ser encarada numa perspetiva situada, deslocando-se várias tónicas: do *ensinar* para o *aprender,* do *aprender através do ensino* para o *aprender através da observação e da participação periférica*, do *aprender com o professor* para o *aprender com outros aprendentes,* da *transmissão e absorção de ideias* para a *compreensão*.

Também Schliemann e Carraher conduziram vários estudos nas décadas de 80 e 90, sobretudo no Brasil, em que procuravam compreender diferentes aspetos do pensamento matemático usado em contextos escolares e em contextos da vida do dia-a-dia de jovens ou adultos (Carraher, Carraher, & Schliemann, 1985; Schliemann & Carraher, 1992). Por exemplo, Schliemann e Acioly (1989) mostraram como a experiência do dia-a-dia de corretores de apostas de rua influenciava a forma como resolviam problemas sem conhecer o algoritmo da divisão, recorrendo ao uso de números de referência. Daqui os autores concluíram que a experiência do dia-a-dia contribuiu para o desenvolvimento de um conhecimento sobre relações entre números e da constituição de 'grupos privilegiados' de números, que auxilia na resolução de problemas sem ser necessário recorrer a conhecimentos formais. Este estudo veio contrariar algumas ideias sobre a resolução de problemas em sala de aula, nomeadamente, a de que existe um procedimento certo para se resolver um problema, ou a de que é necessário o ensino explícito de determinados conceitos ou procedimentos para se poder resolver problemas.

As características do SUB14 permitem defini-lo como um campeonato que decorre para além da sala de aula, no sentido em que não é pensado com a finalidade subsidiar a aprendizagem formal, sem prejuízo de poder ser levado para a aula de matemática, como aliás acontece e está documentado (Carreira et al., 2012; Carreira, Jones, Amado, Jacinto

& Nobre, 2016). Nessa atividade para além da sala de aula, os jovens concorrentes podem explorar os seus recursos naturais de aprendizagem, tecnológicos e outros, e exprimir de forma espontânea as suas ideias matemáticas. Vários estudos apontam que o envolvimento dos alunos em atividades desta natureza que decorrem para além da sala de aula promove o desenvolvimento de importantes capacidades matemáticas, como a resolução de problemas ou a comunicação matemática; o estabelecimento de relações afetivas entre os jovens, as famílias e a matemática; e desencadeia a descoberta de usos pertinentes das tecnologias para resolver os problemas (Carreira et al., 2016; Kenderov et al., 2009; Stahl, 2009; Wedege & Skott, 2007).

O campeonato de resolução de problemas de matemática SUB14 encontra a sua existência na fronteira entre dois mundos: um que corresponde ao dia-a-dia de cada jovem no seio da sua família, onde objetos culturais e sociais permitem aprendizagens informais, em particular, o acesso às mais variadas tecnologias que transformam e ampliam as diversas funções humanas; e a Escola, muito em particular, a aula de matemática, onde decorrem aprendizagens formais mediante o uso de recursos e objetos autorizados, uma linguagem própria, com regras ditadas pelo professor (Figura 2.1). Esta interseção é, pois, um contexto muito rico em termos das oportunidades que pode oferecer para vislumbrar o que fazem os jovens com os conhecimentos adquiridos na escola e como os aplicam para resolver problemas com a possibilidade de recorrer a outros indivíduos além do professor, a outros instrumentos além da calculadora e do papel e lápis, a outros tipos de pensamento ou procedimentos além do cálculo ou da manipulação algébrica.

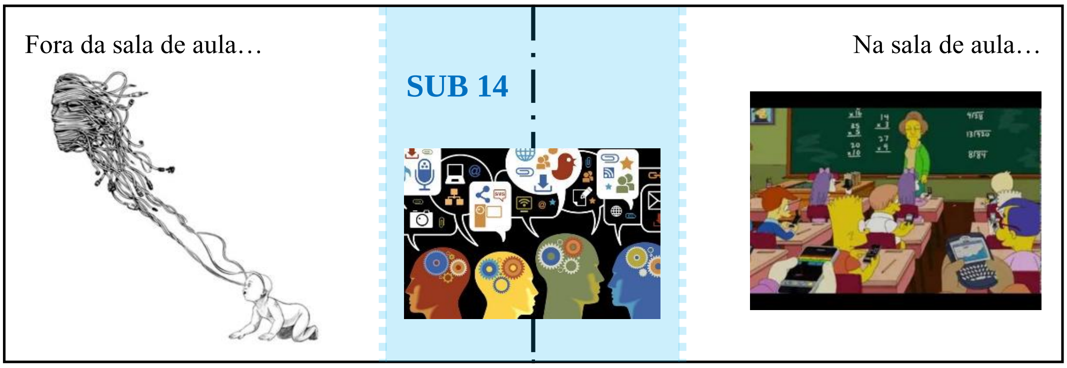


Figura 2.1. Ilustração do contexto de resolução de problemas de matemática, SUB14, enquanto zona de interseção entre a sala de aula e o mundo para além da sala de aula[9]

[9] Fonte das imagens: à esquerda, imagem da autoria de Leonel David Mendes, http://www.bbc.com/news/world-21887443; ao centro, imagem obtida em https://img.scoop.it/Xsw8NBO1fQW0uRxO7GTlYUQiFg_h6xvI8ufC6LhnDxU; à direita, imagem obtida em https://www.galaxyandroids.com/el-uso-del-movil-en-menores-vinculado-al-fracaso-escolar/.

2.4.1 Estudos sobre resolução de problemas com tecnologias para além da sala de aula

O uso de ferramentas tecnológicas na resolução de problemas de matemática em ambientes que se estendem para além da sala de aula, também tem sido alvo de investigação, embora em menor quantidade.

Wijers, Jonker e Drijvers (2010) analisaram a utilização de tecnologia móvel e em que medida os alunos se envolviam em atividades matemáticas através de um jogo de geometria denominado MobileMath. O jogo foi criado com base na combinação dos princípios da Educação Matemática Realista, nomeadamente, para potenciar experiências matemáticas em torno de problemas realistas e autênticos, e de um conjunto de ‘princípios de aprendizagem baseada em jogos em dispositivos portáteis’. O jogo foi usado em telemóveis com GPS, consistindo na construção de quadriláteros num mapa a partir do deslocamento real da equipa e na ‘desconstrução’ de figuras das equipas adversárias. Os investigadores destacaram que os fatores que promoveram a adesão dos alunos foram a clareza das metas e objetivos, bem como das regras do jogo, e ainda o facto de envolver competição e interação entre equipas. Do ponto de vista das aprendizagens matemáticas, os autores sublinharam que os alunos redescobriram propriedades de paralelogramas aquando da construção/desconstrução de figuras, ou seja, perceberam formas geométricas no espaço exterior à sala de aula e foram levados a combinar diversas competências matemáticas quando analisavam o mapa ou, quando, considerando a sua posição, tinham que decidir sobre a melhor estratégia para avançar no jogo.

Já a investigação levada a cabo por van den Heuvel-Panhuizen, Kolovou e Robitzsch (2013) visava compreender de que forma os estudantes em diferentes níveis de desenvolvimento (entre os 10 e os 12 anos) se servem de um jogo *online* na resolução de uma cadeia de problemas algébricos e de que forma essa experiência afeta o seu desempenho em tarefas semelhantes, mas com papel-e-lápis. A experiência que desenvolveram foi proposta a partir da sala de aula para ser realizada em casa: os alunos tinham que resolver problemas com contextos que incluíam quantidades covariantes. Os investigadores, através da administração e análise de pré e pós testes com papel-e-lápis, concluíram que o envolvimento no jogo *online*, dinâmico, contribuiu para o desempenho na resolução de problemas de álgebra elementar. A estratégia mais frequentemente usada pelos alunos foi a tentativa-e-erro, sendo que o ensaio sistemático foi apenas aplicado por uma pequena percentagem de alunos mais velhos. As estratégias menos usadas foram a resolução de um problema análogo ou a de simplificação do problema noutros dois. Os autores observam, assim, que o ambiente *online* despertou a aplicação de estratégias qualitativamente diferentes: enquanto umas são focadas na obtenção da resposta, outras revelam uma preocupação com a identificação de relações (p. 299). Outro aspeto que os autores salientam prende-se com o papel "intrigante" (p. 303) da tentativa-e-erro: apesar de se considerar como um método fraco, em que os alunos podem recorrer ao jogo dinâmico sem grande reflexão, também pode ser encarada como uma estratégia muito poderosa, pois permite-lhes fazer tentativas intencionais e analisar resultados. Os investigadores observaram também que, enquanto os alunos mais jovens (a frequentar o ano 4) utilizavam a proposta de jogo essencialmente para jogar livremente, muitos alunos do ano 5 recorriam ao jogo para obter respostas, enquanto vários do ano 5 e os do ano 6 já exploravam relações entre as quantidades. Concluem que o jogo *online* tem efeito na aprendizagem se a proposta de trabalho contiver problemas matemáticos que despertem a descoberta de relações entre as variáveis existentes no problema e no jogo associado.

Um outro estudo realizado por esta equipa (Kolovou et al., 2013) procurava compreender de que forma alunos de 4º ao 6º ano utilizavam, em casa, o mesmo jogo dinâmico *online* para resolver uma sequência de problemas algébricos com foco na covariação, a que se seguiam discussões breves em sala de aula, e ainda perceber se a utilização desse jogo exercia algum tipo de impacto no desempenho desses alunos em testes de resolução de problemas do mesmo tipo com papel-e-lápis. No estudo anterior, os investigadores descobriram que os alunos que foram sujeitos à intervenção com o jogo dinâmico *online* superaram os alunos do grupo de controlo (não sujeitos à intervenção) em termos dos resultados em resolução de problemas que envolviam conceitos algébricos elementares. De modo idêntico ao estudo anterior, os investigadores concluíram que a utilização do ambiente *online* espoletou o desenvolvimento de estratégias de resolução bastante diferentes. Enquanto os alunos mais jovens (4.º ano) continuavam a utilizar o jogo como entretenimento, alguns alunos de 5.º ano faziam-no com o intuito de procurar as respostas para a sequência de problemas, enquanto outros de 5.º ano e a maior parte dos alunos de 6.º ano já procuravam explorar relações entre as variáveis, num trabalho mais focado na resolução dos problemas. Nas suas reflexões finais, os autores identificam questões relacionadas com a autenticidade dos dados recolhidos uma vez que a experiência de utilização do jogo dinâmico decorre no ambiente familiar de cada estudante, não controlado pela equipa de investigação. Contudo, concluem que a utilização doméstica de ferramentas tecnológicas pode criar um ambiente de aprendizagem efetiva que não só sustenta como amplia as aprendizagens decorridas em sala de aula. Assim, o dinamismo incorporado no jogo acaba por fazer com que o principal papel da tecnologia seja o de desencadear uma diversidade de estratégias de resolução.

Stillman e Brown (2014), reconhecendo uma certa dificuldade em observar certas atividades em sala de aula, como a modelação de situações reais, optaram por desenvolver projetos extracurriculares que as contemplavam. As investigadoras analisaram a atividade de modelação de dois grupos de alunos de 10.º e 11.º ano: uns numa competição exterior à sala de aula designada *Paterson Modelling Challenge*, e outros em contexto de aula, numa tarefa escolhida pelo professor. Apesar de o estudo pretender oferecer evidências da noção de 'antecipação implementada', tal como proposta por Niss (2010), alguns dos resultados obtidos parecem-me relevantes ao meu estudo. Primeiro porque o contexto extraescolar tem características semelhantes ao SUB14 no que se refere à liberdade dada aos jovens para escolher ferramentas, estratégias e conhecimentos matemáticos potencialmente úteis. Depois porque a atividade de resolução de problemas pode ser considerada um 'caso particular' da atividade de modelação de situações reais. Todavia, este estudo mostra que o sucesso neste tipo de atividades requer o uso de capacidades matemáticas e tecnológicas que devem poder ser antecipadas pelos estudantes, melhor dizendo, não depende unicamente dos conhecimentos matemáticos e das suas capacidades em usar a calculadora ou um programa informático, como uma folha de cálculo, mas da perceção que eles são capazes de fazer de quais daqueles conhecimentos ou procedimentos matemáticos ou quais das representações que as tecnologias permitem gerar serão as apropriadas para obter a solução desejada. Uma das dificuldades identificadas no grupo de alunos envolvidos na atividade extracurricular, cuja tarefa de modelação foi formulada pelos próprios jovens com base nos seus interesses pessoais, foi precisamente o não serem capazes de identificar os conhecimentos que não possuíam e eram necessários para poder desenvolver uma abordagem apropriada.

2.4.2 Projetos e atividades matemáticas para além da sala de aula

A natureza inclusiva que caracteriza o SUB14 enquanto competição matemática é partilhada por várias outras iniciativas do género que decorrem noutros pontos do mundo. Embora sendo marcadas pela sua faceta competitiva, o seu propósito principal é envolver uma grande diversidade de jovens em atividades relacionadas com a matemática e que vão ao encontro dos seus interesses e das suas capacidades. Apresento agora alguns 'parentes próximos' do campeonato SUB14 bem como alguns resultados publicados em estudos que se debruçaram sobre esses contextos e os jovens que neles participam.

O Rali Matemático Transalpino

Esta é uma competição de resolução de problemas de matemática que surgiu na Suíça mas se veio a estender também a alunos dos 7 aos 15 anos de idade da França, Itália, Bélgica, Luxemburgo, Argélia e Argentina. Está organizada em várias etapas, sendo que os professores podem inicialmente acompanhar os alunos numa fase de treino e preparação. Ao contrário de outras iniciativas de cariz mais individualista, o Rali Matemático é uma competição entre turmas. Isso significa que, na etapa que se segue à de treino, os alunos são chamados a resolver um conjunto de problemas, num tempo limitado, na própria escola mas supervisionado por outro professor que não o titular de turma. Os alunos resolvem os problemas sem a intervenção do professor e têm que apresentar um conjunto de soluções, que constituirão as respostas da sua turma. Dada a quantidade de problemas, que pode variar entre 5 e 7, e o tempo disponível para a sua resolução, normalmente 50 minutos, os alunos tendem a organizar-se em pequenos grupos e a trabalhar cooperativamente.

Alguma investigação tem sido realizada sobre este rali que tem alguns contornos semelhantes com o campeonato SUB14. Grugnetti e Jaquet (2005) recorreram a alguns problemas propostos no Rali Matemático Transalpino (RMT) para explorar as potencialidades de algumas noções provenientes da teoria didática francesa, nomeadamente, a noção de "situações problema". Assim, os investigadores debruçaram-se sobre o conhecimento matemático envolvido no problema, a coerência entre o conhecimento matemático nele implícito, e o conhecimento que os alunos são capazes de mobilizar, para ilustrar como estes problemas podem ser usados em sala de aula na construção de novo conhecimento matemático. O interesse dos investigadores pelos problemas do RMT não recai na correção das soluções obtidas, mas antes nos processos seguidos pelos alunos, isto é, os estudantes têm que mobilizar factos e procedimentos para criar estratégias ou desenvolver processos que conduzam a um novo conhecimento. Outro aspeto distintivo está relacionado com a autonomia dos alunos pois ao longo no processo de obtenção das soluções têm que tomar decisões e defendê-las com argumentos válidos. Para além disso, os investigadores concluíram que os professores recorrem aos problemas após a competição terminar e incorporam-nos nas suas aulas para explorar as estratégias da turma e desenvolver os mais variados aspetos do currículo de matemática.

O Projeto NRICH

Tendo surgido no final da década de 90 do século passado, este projeto britânico consiste num *website*[10] de divulgação de atividades matemáticas de enriquecimento. Atualmente conta com uma diversidade de recursos destinados a alunos, familiares e a professores, tais como problemas, puzzles, artigos ou jogos organizados por níveis de escolaridade. Uma equipa composta por estudantes universitários de matemática providencia respostas eletrónicas às dúvidas colocadas pelos estudantes. A página apresenta cinco objetivos deste projeto: enriquecer a experiência da matemática escolar de todos os alunos, oferecer atividades desafiadores e envolventes, desenvolver o pensamento matemático e capacidades de resolução de problemas, mostrar matemática em contextos significativos, trabalhar em parceria com professores, escolas e outros ambientes educativos.

A partir de 1999, o projeto passou a estar sob a alçada do *Millenium Mathematics Project*, da Universidade de Cambridge. Todavia, algum tempo antes foi alvo de uma avaliação externa levada a cabo por Keith Jones e Helen Simons com vários propósitos: apreciar se o uso das funcionalidades da página promove o desenvolvimento matemático dos jovens; de que forma os professores utilizam os recursos, bem como o contributo das ferramentas tecnológicas nos aspetos anteriores (Jones & Simons, 1999, 2000). A equipa do NRICH oferece ainda oportunidades de desenvolvimento profissional, ou seja, ações de formação sobre a utilização dos recursos em sala de aula.

O relatório disponível e o artigo discutido no PME24 dão conta das diversas facetas do NRICH. Em particular, concluiu-se que os jovens com mais capacidades passaram a apreciar mais a matemática, que a sua imagem da matemática também melhorou, e que consideravam a possibilidade de continuarem a estudá-la, inclusive na universidade. Por outro lado, muitos professores recorriam aos materiais disponíveis, não só para dinamizar as atividades dos seus clubes escolares, mas também para os usar em tarefas de aprofundamento nas suas aulas. No que se refere ao contributo das tecnologias, também à data e com os dados analisados, os investigadores concluíram apenas que o uso que os estudantes e os professores faziam dos recursos disponibilizados estavam relacionados

[10] https://nrich.maths.org

com a funcionalidade e a acessibilidade do *site*. Valorizavam ainda a interação potenciada pelas ferramentas da página, uma vantagem do projeto NRICH.

O Math Forum e o projeto Virtual Math Teams

O projeto *Virtual Math Teams*[11] (VMT, Equipas Virtuais de Matemática) consiste num de vários serviços oferecidos pelo *website* americano *Math Forum*, o qual foi recentemente transferido para a responsabilidade da associação de professores *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). Este projeto surgiu em sequência do sucesso de outro serviço oferecido pelo Math Forum, o Problema da Semana (*PoW – Problem of the Week*) que consiste na publicação de um problema semanal no *website*. Os estudantes que o desejem, resolvem cada um dos problemas, submetam as suas soluções através da página e recebam *feedback* para melhorá-las, caso seja necessário.

O VMT incentiva o trabalho com problemas abertos de forma colaborativa pelo que os jovens podem interagir com outros, em pequenos grupos, em salas de discussão matemática virtual (*chat rooms*). O *site* disponibiliza ainda ferramentas digitais que facilitam essas discussões, a coordenação entre o grupo ou a resolução dos problemas, nomeadamente, um quadro interativo digital que suporta as representações gráficas e contém um editor de símbolos matemáticos, um portal semelhante a uma rede social e ainda um *wiki*[12] no qual os membros da comunidade vão partilhando as suas descobertas.

Este projeto foi dirigido pelo investigador Gerry Stahl entre 2003 e 2014, com dois grandes propósitos: criar oportunidades para os jovens fazerem matemática *online* e colaborativamente; e investigar os processos de construção de conhecimento nesse ambiente (cognição em grupo). A plataforma regista todas as sessões em que os alunos participam. Assim, os investigadores podem percorrer esses registos e visualizar o mesmo que os estudantes viram nos seus ecrãs. Uma vez que, normalmente, os estudantes não se conhecem de antemão, os investigadores podem analisar o processo de construção partilhada de conhecimento que decorre em cada sessão.

> "O Projeto VMT cria mundos e comunidades em que a matemática pode ser vivida e falada . . . os alunos aprendem melhor matemática se estiverem ativamente envolvidos a discutir matemática. Explicar o seu pensamento aos outros, tornar as

[11] http://vmt.mathforum.org/vmt/index.html

[12] Um *wiki* é uma página web cujos conteúdo e estrutura podem ser modificados diretamente a partir de um motor de navegação. Normalmente, essa construção é feita a partir de trabalho colaborativo entre os membros de uma dada comunidade. Mais informação em https://en.wikipedia.org/wiki/Wiki.

> suas ideias visíveis, expressar conceitos matemáticos, ensinar os colegas, fazer contribuições são formas importantes de os alunos desenvolverem uma compreensão profunda e verdadeira perícia" (Stahl, 2009, p. 24).

É pois com estas premissas que os investigadores se debruçam sobre o manancial de dados de que dispõem para elaborar alguns conceitos que gravitam em torno da atividade de cognição em grupo desenvolvida pelos alunos registados. Destaco a noção de *discurso matemático digital expositivo* (Stahl, 2009), que diz respeito à produção de uma narrativa, de uma história que conta como foi desenvolvida a solução de um dado problema. Este discurso expositivo, é simultaneamente matemático e digital dadas as características do contexto em que decorre pelo que, sendo impulsionado pelas ferramentas digitais disponibilizadas, se destaca pelo uso de cores, pelos desenhos, imagens ou fotos, pelo recurso à linguagem natural e também à simbólica e ainda pelo uso de ficheiros produzidos com outros programas como os de geometria dinâmica ou as folhas de cálculo.

Esta noção é explorada e desenvolvida em vários trabalhos de investigação. Por exemplo, Medina, Suthers e Vatrapu (2009) desenvolveram um estudo sobre as práticas de representação de uma equipa de alunos e, em particular, como é que as inscrições feitas no quadro interativo se transformam em representações úteis para desenvolver abordagens aos problemas. Stahl (2013) aborda ainda a noção de discurso exploratório nas interações entre os alunos de uma mesma equipa, no seio da qual um problema matemático é formulado, explorado e resolvido de forma colaborativa, com o recurso a um discurso característico dessa equipa de jovens.

A comunidade CAMI e a maratona virtual de matemática

A Comunidade de Aprendizagens Multidisciplinares Interativas, CAMI[13], é uma comunidade virtual de aprendizagem destinada a alunos, professores e estudantes universitários que oferece uma diversidade de desafios distribuídos por várias áreas (matemática, ciências, leitura, ciências sociais e xadrez). O projeto foi desenvolvido pela Universidade de Moncton, no Canadá, sob a coordenação de Victor Freiman. À semelhança do projeto *Virtual Math Teams*, a plataforma surgiu como uma ampliação de outra iniciativa, o 'Problema da Semana', pelo que o novo *site* permitiu o estabelecimento de importantes conexões entre a matemática e outras áreas disciplinares. Os problemas

[13] http://www.caminb.ca/cfdocs/cami/cami/

são colocados semanalmente no *website* a partir de setembro de cada ano escolar e os alunos são convidados a resolvê-los e a submeter as suas respostas eletronicamente. Do outro lado, uma equipa composta por alunos universitários, futuros professores de matemática, aprecia cada solução e devolve um comentário específico a cada resolução, com *feedback* construtivo e que incentive à persistência dos participantes.

Freiman, Vézina e Gandaho (2005) apresentam o *design* da plataforma e discutem alguns resultados de um questionário aos jovens participantes e aos alunos universitários envolvidos. Uma das grandes constatações é o facto de a comunidade CAMI oferecer uma oportunidade única de comunicação matemática aos alunos participantes e aos estudantes universitários. Outro resultado interessante diz respeito à natureza dos problemas selecionados que não são rotineiros e admitem uma diversidade de estratégias o que, por sua vez, resulta numa multiplicidade de formas de comunicar essas abordagens. Segundo os investigadores, esta é uma das descobertas mais importantes para os estudantes que devolvem *feedback* aos jovens. Estes futuros professores de matemática veem no CAMI uma importante ferramenta de aprendizagem, nomeadamente, sobre o inteirar-se do pensamento matemático dos alunos, a serem recetivos à diversidade de estratégias e de ferramentas de comunicação que podem ser usadas, e a providenciar uma verdadeira avaliação formativa dos seus trabalhos. Este resultado está muito relacionado com a dificuldade de diferenciação pedagógica em sala de aula que se sentia na altura com os currículos em vigor no Canadá. O facto de cada aluno poder escolher um problema para resolver, com o qual se sinta confiante, por exemplo, resolvê-lo ao seu ritmo e comunicar a sua abordagem com recurso às ferramentas que lhe parecem apropriadas, e ainda receber uma apreciação sobre esse seu desempenho, acaba por providenciar a diferenciação que os professores gostariam de poder fazer nas suas aulas.

Freiman e Lirette-Pitre (2009) caracterizam a comunidade, no seu modo de funcionamento e operacionalização, alertando para a complexidade que é o estudo de uma comunidade virtual de aprendizagem dado que é necessário uma adaptação constante do problema, da fundamentação teórica e dos métodos de pesquisa. Os seus interesses canalizam-se em duas direções: questionar o desenvolvimento, o modo de funcionamento e o impacto do CAMI, e estudar aspetos particulares da vida da comunidade e relaciona-los com o ensino e a aprendizagem, da matemática, por exemplo. Em particular, os investigadores confrontam-se com possibilidades de alteração do *design* da comunidade: enquanto cada problema pode ser resolvido ao longo de duas semanas, esse pode ser demasiado tempo para quem espera uma apreciação da sua solução; ou o facto da existência de tecnologia que permite a correção de respostas automaticamente coloca em questão o modelo de comunicação assíncrona.

Freiman e Applebaum (2011) investigaram a existência de uma relação entre o sucesso alcançado por alguns alunos na resolução dos problemas e a sua persistência em participar na competição, e procuraram também perceber que tipo de problemas eram considerados como mais difíceis para os participantes persistentes. Os investigadores observaram que, apesar de os problemas terem diferentes níveis de dificuldade, o número de alunos que os tentava resolver mantinha-se ao longo da competição. Este facto pode ser explicado pela atribuição de pontos mesmo quando as respostas estão incorretas o que parecia estar a contribuir para a motivação dos participantes e, consequentemente, a sua persistência na resolução de problemas. Concluíram ainda que os estudantes apresentavam mais dificuldades em problemas relacionados com os tópicos probabilidades e percentagens, o que era agravado pelo facto de os problemas não serem rotineiros e requererem raciocínios mais complexos e conhecimento mais aprofundado de conceitos e relações matemáticas.

Mais recentemente, Applebaum, Kondratieva e Freiman (2012) debruçaram-se sobre as questões do género procurando descrever os padrões de participação e do sucesso alcançado de rapazes e raparigas na competição *online* de resolução de problemas. De um modo geral, os investigadores não encontraram diferenças significativas em termos da taxa de participação, do risco corrido, nem na persistência quando compararam rapazes e raparigas. Concluíram que os dois géneros mostram capacidades semelhantes e interesse em participar nestas atividades *online*.

2.4.3 Síntese intercalar

Nos últimos anos têm surgido algumas iniciativas que visam dinamizar atividades de resolução de problemas para além da sala de aula, com o recurso a ferramentas tecnológicas. Destacam-se dois grandes tipos de atividades: i) as que foram criadas por equipas de investigadores com propósitos de investigação muito particulares, e que normalmente são pontuais ou decorrem num curto espaço de tempo e destinam-se a um número reduzido de participantes; ii) e as que foram criadas por instituições com o intuito de divulgar a matemática e a resolução de problemas ou de captar estudantes, que se desenrolam ao longo de vários anos, contam com um número elevado de participantes, e também foram alvo do interesse de equipas de investigadores.

A resolução de problemas de matemática surge, nestes contextos, associada ao jogo e à competição embora nenhuma destas iniciativas tenha como finalidade a seleção de jovens especialmente talentosos para a matemática. As tecnologias usadas nesta atividade podem variar desde as ferramentas de uso comum, como os programas do Windows ou o GPS, às que são desenhadas intencionalmente pelos investigadores e disponibilizadas em plataformas que os jovens são convidados a utilizar (van den Heuvel-Panhuizen et al., 2013; Kolovou et al., 2013).

Este conjunto de estudos mostra que os alunos apreciam as atividades de resolução de problemas em que participam, nomeadamente problemas realistas ou autênticos, e que a sua participação nestas iniciativas os levou a combinar competências matemáticas com outras, como tecnológicas, de estratégia ou conhecimentos do dia-a-dia e incorporá-las nas abordagens que desenvolveram para encontrar as soluções dos problemas (Stillman & Brown, 2014; Wijers, Jonker & Drijvers, 2010). Também se observou que, nestes ambientes extraescolares, os alunos desenvolvem estratégias qualitativamente diferentes para o mesmo problema e que uma das mais relevantes acaba por ser a tentativa-e-erro (van den Heuvel-Panhuizen et al., 2013; Kolovou et al., 2013). A propósito da resolução de problemas embutida num jogo numa plataforma *online*, também se descobriram padrões de diferentes utilizações desse jogo que foram relacionadas com a idade dos alunos: enquanto os mais jovens recorrem à aplicação como forma de entretenimento, os mais crescidos procuram explorar relações entre as variáveis implícitas em cada situação problemática. Concluíram ainda que os alunos que participaram nesta experiência desenvolveram as suas capacidades de resolução de problemas algébricos (van den Heuvel-Panhuizen et al., 2013; Kolovou et al., 2013).

No que concerne às competições matemáticas disponibilizadas por diversas instituições através de páginas *web* próprias, é possível verificar que têm propósitos e formas de organização que estão em sintonia com os do SUB14. Todas as competições têm por base a resolução de problemas de matemática e, à exceção do Rali Matemático Transalpino, todas se constituem como uma atividade extraescolar embora admitam o envolvimento de professores (por exemplo, levando os problemas para as aulas de matemática para desenvolver conteúdos curriculares). Várias destas competições disponibilizam um tipo de *feedback* personalizado a cada jovem que submete uma solução de um problema, que apenas é conseguido com a colaboração de estudantes universitários (no caso do VMT, do NRICH e do CAMI).

No entanto, as investigações que sobre eles se tem produzido diverge bastante, embora as temáticas da resolução de problemas e o uso de tecnologias lhes estejam subjacentes. Por exemplo, alguns investigadores debruçam-se sobre o conhecimento matemático que os alunos são capazes de mobilizar para resolver os problemas (Grugnetti & Jaquet, 2005), os processos de construção desse conhecimento (Stahl, 2013) e as representações que utilizam (Medina, Suthers & Vatrapu, 2009). Uma das suas preocupações passa por compreender o papel das tecnologias no desenvolvimento da cognição em grupos de alunos que trabalham colaborativamente a distância, tendo-se observado que influenciam o discurso dos jovens que é analisado através da noção de discurso matemático digital expositivo (Stahl, 2009, 2013). Esta questão da comunicação num ambiente virtual, e da comunicação matemática em concreto, está muito presente na investigação produzida quer pela oportunidade de trabalho colaborativo que as plataformas possam proporcionar (no caso da VMT), quer pela comunicação assíncrona com os futuros professores que avaliam as resoluções submetidas ampliada pela possibilidade de melhorar as soluções (CAMI, NRICH).

Embora estas as competições sejam inclusivas, é notório um interesse em observar os estudantes que têm maior propensão para a matemática e a resolução de problemas, procurando perceber os aspetos que os fazem ser persistentes ou como caracterizam a dificuldade de um dado problema (Freiman & Applebaum, 2011), sendo que também se encontram estudos que se debruçam sobre as questões do género na resolução de problemas (Applebaum, Kondratieva & Freiman, 2012). Ainda numa outra linha de pesquisa bastante diferente, os investigadores estão concentrados nas questões de *design* de ambientes de aprendizagem virtuais e nas ferramentas tecnológicas que melhor podem assistir essa aprendizagem (Jones & Simons, 1999, 2000; Freiman & Lirette-Pitre, 2009; Stahl, 2009).

Em síntese, estas competições de resolução de problemas com uma forte componente tecnológica partilham muitas características com o SUB14, na medida em que promovem a matemática e o uso de pensamento matemático para além da sala de aula. Nelas está patente uma cultura de comunicação entre pares e entre os jovens e as organizações das iniciativas que é facultada pela ferramentas tecnológicas incorporadas nas plataformas e que os alunos podem usar para obter as soluções dos problemas.

2.5 Abrindo caminho para um referencial teórico

A análise bibliográfica resumida anteriormente visou ilustrar o estado da arte nas temáticas que circunscrevem o problema de investigação formulado. Tal como procurei registar neste capítulo, a sequência das leituras reflete uma espécie de afinações sucessivas que tinham como propósito compreender aspetos cada vez mais particulares da atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias, no contexto de uma competição que decorre para além da sala de aula. Nesta última secção proponho-me discutir as aprendizagens que essas leituras me proporcionaram, quer sobre o problema de investigação em si, quer sobre as tendências que podem servir de guia ao desenvolvimento de um referencial teórico consistente e coeso que sustente este estudo.

A revisão a que me propunha inicialmente acabou por ganhar um novo impulso com o recurso ao programa de análise de dados qualitativos NVivo®. Apesar de já conhecer o programa e de o pretender utilizar como suporte da análise de dados, tomei contacto com outras utilizações possíveis aquando da participação num *workshop* do V Fórum de Jovens Investigadores do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Assim, movida por alguma curiosidade, experimentei ‘analisar’ a revisão da literatura com este programa. Naturalmente, tanto a seleção das leituras como a sua síntese fizeram emergir algumas das ideias mais importantes sobre as temáticas – e essas ideias serviram de bússola, mas agora no ambiente NVivo. Todavia, à medida que as categorias foram surgindo, trechos de texto foram sendo codificados e foram sobressaindo tendências, ideias fortes, resultados importantes, novas questões.

Em primeiro lugar, uma constatação incontornável: investigar o fenómeno de resolução de problemas de matemática com tecnologia, num ambiente extraescolar, perspetiva-se como um empreendimento de enorme complexidade. Por um lado, parece não existir na literatura um entendimento comum sobre o que é a resolução de problemas de matemática, uma definição globalmente aceite ou uma única forma de a caracterizar. Lidar com esta inevitabilidade é um desafio e implicará ter presente, quase em permanência, a necessidade de apresentar e clarificar as opções tomadas.

> A questão, o que é a resolução de problemas, não pode ter uma resposta unânime; depende muito dos interesses pessoais e da filosofia. (Downs & Downs, 2005, p. 385).

> De facto, a resolução de problemas pode assumir diferentes identidades em diferentes teorias didáticas ou em períodos distintos. Tal como não conseguimos dar uma definição única de matemática . . . também não podemos dar uma definição única e comum de resolução de problemas. (Grugnetti & Jaquet, 2005, p. 373).

E não menos importante é o facto de escassearem investigações que abordem explicitamente o papel das tecnologias digitais nos processos de resolução de problemas de matemática. Apesar de não se conhecer muito sobre as formas de apoiar os alunos nessa atividade, vários investigadores têm destacado o lento aparecimento de quadros teóricos coerentes que guiem a investigação e essa prática na sala de aula (Barrera-Mora & Reyes-Rodríguez, 2013; Kim & Hannafin, 2011; Santos-Trigo, 2007).

A grande maioria dos investigadores cujos trabalhos foram analisados identifica a resolução de problemas como uma importante capacidade matemática, de grande exigência cognitiva, e indispensável ao exercício de uma cidadania plena na sociedade tecnológica em que vivemos. Também uma esmagadora maioria destes investigadores investe em estudos que se debruçam sobre a resolução de problemas em sala de aula, embora não negligenciem a importância de se estudar este fenómeno noutros contextos. O papel que a tecnologia assume na resolução de problemas abordada nestes estudos é também diversificado. A pesquisa bibliográfica, que embora extensa nunca poderia ser exaustiva, deixa antever tendências. Por um lado, a resolução de problemas com tecnologias pode servir como contexto para o estudo da aprendizagem de um determinado conceito matemático (e.g., Persson 2013; Tabach & Friedlander, 2004; Yerushalmy, 2006), para o estudo do desenvolvimento de outras capacidades matemáticas, por exemplo, relacionadas com o raciocínio matemático, como a formulação de conjeturas, a justificação ou a demonstração (e.g., Baccaglini-Frank & Mariotti, 2009, 2010; Hong-chan & Hee-chan, 2006); com as representações (Tabach & Friedlander, 2004) ou com processos de modelação (Bonotto, 2002, 2005; Doerr & Zangor, 2000). Por outro lado, outros estudos há que se debruçam sobre o papel da ferramenta tecnológica que sustenta a atividade de resolução de problemas, com foco nas estratégias desenvolvidas (Haug, 2012; Iranzo & Fortuny, 2011; Koyuncu, Akyuz & Cakiroglu, 2015; Lee & Hollebrands, 2006). Num nível ainda mais específico, alguns autores procuram interligar o uso das ferramentas com as diferentes fases da resolução de problemas definidas com base num determinado modelo (e.g., Harskamp & Suhre, 2007; Papadopulos & Dagdilelis, 2008).

Deste modo, parece oportuno procurar compreender, com maior detalhe, a utilização de tecnologias para resolver problemas, em particular, de que forma os jovens abordam problemas matemáticos com uma ferramenta tecnológica e qual o papel dessa ferramenta ao longo dos processos que conduzem à solução.

Em segundo lugar, constato que a *dimensão social da aprendizagem* atravessa diversos destes estudos sobre resolução de problemas com tecnologias. Nuns casos, os investigadores procuram compreender aspetos do trabalho colaborativo entre estudantes durante a resolução de problemas mediada por uma ferramenta tecnológica, centrando-se em aspetos da comunicação matemática, da discussão e análise crítica de soluções em sala de aula (Doerr & Zangor, 2000; Hurme & Järvelä, 2005; Hwang, Chen & Hsu, 2006; Santos-Trigo, Camacho-Machín & Moreno-Moreno, 2013); um deles foca-se especificamente nas normas sociomatemáticas que brotam na sala de aula aquando deste tipo de atividade (Partanen & Kaasila, 2015); e há ainda outros que analisam as interações entre o aluno, ou grupos de alunos, e as ferramentas que usaram para resolver problemas (Freiman, Vézina & Gandaho, 2005; Hong-chan & Hee-chan; 2006; Jones & Smith, 1999, 2000; Paiva, Amado & Carreira, 2014; Stahl, 2009, 2013). Diversos outros trabalhos de investigação, alguns ensaios de natureza mais teórica, colocam uma forte tónica na relevância dos contextos sociais e culturais no desenvolvimento do pensamento matemático, na forma como os jovens incorporam conhecimentos ou raciocínios não convencionais, fruto dessas experiências exteriores à sala de aula, na resolução de problemas (Bonotto, 2005; Carreira, Jones, Amado, Jacinto & Nobre, 2016).

Importa pois desenvolver uma rede de conceitos que permita compreender a 'atividade' de resolução de problemas com tecnologias desenvolvida pelos participantes no SUB14, isto é, a teia de relações entre os jovens e as tecnologias que eles usam para obter as soluções dos problemas, como são moldadas pelas próprias regras da competição e pelo contexto social e cultural em que se encontram, ou ainda que papéis assumem os familiares ou professores nesses processos enquanto membros da comunidade extraescolar na qual decorre a atividade.

Um outro aspeto que sobressaiu em diversos dos estudos analisados diz respeito à utilização e até combinação de várias formas de expressividade do pensamento matemático, mediadas pelas tecnologias digitais. As ferramentas ora podem dificultar ou impedir essa expressividade, ora podem facultá-la. Por exemplo, apesar de poder ser considerada um computador, a calculadora gráfica TI-Nspire apresenta uma interface em que se torna complicado registar descrições detalhadas ou expressões matemáticas – o que já não acontece quando se recorre a um emulador da mesma calculadora, devido à possibilidade de utilizar teclado e rato e ainda recorrer a outros programas (Persson, 2013). Vários outros estudos apontam para a necessidade de documentação detalhada dos processos de resolução dos problemas e para a eficácia da utilização simultânea de formas de expressar o pensamento matemático, combinando texto, imagens e voz (Haug, 2012; Hwang, Chen & Hsu, 2006; Stahl, 2009).

Nas soluções submetidas pelos concorrentes do SUB14 abunda uma diversidade de representações – desde o texto, fórmulas, tabelas, esquemas, imagens, ícones, ao uso das cores ou outros aspetos de formatação – pelo que antevejo ser oportuno desenvolver uma ideia mais precisa de como se relaciona o uso de tecnologias para resolver problemas com as formas que os jovens encontram para expressar o pensamento matemático que desenvolvem durante essa atividade.

Nos estudos analisados são também frequentes as comparações entre o uso do papel-e-lápis e de ferramentas tecnológicas. Com o uso de papel-e-lápis para resolver problemas, os investigadores compararam o de ambientes de geometria dinâmica (Koyuncu, Akyuz & Cakiroglu, 2015), o de folha de cálculo (Hong-chan & Hee-chan, 2006; Tabach & Friedlander, 2004), ou o uso combinado do Cabri, Paint e GeoComputer (Papadopulos & Dagdilelis, 2008). É interessante notar que, nuns casos, a comparação é intencional e, por isso, é implementada uma metodologia bem definida em que se pode recorrer, por exemplo, a um *design* do tipo pré-teste-pós-teste em papel e a intervenção que permeia esses testes é desenvolvida com recurso a ferramentas digitais (Harskamp & Suhre, 2007; van den Heuvel-Panhuizen, Kolovou & Robitzsch, 2013). Porém, noutros casos, a comparação surge como um aspeto colateral à investigação, não sendo um propósito explícito do investigador (e.g., Hong-chan & Hee-chan, 2006; Tabach & Friedlander, 2004). Alguns resultados apontam que os alunos com mais dificuldades preferiam iniciar as suas abordagens aos problemas recorrendo ao papel-e-lápis, apesar de terem à disposição um leque variado de tecnologias na sala, enquanto os melhores alunos usavam as ferramentas tecnológicas no início da abordagem ou para fazer verificações (Yerushalmy, 2006). Outros estudos revelam que a utilização de ambientes computacionais favorece o recurso a processos de verificação da solução, preteridos aquando da utilização do papel-e-lápis (Papadopulos & Dagdilelis, 2008), permite a exploração de propriedades globais ou generalizáveis, ao invés de propriedades locais como sucede com o papel-e-lápis (Doerr & Zangor, 2000), ou ainda favorece o uso de estratégias menos algébricas (Koyuncu, Akyuz & Cakiroglu, 2015) ou que seriam ineficazes mediante o uso de papel-e-lápis (Tabach & Friedlander, 2004).

A relação entre o aluno e a ferramenta tecnológica que usa para resolver problemas é uma constante nestes estudos, ainda que indiretamente abordada. De acordo com Artigue e Bardini (2010) o papel das tecnologias não se pode resumir no facilitar de conversões entre diferentes representações. Do mesmo modo, o pensamento matemático e a tecnologia usada na sua produção não devem ser vistos como domínios disjuntos. Por exemplo, Yerushalmy (2006) observou que a ferramenta gráfica e as suas particularidades passaram a fazer parte da argumentação e do raciocínio dos alunos e, no mesmo sentido, Hong-chan e Hee-chan (2006) constataram que as representações elaboradas com a folha de cálculo passaram a constituir-se como ferramentas conceptuais para a justificação de padrões encontrados. Stillman e Brown (2014) também observaram que o sucesso dos alunos em antecipar os conhecimentos que seriam necessários para resolver um dado problema envolve o serem capazes de perceber quais os conhecimentos matemáticos e as representações que determinada ferramenta tecnológica permite gerar e que são as apropriadas para obter a solução. Em suma, estes resultados vão ao encontro da ideia defendida por Schoenfeld (2013) de que as experiências anteriores transformam por completo quem vier a resolver um novo problema.

Deste modo, estes resultados sugerem que as experiências proporcionadas pelo uso das ferramentas tecnológicas – quer sejam em ambientes de aprendizagem informal ou formal – acabam por ser incorporadas na produção de pensamento matemático e, em última análise, trazidas para a resolução de problemas de matemática. Desta forma será importante encontrar ferramentas teóricas que permitam compreender, por um lado, a proximidade entre os indivíduos e as tecnologias que eles usam para produzir pensamento matemático e, por outro, procurar compreender que fatores subsidiam a escolha de uma dada ferramenta que se prevê útil e eficaz nessa atividade.

Os modelos descritivos dos processos de resolução de problemas mais frequentemente usados nesta seleção de estudos são os de Pólya e Schoenfeld, muito embora os investigadores não se tenham propriamente dedicado a analisar a sua eficácia ou a comentar a sua adequação mas, antes, a servir-se deles com outros propósitos mais vincados. Todavia, destes estudos retiram-se resultados que indiciam uma certa insuficiência destes modelos para descrever os processos seguidos pelos alunos quando recorrem a tecnologias digitais para resolver problemas de matemática. Por exemplo, Lee e Hollebrands (2006) observaram alunos que recorriam à tecnologia disponível durante os momentos iniciais de compreensão e exploração do problema, mas recorriam ao papel e lápis e a recursos matemáticos durante as fases de análise e planeamento, regressando depois ao ambiente digital para implementar ou verificar a solução encontrada. Por outro lado, Harskamp e Suhre (2007) concluíram que o ambiente tecnológico que desenvolveram teve maior eficácia quando os alunos se socorriam dele nas fases de planeamento e verificação. Já outros investigadores debruçaram-se sobre a influência do uso de tecnologias no desenvolvimento de estratégias para resolver problemas (Iranzo & Fortuny, 2011; Papadopulos & Dagdilelis, 2008; Tabach & Friedlander, 2004). No entanto, estes que são os modelos de resolução de problemas mais comummente aceites, parecem não explicar de forma satisfatória as ações empreendidas pelos estudantes (Barrera-Mora & Reyes-Rodriguez, 2013). Não só sugerem que as categorias incluídas nesses modelos de resolução de problemas devem ser revistas a fim de contemplar os aspetos que emergem da utilização dessas ferramentas, designadamente abordagens visuais ou informais (Barrera-Mora & Reyes-Rodriguez, 2013), como ainda devem ser ajustados e refinados os quadros conceptuais que visam explicar de que forma os alunos aprendem matemática com estas tecnologias (Santos-Trigo & Barrera-Mora, 2007).

Schoenfeld (2013), apesar de reconhecer que a experiência anterior transforma por completo quem resolve um novo problema, centra a sua preocupação na aprendizagem de capacidades que permitam aos alunos resolver problemas com ferramentas computacionais, não para que desenvolvam a sua fluência com essas tecnologias mas para que aprendam matemática nesse processo. Porém, algumas investigações aludem às dificuldades sentidas pelos alunos no decurso da resolução de problemas com tecnologias, ou seja, oferecem algumas pistas sobre a natureza da ineficácia das abordagens desenvolvidas. Em particular, identifiquei dois aspetos como centrais nas dificuldades dos alunos: a falta de conhecimentos sobre a ferramenta ou sobre como utilizá-la para desenvolver uma abordagem (e.g., Hurme & Järvelä, 2005), e ainda a falta de conhecimentos matemáticos adequados para resolver os problemas (e.g., Iranzo &

Fortunym 2011; Persson, 2013). Estes estudos apontam a necessidade de se olhar tanto para o conhecimento matemático como para o conhecimento sobre a tecnologia na resolução de problemas, o que está também explícito nos resultados de Tabach e Friedlander (2004) ao explicar os diferentes níveis de desempenho dos alunos observados a partir das suas capacidades matemáticas (no caso, o pensamento algébrico) e das suas capacidades para lidar com a ferramenta tecnológica (a folha de cálculo).

Ora descrever a 'resolução de problemas com tecnologia' implica a utilização de ferramentas de análise, teoricamente fundamentadas, que permitam caracterizar com detalhe cada processo dessa atividade. Torna-se assim necessário compreender com maior profundidade os modelos de resolução de problemas de matemática preconizados na literatura, avaliando possibilidades de neles incorporar alguns aspetos característicos do trabalho com tecnologias que possam ser relevantes para compreender o fenómeno em estudo como um todo. Para além disso, a complexidade do fenómeno de resolução de problemas de matemática tem sido tradicionalmente abordada com modelos que descrevem processos cognitivos, embora surjam pistas na literatura que indicam que os investigadores sentem a sua insuficiência quando a atividade de resolução de problemas é mediada por uma qualquer ferramenta digital (e.g., Santos-Trigo, 2007). Perante o facto de se analisar um conjunto de processos cognitivos que, aparentemente, são moldados pelo contexto social e cultural em que jovens e tecnologias se encontram, será necessário ponderar de que modo poderá ser feita a articulação de perspetivas teóricas para evitar a colisão entre pressupostos não conciliáveis (conf. Capítulo 1, Secção 1.6.3).

3

Quadro Conceptual

What is a conceptual framework and why all the fuss about whether you have one for your research project? Is it simply politically correct to have a conceptual framework or is there more to it?

(Eisenhart, 1991, p. 202)

Preâmbulo

De entre as várias discussões que animaram os trabalhos do grupo de jovens investigadores reunidos em torno do tema *Technologies and modelling in mathematics teaching and learning*, na Escola de Verão do YERME[13], sobressaiu uma em particular que abanou conceções e revelou equívocos: o que é um quadro teórico e qual é o seu propósito numa investigação em Educação Matemática?

Entre muitos outros, Eisenhart (1991) e Lester (2010) discutiram o papel que a teoria desempenha na realização de investigação em Educação Matemática. De um modo geral, um quadro – um *framework* – é “alguma forma coerente de pensar sobre como organizar e interpretar os dados” (Eisenhart, 1991, p. 204). Embora esta definição possa parecer suficientemente transparente e passível de pôr em prática, Lester (2010) lembra que o “desenvolvimento e o uso de um *framework* pode ser o aspeto menos compreendido do processo de investigação” (p. 69). Recorrendo à metáfora do andaime que suporta a construção de um edifício desde as suas fundações à cobertura, Lester (2010), refere:

> Também gosto de pensar num framework como sendo um andaime erigido para possibilitar reparações a ser feitas num edifício. Um andaime envolve o edifício e

[13] A 7.ª Escola de Verão do YERME (YESS 7) decorreu em Kassel, Alemanha, entre 4 e 11 de Agosto de 2014. Participei no grupo de trabalho com o tópico *Technologies and modelling in mathematics teaching and learning*.

> permite que os trabalhadores alcancem zonas que seriam inacessíveis de outra forma. Assim, um framework de investigação é uma estrutura básica de ideias (i.e., abstrações e relações) que servem de base ao fenómeno que vai ser investigado. Estas abstrações e as inter-relações (assumidas) entre elas representam os aspetos relevantes do fenómeno tal como determinado pela perspetiva de investigação que foi adotada. As abstrações e as inter-relações são então usadas como a base e a justificação para todos os aspetos da investigação (p. 69).

À semelhança de um andaime na edificação de uma casa, a teoria faz-se necessária em todos os momentos ou etapas de uma investigação – desde a escolha do problema a estudar e a sua contextualização, tendo em conta o estado da arte, passando pela perspetiva ou posicionamento do investigador, pelas suas opções de recolha e organização de informação, até à análise e interpretação dos dados. Amplamente citada, Eisenhart (1991) ofereceu uma desambiguação entre diferentes designações que encerram três perspetivas, também distintas, sobre o papel e o uso da teoria numa investigação: o quadro teórico, o quadro prático e o quadro conceptual.

O *quadro teórico* é definido por Eisenhart (1991) como uma "estrutura que guia a investigação ao basear-se numa teoria formal" (p. 205). O problema de investigação está fortemente ancorado na teoria selecionada, cuja agenda de investigação também determina em grande medida os procedimentos que o investigador adotará. Os resultados obtidos serão usados para "suportar, estender, ou rever a teoria" (p. 205). O *quadro prático*, não sendo informado por uma teoria formal, é encarado como um conjunto de conceitos, pressupostos e suas relações, os pontos de vista daqueles que estão diretamente envolvidos no campo empírico, com o propósito de guiar a investigação recorrendo "àquilo que funciona" naquele terreno (Eisenhart, 1991, p. 207), pelo que os resultados esperados da investigação assim produzida irão reverter para o contexto, isto é, para "suportar, estender, ou rever a prática" sob investigação (p. 208). Lester (2010) discute estes dois tipos de uso da teoria na pesquisa, argumentando que têm deficiências graves. Por um lado, os quadros teóricos são, com frequência, demasiado rígidos, o que pode levar os investigadores a procurar formas de fazer encaixar os seus dados nos pressupostos da teoria que escolheram, muitas vezes ignorando informação potencialmente útil (p. 71). Isto leva ainda a que esses dados tenham que ser desnudados das suas singularidades ou significados particulares para poderem servir a teoria. Além de estarem impregnados por um discurso que não é funcional fora da academia, os quadros teóricos também não gozam do diálogo com outras tradições ou correntes, naquilo que Denzim (1978, citado por Lester, 2010) designou por triangulação teórica –

uma compilação de perspetivas teóricas relevantes e a apreciação das suas vantagens e desvantagens na investigação que se pretende empreender. Por outro lado, os quadros práticos permitem obter resultados que só são generalizáveis localmente, isto é, o investigador descobre 'aquilo que funciona' numa prática concreta e sob condições muito específicas, ficando por conhecer o fenómeno para além das perspetivas dos informantes que, com frequência, "não conseguem ver a floresta a partir das árvores" (p. 72).

Um *quadro conceptual*, à semelhança de um quadro teórico, é baseado na discussão de investigação produzida anteriormente e nos resultados obtidos. No entanto, um quadro conceptual distingue-se por incorporar uma variedade de fontes e perspetivas com base em diferentes teorias, destacando-se assim o papel do investigador em selecionar o que será relevante e importante para o problema que se encontra a estudar.

> Um quadro conceptual é uma argumentação que inclui vários pontos de vista e que culmina numa série de razões para adotar alguns pontos – i.e. algumas ideias e conceitos – e não outros. As ideias e conceitos adotados servem então de guias: para a recolha de dados num determinado estudo e/ou para as formas pelas quais os dados do estudo, em particular, serão analisados e explicados (Eisenhart, 1991, p. 209).

De acordo com Eisenhart (1991) e Lester (2010), além de subsidiar uma explicação de um fenómeno, esta estrutura teórica tem como função traçar um esboço de uma justificação das escolhas feitas pelo investigador. Isto significa que um quadro conceptual não visa apenas estruturar a descrição de um fenómeno, mas também facultar argumentos que permitam compreendê-lo em toda a sua extensão, com base em diferentes linhas teóricas e suas possíveis relações, acomodando as perspetivas dos vários intervenientes. Cabe ao investigador encontrar a coerência necessária entre essas perspetivas de forma a construir uma argumentação que valide as explicações encontradas.

Lester (2010) aponta algumas vantagens na utilização de um *framework*: proporciona uma estruturação tal que a partir dela é possível perceber a rede de perspetivas e conceitos em torno do fenómeno e, simultaneamente, esboçar o *design* do estudo; é indispensável para que as informações recolhidas se possam transformar em dados; possibilita suplantar o senso comum; permite desenvolver uma compreensão aprofundada do fenómeno que vai além do mero encontrar de uma resposta para o problema local sob investigação (pp. 69-70).

Como referi anteriormente (secção 1.5), o fenómeno que me encontro a estudar – a atividade de resolução de problema com tecnologias que decorre no âmbito do SUB14 –

tem características que remetem para a adoção de perspetivas cognitivas, embora esta atividade seja, simultaneamente, marcada por um forte cunho sociocultural. Não seria possível traçar uma perspetiva holística deste fenómeno se optasse por uma destas vertentes teóricas, com traços tão distintos desde a sua génese. Quanto muito, essa opção traria alguns riscos. A minha previsão é a de que, se enveredasse estritamente por uma corrente sociocultural iria obter uma compreensão mais profunda sobre a teia de relações entre os jovens que resolvem problemas, as ferramentas tecnológicas e matemáticas que utilizam para abordar determinado problema, o envolvimento das suas famílias ou professores na fase de apuramento do campeonato e a sua influência no desempenho dos jovens na resolução de problemas. Porém, não teria acesso a outro tipo de conhecimento, que emerge sustentado em perspetivas cognitivas da aprendizagem: os processos de resolução de problemas, o desenvolvimento de um modelo conceptual, a seleção de uma ferramenta específica e a perceção da sua adequação ao tipo de problema.

Embora compreenda a sensação de 'falta de qualificações' para desenvolver um quadro conceptual, tal como Lester (2010) refere que é comum acontecer entre os investigadores noviços, percebo a importância e as vantagens deste empreendimento que, em certa medida pode ajudar a reduzir as inquietações e reflexões que registei na secção 1.6. Assim, a discussão teórica que a seguir apresento teve a sua origem na revisão da literatura apresentada na secção anterior, tendo permitido situar este trabalho no panorama de produção de conhecimento levada a cabo pela comunidade de educadores matemáticos e identificar e selecionar os temas de investigação que se afiguram como realmente relevantes aprofundar. Pretendo que as ideias fortes que então emergiram se convertam agora em argumentos que clarifiquem o meu posicionamento para justificar aquilo que considerarei como evidência. Recorrendo à metáfora do andaime, esta estruturação de conceitos e suas relações servirão de base ao fenómeno em estudo, embora possa vir a ser 'reparada' fruto do seu diálogo com os dados empíricos. Tal como referiu Schoenfeld (2011),

> Um framework diz-lhe *o que olhar* e qual *o impacto que isso poderá ter* (p. 4, grifos meus).

Da revisão do estado da arte ficou a descoberto uma clara preocupação dos investigadores com a dimensão social da aprendizagem. É possível perceber de antemão, e com suporte em estudos anteriores (Jacinto, 2008; Jacinto, Amado & Carreira, 2011, Jacinto & Carreira, 2012), que o campeonato de resolução de problemas SUB14 goza de um conjunto de particularidades que influenciam a atividade de resolução de problemas de matemática que aí decorre. Para compreender a atividade de resolução de problemas com tecnologias, neste contexto, é necessário recorrer a ferramentas teóricas que permitam, em primeiro lugar, identificar as características culturais e sociais do contexto que influenciam esta atividade e, não menos importante, possam ser usadas como instrumento de análise que ofereça a robustez necessária a essa compreensão. Na secção que se segue discuto a ideia de que 'fazer matemática' é uma atividade inerentemente humana, marcada pelos contextos socioculturais envolventes, e examino as potencialidades da Teoria Histórico-Cultural da Atividade como ferramenta que me poderá oferecer a teia de relações necessária para descrever o fenómeno que pretendo estudar – a resolução de problemas de matemática com tecnologias no âmbito do SUB14 – do ponto de vista sociocultural.

3.1 A atividade matemática como ponto de partida

Desde a Antiguidade que a Matemática tem surgido como resposta às tentativas de interpretação e organização do mundo, pelo que o ato de fazer matemática se pode identificar com uma atividade humana, baseada nos conhecimentos empíricos do sujeito. No livro *What is mathematics really?*, Hersh (1997) dizia-se convicto de que a Matemática surge como uma *atividade humana*, que decorre de fenómenos sociais, impregnando-se de tal forma na cultura e na história da humanidade, que apenas é possível apreender a sua essência à luz dos contextos sociais envolvidos. Esta é também a visão que Freudenthal exprimiu numa das suas mais conceituadas obras: *Revisiting Mathematics Education*. Na sua perspetiva, a Matemática é uma atividade essencialmente humana, que nasce da experiência vivencial do indivíduo, é naturalmente mediada pelo senso comum, e conduz a uma matematização da realidade que guia o sujeito, da simples observação e interpretação do fenómeno à sua estruturação e formalização mais abstrata.

Muitos outros autores têm reconhecido a importância de explorar situações matemáticas tendo como ponto de partida o senso comum, a experiência do indivíduo e a sua interpretação da realidade (Hersh, 1993, 1997; Ernest, 1993; Tymoczko, 1993; Matos, 2005; Ness, 1993). Mason (1990) encara este tipo de evolução do conhecimento como sendo o movimento matemático usual, explicando que se "começa por contar e manipular números, depois encontram-se generalizações que se podem posteriormente descrever. Essas expressões transformam-se então em objetos manipuláveis [...] e é deste modo que a complexidade e a utilidade da Matemática são construídas” (p. 45).

Schoenfeld (1994) mostrou-se convicto de que o domínio de ferramentas matemáticas, como a abstração, a representação ou a manipulação simbólica, não é sinónimo de ser-se capaz de pensar matematicamente. Por ‘pensamento matemático’, considerava o *desenvolvimento de um ponto de vista matemático* e ainda o *desenvolvimento de capacidades através do uso de ferramentas* que visam auxiliar a compreensão. O pensamento matemático depende de uma variedade de componentes entre as quais Schoenfeld destacou: os conhecimentos nucleares, as estratégias de resolução de problemas, o uso eficaz de recursos próprios, a adoção de uma perspetiva matemática e o envolvimento ativo na prática do pensamento matemático. Nesta linha, a educação matemática deveria proporcionar experiências capazes de desenvolver as capacidades indispensáveis, relacionadas com essas componentes essenciais. É, portanto, dessa experiência – dessa *atividade* – que nasce o conhecimento matemático.

O envolvimento que Schoenfeld defendeu como necessário à prática do pensamento matemático vai ao encontro do que Freudenthal (1973) designou por processos de *matematização*, isto é, reflexões sobre a realidade que levam à sua compreensão e modificação, através da (re)construção e da (re)organização de conteúdos ou métodos matemáticos. Portanto, esses processos permitem descrever os fenómenos através de termos matemáticos, de forma a lidar com a realidade e a poder agir, em consonância, sobre ela. Foi precisamente esse tipo de atividade que Freudenthal declarou fundamental para a aquisição e consolidação de conhecimentos matemáticos. O ensino da Matemática deveria, pois, promover a organização de fenómenos em estruturas matemáticas, o estudo dessas estruturas e a investigação de possíveis relações e transformações entre elas e os fenómenos observados. Importa ainda salientar que Freudenthal defendia que a linguagem formal, característica da Matemática, tem origem na identificação de relações e padrões observados nos fenómenos, na sua estruturação e representação. Essa linguagem formal sofre um desenvolvimento progressivo através de processos de reflexão, reestruturação e generalização.

Com base nas ideias de Freudenthal, Treffers (1987) introduziu os conceitos de *matematização horizontal* e *matematização vertical*. Só mais tarde Freudenthal se rendeu a esta distinção, concordando que existem diferenças quanto ao nível a que as matematizações são operadas. Assim, a matematização horizontal é encarada como o processo de exploração e interpretação de situações e problemas da realidade, que originam a formação de conceitos matemáticos. A matematização vertical surge como a formalização e relacionação desses conceitos, que podem ser alcançadas através da sua organização, classificação e generalização. A matemática nasce, assim, como um processo natural em que os matemáticos interpretam e organizam a realidade de acordo com as suas necessidades e preferências. Da mesma forma, é possível afirmar que as crianças matematizam, isto é, reinventam a matemática à sua maneira, de acordo com as suas características individuais, sob a influência dos ambientes nos quais estão inseridas. Freudenthal acreditava que qualquer aluno seria capaz de descobrir toda a matemática que viesse a necessitar ao longo da sua vida, desde que lhe fosse permitido colocar-se no lugar de um pioneiro matemático que investigaria e descobriria algo novo para si próprio, mas sobejamente conhecido pelo seu professor. Nascia assim o 'princípio da reinvenção guiada' e, com as reflexões e propostas de Freudenthal, surge a corrente holandesa que hoje é conhecida por Educação Matemática Realista.

Freudenthal reiterava ainda que tanto a descoberta do caminho como a da prova serão mais fiáveis se a construção dos objetos matemáticos ocorrer mediante processos de socialização, envolvendo a discussão e a partilha de ideias. Na verdade, inúmeros documentos orientadores assumiram esta perspetiva que encara a Matemática como atividade humana e que, em particular, propõe a atividade dos alunos como central na sua aprendizagem da Matemática. Por exemplo, em 1989, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) publica um trabalho reconhecido mundialmente e que foi catalisador de inúmeras mudanças curriculares em vários países: *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Nas primeiras páginas, assume-se que:

> Em certa medida, toda a gente é um matemático e faz matemática de forma consciente. Fazer compras no mercado, medir uma tira de papel de parede, ou decorar um vaso com um padrão regular é fazer matemática. A matemática escolar deve munir todos os alunos com a perceção de que fazer matemática é uma atividade humana. (NCTM, 1989; p. 6).

Esta reflexão sugere, assim, que o conceito de 'atividade' é entendido como fulcral para a aprendizagem da Matemática, pelo que importa começar por clarificá-lo. De imediato surge como inevitável procurar uma compreensão da natureza da atividade que é desempenhada pelos indivíduos na presença de ferramentas tecnológicas e em que medida a atividade humana se altera, decorrente desse uso, sobretudo, no que ao pensamento matemático diz respeito.

3.1.1 A noção de 'atividade' numa perspetiva sociocultural da aprendizagem

> **atividade** *s.f.* qualidade do que é ativo; faculdade de exercer uma ação . . . conjunto de atos ligados ordenadamente para a realização de um determinado fim.[14]

É precisamente na *ação* que as perspetivas socioculturais se concentram para abordar e estudar a mente humana (Wertsch, 1991). Esta centralidade da ação permite perspetivar o ser humano em interação com o mundo em seu redor e considerar que essas interações são uma forte influência no seu desenvolvimento ou aprendizagem. Aliás, diversas são as correntes que se baseiam no pressuposto de que é impossível compreender o funcionamento da mente humana ao olhar de forma isolada para o ser humano ou então para o meio em que se insere. As correntes "tomam a ação e a interação como categorias analíticas básicas e consideram que daí emerge o funcionamento da mente humana e do meio ambiente" (Wertsch, 1991, p. 9), ou seja, é apenas a partir da interação entre um sujeito e o meio envolvente que se consegue observar ou estudar o seu pensamento. Esta questão será retomada adiante, aquando da discussão das relações, interações e possibilidades de ação entre o ser humano e as ferramentas digitais.

Uma das correntes que surgiu com o propósito de se debruçar sobre a *atividade* – no sentido de agir para transformar – é a designada Teoria Histórico-Cultural da Atividade. Tendo início com os trabalhos de Vygotsky, nos anos 20 do século passado e inspiração na filosofia de Marx, a Teoria da Atividade (TA) foi continuada e ampliada por Leont'ev e Luria, entre outros. Kuuti (1996) entende esta corrente como um quadro filosófico transdisciplinar que possibilita estudar as práticas humanas como processos de desenvolvimento, quer ao nível do indivíduo quer do social, considerando que estes níveis estão simultaneamente interligados.

À semelhança de outras correntes que se debruçam sobre fenómenos sociais, a TA adotou a ação humana como unidade de análise. Contudo, procurar compreender uma ação isolada revelou-se impraticável, uma vez que cada ação parecia estar sempre situada

[14] Excerto do Dicionário da Língua Portuguesa com Acordo Ortográfico [em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2015. Disponível em http://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/atividade.

num determinado contexto. Assim, esta teoria propõe que se considere a *atividade* como *unidade de análise*, isto é, não só a ação ou o conjunto de ações, mas também o contexto histórico e cultural indispensável à compreensão do seu significado. É conveniente notar que o objeto de estudo tem sempre uma natureza coletiva pois, mesmo que o foco da análise recaia sobre as ações de um indivíduo, o contexto faz parte integrante da unidade de análise, conforme salienta Kuuti (1996).

Nesta linha, a atividade é composta pelo *sujeito*, ou seja, a(s) pessoa(s) que age(m); por um *objeto*, isto é, um propósito, uma necessidade ou um desejo que desencadeia a atividade; por *ações*, que são os processos conscientes regidos pelo objetivo e que conduzem à sua realização; e *operações*, ou seja, as rotinas bem definidas que são utilizadas em resposta às condições que surgem aquando da realização de uma ação. Embora as operações possam começar por ser conscientes, a prática leva à construção de modelos que acabam por possibilitar que uma ação, um conjunto de operações, passe a ser encarada como uma nova operação – desenvolvendo-se fluência no desempenho dessa atividade (Kuuti, 1996; Nardi, 1996).

3.1.2 O papel do artefacto cultural e a 1ª Geração da Teoria de Atividade

Engeström (1987, 1991, 2001) discutiu e sistematizou a evolução da Teoria da Atividade, fazendo notar o diálogo convergente entre diferentes disciplinas académicas, no início do século XIX, no que diz respeito ao impacto dos fenómenos sociais, culturais e históricos no desenvolvimento da atividade humana.

Nos seus trabalhos, Engeström considera que nessa evolução da investigação é possível identificar três gerações. A designada 1ª Geração da Teoria da Atividade é essencialmente atribuída a Vygotsky. Nesta perspetiva, toda a ação orientada para um determinado objeto ou motivo é desenvolvida por meio de artefactos culturais e dela resulta um produto (Figura 3.1). Vygotsky introduziu assim o conceito de mediação, assumindo que o sujeito não age diretamente sobre o meio ambiente, mas antes, que essa ação é mediada por um artefacto cultural (ex.: linguagem ou outros signos; instrumentos, como um computador; métodos ou procedimentos, como uma operação aritmética). Conforme refere Vygotsky (1930, citado por Engeström, 1987, p. 47),

> Cada forma elementar de comportamento pressupõe uma reação direta à tarefa definida perante o organismo (que pode ser expressa com a simples fórmula E - R). Mas a estrutura de operações com signos requer uma ligação intermediária entre o

estímulo e a resposta. Este elo intermediário é um estímulo de segunda ordem (signo) que é atraído para a operação em que cumpre uma função especial; cria uma nova relação entre E e R. O termo "atraído para" indica que um indivíduo deve estar ativamente envolvido no estabelecimento de tal elo. O signo também possui a importante característica de ação inversa (isto é, opera sobre o indivíduo, não o meio ambiente).

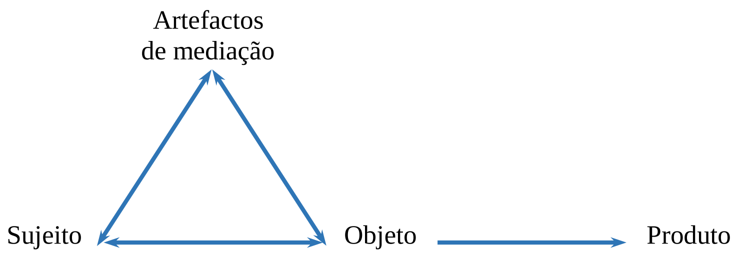


Figura 3.1. A estrutura de uma ação mediada (1.ª geração da Teoria da Atividade)

Wertsch (1991) discute igualmente a noção de ação mediada, enquadrada numa abordagem sociocultural da mente humana. Propõe como unidade de análise a pessoa-que-age-com-artefactos-de-mediação, o que em certa medida encontra paralelo na proposta de Vygotsky e da TA, argumentando que "desta perspetiva, qualquer tendência em centrar a análise exclusivamente na ação, no(s) sujeito(s), ou no artefacto mediador, isoladamente, é enganadora" (p. 119). É ainda importante notar que os artefactos são criados e transformados em resultado da atividade, pelo que estão impregnados de características culturais ou históricas que podem revelar precisamente esse desenvolvimento. Assim, Engeström (1991, p. 12) sugere que os artefactos devem ser estudados "enquanto componentes integrantes e inseparáveis do funcionamento humano". Todavia, o artefacto pode assumir tanto um papel capacitativo como limitativo. Se, por um lado, a carga histórico-cultural cristalizada nessa ferramenta pode estimular a atividade do sujeito, também pode, por outro lado, restringi-lo às possibilidades de ação com aquele artefacto, permanecendo invisíveis ao sujeito outros aspetos do objeto ou motivo (Kuuti, 1996). Wertsch (1991) sublinha que as potencialidades do artefacto não dependem unicamente do mesmo, mas especialmente da forma como o sujeito a ele recorre ao longo da atividade. Desta forma, o artefacto de mediação está inerentemente relacionado com a ação empreendida pelo sujeito e é impossível dissociá-los.

3.1.3 O papel do contexto e a 2ª Geração da Teoria de Atividade

Valorizando a importância do contexto cultural e histórico no desenvolvimento do ser humano, Leont'ev (1974) continua os trabalhos de Vygotsky. Concordando que a atividade não é uma reação comportamental ou uma adaptação do indivíduo a condições ambientais, Leont'ev defende que, pelo contrário, tratando-se de uma "unidade molar, não aditiva" (p. 10), consiste num conjunto de ações que o sujeito empreende, consciente e propositadamente, que são mediadas por artefactos e resultam num produto.

Recorrendo à teorização de Leont'ev e ao triângulo de mediação proposto por Vygotsky (1978), Engeström (2001) ampliou essas perspetivas e propôs um novo modelo de representação no qual se assume a atividade como um sistema composto por três elementos – o sujeito, a comunidade e o objeto – bem como as relações de mediação existentes entre eles (Figura 3.2). Tal como os artefactos de mediação podiam ser diversos e de diferentes naturezas (ex.: a língua portuguesa ou uma calculadora), as regras devem aqui entender-se como as convenções ou relações sociais existentes no seio da comunidade e a divisão de estatuto como a organização inerente que faculta a transformação do objeto no produto.

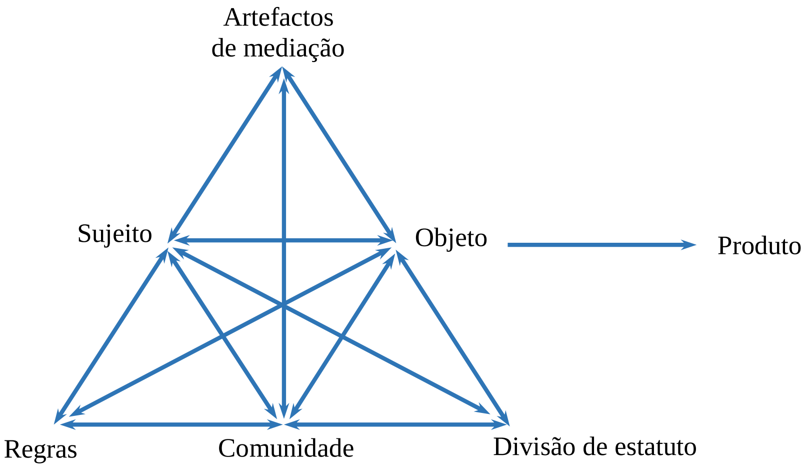


Figura 3.2. A estrutura da atividade humana (Engeström, 1987, p. 78)

Como identificam Engeström (1987) e, mais tarde, Cole e Engeström (1993), os elementos centrais que constituem um sistema de atividade são: (i) o *sujeito*, que pode ser um indivíduo ou um conjunto de indivíduos, cuja atividade é escolhida como unidade de análise; (ii) o *objeto*, isto é, o elemento para o qual a atividade do sujeito é dirigida e cuja transformação resulta num produto; (iii) os *artefactos de mediação* ou instrumentos, que são os recursos culturais ou conceptuais relevantes para a atividade do sujeito e para os processos de transformação do objeto; (iv) as *regras*, que se referem às normas expressas de forma explícita ou implícita, às convenções ou leis, que limitam ou regulam todas as ações do sujeito sobre o objeto; (v) a *comunidade*, que engloba vários indivíduos ou grupos de indivíduos, relativamente organizados e relacionados, e que partilham interesse pelo mesmo objeto; e (vi) a *divisão do estatuto*, que diz respeito à distribuição de tarefas, papéis, poderes ou estatutos pelos membros da comunidade. Resumindo, a relação entre o sujeito e o objeto é mediada pelos artefactos de mediação, a relação entre sujeito e a comunidade em que se insere é mediada pelas suas regras, e a relação entre a comunidade e o objeto é mediada pela divisão de estatuto entre os membros da comunidade.

3.1.4 A Teoria da Atividade no estudo da resolução de problemas com tecnologias

Desta incursão pelos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural da Atividade, uma perspetiva teórica que visa explicar os processos da atividade humana num dado contexto, parece adequado reter alguns conceitos elementares da sua 2ª geração para estudar a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias que decorre no seio do SUB14, a um nível macroscópico.

A Teoria de Atividade oferece uma teia de noções e relações que permitem considerar o campeonato SUB14 como um sistema de atividade e descrever, de forma holística, a atividade dos jovens participantes enquanto desenvolvem a sua atividade de resolução de problemas, mediada por ferramentas matemáticas e tecnológicas. Portanto, não só permite identificar as características do *contexto* em que a atividade se insere como possibilita desvendar a sua influência na própria atividade de resolução de problemas, isto é, na forma como o sujeito recorre aos artefactos de mediação para desenvolver uma forma produtiva de pensar e encontrar uma solução para cada problema. De um modo geral, aquilo que motiva estes jovens a participar no campeonato, ou na linguagem própria da TA, o *objeto* desta atividade matemática, é vencer o desafio que cada problema e a própria competição lhes proporcionam ao longo da fase de apuramento. O envolvimento na atividade de resolução de um dado problema, sendo consciente e orientada por um dado objetivo, conduz a transformações nas atitudes, no envolvimento ou no desempenho dos participantes – aquilo que Leont'ev (1978) designava por 'processos de adaptação'. Essas alterações são decorrentes das *regras* que estipulam as práticas ou as normas de participação nesta *comunidade*, em concreto, permitem aferir o que é resolver problemas de matemática neste contexto e o que é aceitável submeter como solução de um problema. Esta atividade também inclui as relações com diversos membros da comunidade, pelo que importa retratar a divisão de estatuto (ou papéis) entre os jovens participantes, os seus professores, familiares ou até mesmo os organizadores do campeonato, para compreender a sua influência na resolução de problemas de matemática com tecnologias.

Todavia, as potencialidades da TA vão além do simples proporcionar de uma ferramenta de análise, de forte base teórica, para construir uma perspetiva global da atividade que pretendo compreender. Na verdade, os pressupostos da Teoria da Atividade que escolhi apresentar atrás já são, eles próprios, um convite a uma discussão mais aprofundada sobre diversos aspetos que caracterizam esta atividade tão peculiar.

Adotar como unidade de análise a atividade, melhor dizendo, a ‘atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias’ significa reconhecer que o meio cultural e social em que ela emerge faz parte integrante dessa unidade. Da mesma forma, os artefactos de mediação incorporam essa mesma unidade de análise, pelo que o sujeito e o instrumento que utiliza não podem ser vistos numa ótica de disjunção. Importa assim compreender com mais detalhe ‘quem’ é o ‘autor’ desta atividade, que Wertsch (1991) designava por “sujeito-que-age-com-artefactos-de-mediação” e que, à primeira vista, parece poder assumir atividades distintas consoante o meio sociocultural ou o artefacto que estiver disponível.

Embora as tecnologias da informação tenham sido desenvolvidas para substituir e automatizar operações humanas, torna-se também necessário discutir o seu papel nesta atividade de resolução de problemas. A Teoria da Atividade propicia uma conceptualização das ferramentas tecnológicas como artefactos que desencadeiam a própria atividade. Tal como refere Kuuti (1996), as tecnologias digitais tanto podem tornar possível e viável uma determinada atividade (por exemplo, o e-mail torna possível a submissão da solução dos problemas do campeonato), como podem potenciar a transformação do objeto de uma atividade, permitindo o envolvimento numa nova atividade que, de outra forma, não era possível empreender ou sequer prever. Assim, para compreender melhor esta relação entre individuo e artefacto de mediação, é necessário considerar o reconhecimento das possibilidades de ação com determinada ferramenta, orientadas para o objeto desta atividade.

Outra ideia crucial relacionada com os artefactos de mediação diz respeito ao tipo de discurso que pode ocorrer nesta atividade de resolução de problemas, e que pode conter características de abordagens mais informais ou ainda mais formais (o que se relaciona com a matematização horizontal ou vertical). Um exemplo é o da utilização de fotografias ou uma sequência de *slides* para ilustrar e comunicar um processo de resolução que dificilmente seria considerado convencional numa prática tradicional de resolução de problemas na sala de aula. Dado que as regras de participação permitem o recurso a qualquer artefacto, estas ferramentas tecnológicas podem ser usadas para definir estratégias exploratórias relacionadas com o conhecimento concreto dos jovens, para manipular, experimentar e criar – embora sejam ações e ferramentas referentes a um discurso exterior à sala de aula. Importa, portanto, compreender melhor o papel dos artefactos de natureza tecnológica na atividade de produção e comunicação das soluções dos problemas do campeonato.

Conforme comecei por referir nesta subsecção, a Teoria da Atividade oferece-me uma forma de operacionalizar uma leitura macroscópica do fenómeno que procuro estudar. Porém, interessa-me também conhecer com mais detalhe as formas como estes jovens participantes no campeonato SUB14 conjugam conhecimentos matemáticos e tecnológicos para desenvolver as suas abordagens aos problemas, o que requer uma conceptualização teórica que se afasta de perspetivas puramente socioculturais.

Tendo em conta que as grandes teorias de aprendizagem[15] foram desenvolvidas em épocas anteriores à massificação e disseminação de tecnologias digitais a que se tem vindo a assistir nas últimas décadas, faço eco da questão que João Filipe Matos (2013) lançou provocatoriamente à audiência do ProfMat 2013: será que as devíamos apelidar de *teorias para a aprendizagem com papel e lápis*? Enfatizando a necessidade de se ponderar seriamente a influência da inclusão de uma tecnologia digital no processo de aprendizagem, Matos contestou a dualidade existente entre perspetivas marcadamente cognitivas *versus* as marcadamente sociais. Na realidade, a investigação já vem a reconhecer esta dualidade há bastante tempo e, em consequência, a procurar formas de lidar com ela. Em 2000, Carraher e Schliemann afirmavam:

> É importante providenciar uma análise social em consonância com uma cognitiva. Porque a tecnologia não age diretamente sobre os aprendizes, mas apenas exerce uma influência nas atividades sociais e contextos nos quais é empregada (p. 174).

Também Noss (2001) defendeu a conjugação e operacionalização de perspetivas:

> Uma componente chave deste e de trabalho futuro tem sido o forjar de relações orgânicas entre abordagens cognitivas e socioculturais, e a análise crítica de sistemas

[15] Sublinho que a Teoria da Atividade não é uma teoria preditiva nem visa explicar como se processa a aprendizagem.

de representação privilegiados favorecendo outras alternativas mais acessíveis (p. 43).

Na procura de um primeiro entendimento do fenómeno que tenho em mãos percebi a sua dupla natureza bem como as vantagens de encontrar uma forma, o mais harmoniosa possível, de lidar com ela e de tirar partido dela. Como discutirei ao longo deste capítulo, aspetos tradicionalmente vistos numa ótica construtivista – como o pensamento matemático, as abordagens, a expressividade e a representação, a fluência – não podem aqui ser estudados de forma alheada do contexto em que decorrem, onde estão fundeados.

Em suma, a primeira pedra angular deste quadro conceptual é talhada a partir das noções básicas da Teoria da Atividade, nomeadamente, de que a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologia integra as características pessoais de cada sujeito bem como as práticas sociais e culturais envolventes; é mediada por artefactos de mediação, que podem ser materiais ou não; e tem um caráter evolutivo, ou seja, sempre que algum dos seus elementos se transforma ou desenvolve, o desempenho nessa atividade evolui.

Para além da ideia de inseparabilidade entre sujeito e ferramenta digital na resolução de problemas, adotarei como unidade conceptual o *humano-com-media* para discutir as suas abordagens aos problemas, mediadas por tecnologias digitais. Assim, tanto o pensamento matemático como a sua expressão serão encarados a partir da sua relação com o poder representacional que as tecnologias digitais proporcionam. Um outro elemento fundamental deste quadro conceptual diz respeito à interação do sujeito com o artefacto digital, discutido em termos da capacidade para percecionar as possibilidades de ação com a ferramenta, considerando que estas residem tanto no objeto como no sujeito que se apercebe das suas vantagens. Por fim, e com um afastamento relativo desta perspetiva sociocultural, abordarei a resolução de problemas de matemática com tecnologias combinando dois modelos: um modelo de resolução de problemas matemáticos e um modelo de resolução de problemas tecnológicos.

3.2 Desenvolver pensamento matemático com tecnologias digitais

A inclusão de tecnologias digitais nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática é, há muito, propalada como indispensável à modernização das práticas de sala de aula, à preparação de indivíduos com cidadania ativa em pleno século XXI, ao aumento da motivação dos alunos e, naturalmente, à melhoria dos seus desempenhos académicos na disciplina.

Olive e Makar (2010) analisaram a influência das tecnologias digitais na natureza das práticas e do conhecimento matemático do ponto de vista dos alunos. Discutiram o conhecimento matemático e a aprendizagem que resultam do uso de tecnologias, o conhecimento matemático sobre o qual as tecnologias se baseiam, e as práticas matemáticas que são possíveis mediante o uso de tecnologia. Argumentando que o conhecimento e as práticas matemáticas estão profundamente relacionados e que essa ligação é mais forte na presença de tecnologias digitais, os autores observaram o seguinte:

> Se considerarmos a matemática um corpo fixo de conhecimento a ser aprendido, então o papel da tecnologia neste processo seria principalmente a de uma ferramenta de eficiência . . . No entanto, se considerarmos que as ferramentas tecnológicas providenciam acesso a novas compreensões de relações, processos e propósitos, então o papel da tecnologia diz respeito a um kit de construção conceptual (Olive & Makar, 2010, p. 138).

É neste último registo, que encontra eco nos trabalhos de outros investigadores a quem recorrerei adiante, que vou situar a discussão em torno do papel das tecnologias no desenvolvimento de pensamento matemático e, em última análise, na resolução de problemas de matemática propostos no SUB14. Muito para além de substituírem a escrita ou o cálculo com papel e lápis – caso particular de uma lógica que as considera amplificadoras das capacidades do ser humano – as tecnologias digitais podem também ser usadas de forma a tornarem-se *uma extensão do próprio indivíduo* no sentido em que este é capaz de incorporar competências tecnológicas como parte natural do seu repertório matemático (Goos, Galbraith, Renshaw & Geiger, 2003, p. 80). As próximas secções visam ampliar o suporte desta perspetiva, que é aquela com a qual pretendo encarar a relação entre os jovens que resolvem problemas de matemática e as tecnologias que escolhem usar nesses processos.

3.2.1 A relação 'sujeito – ferramentas' num sistema de atividade

Assumindo que as tecnologias digitais podem ser uma extensão do próprio indivíduo no que à produção de pensamento matemático diz respeito, e em particular, durante a resolução de problemas, é importante começar por reconhecer que da atividade mediada por tecnologias específicas podem emergir diferentes tipos de conhecimento. Assim, um uso eficiente destas tecnologias assenta no reconhecimento adequado das suas possibilidades de ação[16] (*affordances*).

Embora tenha sido cunhada por Gibson (1979), esta expressão tem sido usada para definir o conjunto de particularidades arrogadas a um dado objeto que convidam o indivíduo a executar uma ação sobre ele (Artigue, 2007; Noss, 2001). O conceito tem sido usado mediante diferentes perspetivas, principalmente para abordar questões relacionadas com as designadas interações homem-máquina, mas também é usado com frequência na literatura referente ao uso de tecnologias digitais na educação matemática (Brown, Stillman & Herbert, 2004; Drijvers, Godino, Font & Trouche, 2013; Trouche, Drijvers, Gueudet, & Sacristan, 2013).

Gibson definiu esta noção quando procurava compreender o que motiva o comportamento humano, adotando uma abordagem ecológica que determina que a perceção do meio ambiente envolvente provoca necessariamente um qualquer tipo de ação (Martinovic, Freiman & Karadag, 2013). Em oposição às perspetivas cognitivas da altura, Gibson (1979) explicou que a forma como percecionamos o significado ou o valor de algo é tão imediato como percecionar a sua cor: "*each thing says what it is… a fruit says 'Eat me'; water says 'Drink me'; thunder says 'Fear me'*"[17], refere citando Koffka (Gibson 1986, p. 138). A valência de um objeto, quase como que um traço da sua fisionomia, é reconhecido pelas necessidades experienciadas pelo observador, por exemplo, a água convida a beber se o observador tiver sede. Embora Gibson reconheça que este conceito de *affordance* deriva de outros, tais como os de valência, convite ou demanda, faz notar que encerra uma diferença fundamental na medida em que a *affordance* de algo não se modifica de acordo com as necessidades do observador dado que este "*may or may not perceive or attend to the affordance, according to his needs, but the affordance, being invariant, is always there to be perceived*" (p. 139). Brown, Stillman e Herbert (2004) ilustram esta particularidade remetendo para a observação, de diferentes ângulos, de uma mesa retangular. A mesa não se altera mas aquilo que percecionamos da mesa altera-se. Este conjunto de invariabilidades num objeto, que são

[16] Na falta de tradução direta para Português da expressão *affordances*, uma expressão que mais se aproxima do seu significado seria a designação 'possibilidades de ação'. Apesar de recorrer a esta composição ao longo deste trabalho, a fim de simplificar o discurso irei usar, preferencialmente, a versão inglesa do termo.

[17] Optei por citar alguns trechos na sua versão em inglês de forma a melhor preservar o sentido original, que poderia ser desvirtuado pela tradução.

compreendidas pelo observador, representam a informação que especifica as suas *affordances*.

Apesar de a perceção das possibilidades de ação ser condição prévia para que exista atividade, nem sempre a sua existência determina que essa atividade ocorra. Desta forma, Gibson (1979) assume que as possibilidades de ação são interações entre o sujeito e o ambiente ou, tal como Greeno (1994) veio a designar, são "interações agente-sistema" (p. 338). As condições que tornam possível a interação entre o agente e outro sistema incluem, inevitavelmente, algumas propriedades do agente e algumas propriedades do sistema. Greeno (1994) ainda acrescenta que, se a expressão *affordances* se refere àquilo que existe no sistema que contribui para o tipo de interação que ocorre, então é necessário recorrer a outra noção que designe aquilo que existe no agente que também contribui para a mesma situação – e sugere a ideia de "capacidade" ou "aptidão" (p. 338). É igualmente interessante frisar que, assim, se constrói uma impossibilidade de separação entre as *affordances* do sistema ou objeto e as aptidões do agente, por outras palavras, as *affordances* e as aptidões não são passíveis de serem escrutinadas na ausência uma da outra.

A ideia seminal de Gibson, de que as *affordances* são recursos que o ambiente oferece ao sujeito que tem a capacidade de os percecionar e usar, tem sido desafiada por vários autores no campo da psicologia ecológica. Chemero (2001, 2003) tem defendido que as *affordances* não são nem propriedades do ambiente nem se encontram no ambiente, argumentando que percecionar *affordances* num ambiente é atribuir-lhe determinadas características: "perceiving affordances is *placing features*, seeing that the situation allows a certain activity" (Chemero, 2003, p. 187, grifo meu). Stoffregen (2003) também legitima a centralidade da teoria das *affordances* numa abordagem ecológica da perceção e da ação humana, propondo que uma definição formal do conceito de *affordances* enquanto propriedades que emergem do sistema sujeito-ambiente, ou seja, da interação do sujeito com o meio envolve:

> Para os seres vivos, a conjunção de propriedades particulares do animal com propriedades particulares do ambiente não conduz a uma atualização involuntária da ação possibilitada. As affordances são o que *é possível fazer*, não o que *se deve fazer*. (Stoffregen 2003, p. 119, grifos no original).

Esta relação entre contexto e sujeito, objetivada na noção de 'sistema', já estava patente na perspetiva de Gibson (1979) embora talvez num estágio embrionário. Para além disso, Gibson também já reconhecia que o conceito de *affordances* permite ultrapassar algumas questões de natureza dicotómica que ainda persistiam em algumas perspetivas psicológicas:

> A affordance corta com a dicotomia subjetivo-objetivo e ajuda-nos a compreender a sua inadequação. É tanto um facto do ambiente como um facto do comportamento. É ao mesmo tempo físico e psíquico, mas nenhum dos dois. Uma affordance aponta nos dois sentidos, para o ambiente e para o observador (Gibson, 1986, p. 129).

Sensivelmente na mesma altura, Don Norman discutiu estas ideias em diversas publicações, tendo vindo a influenciar fortemente a investigação no campo das interações homem-máquina. Numa edição revista e alargada do livro *The Psychology of Everyday Things*, inicialmente publicado em 1990, pode ler-se: "Uma affordance é uma relação entre as propriedades de um objeto e as capacidades do agente que determina de que forma o objeto pode eventualmente ser usado" (Norman, 2013, p. 11). Na perspetiva que Norman desenvolveu, a noção de *affordance* assume um caráter relacional, de dependência mútua, entre indivíduo e ferramenta. As *affordances percecionadas* resultam de uma interpretação que o indivíduo faz, com base nas suas experiências e nos seus conhecimentos anteriores, e que lhe permitem ganhar consciência do que pode fazer com determinada ferramenta (Norman, 1990, p. 219). Assim, para além das capacidades de quem exerce a ação, são igualmente determinantes outros fatores, como os seus objetivos, as suas crenças, os seus conhecimentos anteriores.

Agora partilhada por vários autores, esta perspetiva encerra a ideia de que as *affordances* não dizem respeito apenas às características 'fisionómicas' do objeto, mas antes às *possibilidades de ação* (Chemero, 2003; Stoffregen, 2003) ou ainda às *possibilidades de ação percecionadas* (Norman, 2013) que surgem das interações entre o sujeito e o objeto. Portanto, esta noção que sugere a indivisibilidade entre o sujeito que empreende a ação e o contexto, em coerência com os pressupostos da Teoria da Atividade, representa um traço proeminente das perspetivas ecológicas que rejeitam a dualidade pessoa/ambiente. Várias das ideias chave encontradas na teoria de Gibson têm sido abordadas na literatura respeitante a diversos aspetos da educação matemática, mas especialmente naquilo que se refere ao impacto das ferramentas tecnológicas na produção e no desenvolvimento de conhecimento matemático.

3.2.2 Uma nova entidade que resolve problemas com tecnologias

No virar do século surgiram diversas discussões e foram avançadas algumas perspetivas que procuravam descrever o impacto do acesso e do uso constante das tecnologias digitais na aprendizagem dos jovens utilizadores. Todavia, a discussão em torno das características destes jovens ávidos pelo mundo digital – apelidados de Nativos Digitais (Prensky, 2001), Homo Zappiens (Veen & Vrakking, 2006), ou a Geração Net (Tapscott, 2009), entre muitos outros – deslocou-se das características que os distinguem dos restantes indivíduos e do correspondente fosso digital, para se centrar num questionar das suas competências efetivas em utilizar a tecnologia para aprender, nomeadamente, em atividades no domínio da matemática. Como já foi referido, são diversas as perspetivas teóricas e analíticas que foram desenvolvidas no campo da Educação Matemática para descrever e compreender em profundidade o impacto deste tipo de tecnologia no desenvolvimento de pensamento matemático. Drijvers e colegas reconhecem esta proliferação e, de forma apaziguadora, afirmam:

> Está claro que nenhum quadro teórico único pode explicar todos os fenómenos no complexo cenário de aprendizagem da matemática num ambiente tecnologicamente rico. Diferentes quadros teóricos oferecem diferentes janelas sobre o fenómeno, e cada visão da paisagem pode ser saudável e valiosa. Na verdade, perspetivas diferentes podem ser complementares e, como tal, contribuir para "o quadro inteiro" (Drijvers et al., 2010, pp. 121-122).

Assim, parece-me oportuno e viável eleger como 'janela válida' a contribuição teórica de Borba e Villarreal (2005) tendo em atenção a natureza do contexto, isto é, a competição *online* de resolução de problemas de matemática, e do fenómeno que pretendo estudar – o envolvimento de jovens numa atividade extracurricular em que têm que recorrer a ferramentas tecnológicas e, simultaneamente, é necessário assumir um ponto de vista matemático sobre cada situação problemática.

Borba e Villarreal (2005), suportados nas ideias de Tikhomirov (1981), Lévy (1994) e também em consonância com a perspetiva de Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008), colocaram uma forte ênfase na ideia de que os processos mediados pelas tecnologias conduzem a uma reorganização da mente humana, propondo que o próprio conhecimento é um resultado da interação entre 'coletivos de indivíduos, tecnologias e o meio ambiente que os rodeia' e um 'fenómeno matemático'. Os autores rejeitam assim uma visão atomicista do conhecimento que, com frequência, leva a perspetivar as ferramentas tecnológicas como substitutas, assistentes ou complementares da atividade do ser humano. Esta rejeição está em linha com as ideias defendidas por Levy (1994) que, ao discutir as novas formas de atividade mediada por tecnologias, referia que o ciberespaço

> suporta tecnologias intelectuais que amplificam, exteriorizam e modificam o número de funções cognitivas do homem: memória (bases de dados, hiperdocumentos, ficheiros digitais de toda a ordem), imaginação (simulações), percepção (receptores digitais, telepresença, realidades virtuais), raciocínio (inteligência artificial, modelação de fenómenos complexos). (Levy, 2000, p. 167).

É conveniente fazer um apontamento, ainda que breve, para clarificar o que entendem estes autores por *tecnologia*. Lévy (1994; 2000; 2009) utilizou a noção de ‘tecnologias da inteligência’ com um sentido muito abrangente, que ultrapassa largamente o da ferramenta física com que digito este texto. Fazendo uma leitura histórica do papel de uma diversidade de artefactos – físicos, mentais, culturais – o autor explica como conceptualiza o papel destas tecnologias da inteligência na interligação entre os processos cognitivos e os sociais. Por exemplo, a escrita é uma tecnologia da inteligência que marca a transição entre a pré-história e a história, pois é aquando da sua invenção que se torna possível armazenar fisicamente uma memória coletiva de uma sociedade; outro exemplo é a invenção de sistemas fonéticos ou alfabéticos que conduziu a uma “extensão social das capacidades de escrita e leitura” (Levy, 2009, p.72); ou ainda a invenção dos numerais árabes, que transformou a aritmética e provocou o aparecimento de algoritmos, revelando “a importância dos sistemas simbólicos e de notação no desempenho de tarefas cognitivas” (p. 72); ou mais recentemente a invenção da imprensa, que veio a ter influência no desenvolvimento de padrões e sistemas de notação científicos, “como os mapas com projeções geométricas de paralelos e meridianos, sistemas de classificação biológica, notações químicas e matemáticas” (p. 72). Explica ainda que é possível encontrar estas ‘tecnologias da inteligência’ *fora* dos sujeitos cognoscentes, por exemplo, um telemóvel que pretendamos utilizar; *entre* os sujeitos, como sendo, o uso do alfabeto para escrever um texto sobre a Teoria da Atividade em português; ou ainda *dentro* dos sujeitos, quando imaginamos algo ou estamos a aprender e “pensamos com escrita, métodos, regras, compassos, quadros, grafos, proposições lógicas, tabelas de cálculo, modos de representação e de visualização diversos” (Lévy, 1994, p. 220).

Estas tecnologias da inteligência não só potenciam a inovação no acesso à informação como, principalmente, o aparecimento de novos estilos de raciocínio e também de conhecimento. Para além disso, Lévy (1994) disserta ainda sobre a natureza do conhecimento e afirma que a existência de um 'eu' cognoscente apenas é possível se considerarmos que esse sujeito é membro de um grupo ou comunidade, que partilha um sistema de comunicação e tem acesso a um conjunto de técnicas e tecnologias da inteligência que são hereditárias. O 'eu' cognoscente não é um indivíduo mas antes um 'coletivo pensante homens-coisas' (p. 171), ou seja, não é apenas constituído pelos seres humanos, mas também pelo computador, pelo papel e pelo lápis, pelo alfabeto e pelo sistema de numeração, entre tantas outras tecnologias da inteligência. "Isolado do coletivo, desprovido de tecnologias intelectuais, o «eu» não pensaria" (p. 173). Lévy sugere assim que se deixe de colocar a consciência individual no centro da discussão, já que ela emerge de uma teia de conexões entre os 'homens' e as 'coisas'.

E é precisamente, assumindo um posicionamento idêntico ao de Lévy, que Borba e Villarreal (2005) baseiam a sua construção teórica, defendendo que a cognição tem uma natureza social e coletiva, e enfatizando que compreende as ferramentas que fazem a mediação da produção de conhecimento. Deste modo, a relação simbiótica entre o indivíduo e a tecnologia em uso origina uma nova entidade que os autores designaram por *humanos-com-media* – uma metáfora que explica como a utilização de tecnologias transforma e reorganiza os processos de pensamento. Um dos aspetos centrais na sua teoria é que os meios são considerados uma parte integrante do sujeito que age e não podem ser vistos como auxiliares nem complementares da atividade, ou seja, a sua conceção teórica afasta-se de uma visão utilitarista da tecnologia digital e aproxima-se de uma conceptualização segundo a qual a tecnologia tem um papel transformador e reorganizador do pensamento e da atividade matemática. Não obstante o reconhecimento do papel mediador das tecnologias computacionais na construção de conhecimento por parte da comunidade de investigação em educação matemática, Borba e Villarreal (2005) fizeram notar que os seres humanos e as máquinas continuam a ser encarados como 'conjuntos disjuntos', isto é, a entidade cognoscente continua a ser, exclusivamente, o ser humano. E deixaram um alerta: "A própria ideia de considerar o ser humano como a unidade que produz conhecimento pode subestimar a importância das tecnologias nessa produção de conhecimento" (Borba & Villarreal, 2005, p. 12).

As ferramentas tecnológicas que são usadas para comunicar, produzir ou representar ideias matemáticas, influenciam o tipo de matemática bem como o tipo de pensamento matemático produzido. Assim, a introdução de uma ferramenta tecnológica específica no sistema 'humanos-com-media' desencadeia alterações concretas na atividade, ou seja, um coletivo[18] de humanos-com-media altera-se de acordo com o tipo de media que incorporar, daí resultando que diferentes coletivos originem diferentes formas de pensar e conhecer. Por exemplo, a matemática produzida por humanos-com-papel-e-lápis é qualitativamente diferente daquela que humanos-com-folha-de-cálculo ou humanos-com-GeoGebra produzem (Villarreal & Borba, 2010). Assim, esta noção permite ultrapassar a dicotomia que prevalece noutras perspetivas teóricas em relação às representações internas/externas. A interligação entre o indivíduo e as tecnologias que usa é de tal ordem que a fronteira do sujeito cognoscente deixa de ser percetível e, deste modo, aquela dualidade perde todo o seu sentido.

É ainda importante notar que, na mesma linha do anteriormente discutido a propósito da Teoria da Atividade, da teoria das *affordances* e ainda da perspetiva de Lévy sobre as tecnologias da inteligência, os autores consideram que as experiências anteriores na utilização de uma determinada ferramenta tecnológica são como que absorvidas e passam a integrar o sistema de humanos-com-media (Borba & Villarreal, 2005). Da observação de alguns alunos durante uma atividade experimental com a calculadora gráfica, Borba e Villarreal (1998) verificaram que os alunos recorriam a metáforas relacionadas com experiências anteriores com outros instrumentos tecnológicos. A título de exemplo, os alunos mencionaram que o *zoom* da calculadora funcionava da mesma forma que o *zoom* de um microscópio, referindo-se a atividades que tinham desenvolvido noutra disciplina. Os investigadores conjeturaram que a atividade anterior e o conhecimento daí produzido com aquela tecnologia, o microscópio, passaram a integrar aquele sistema humanos-com-media.

A investigação que desenvolvi no âmbito do projeto Problem@Web oferece, justamente, alguma clareza em relação a esta distinção. Em estudos com foco na resolução de problemas de geometria com o uso do GeoGebra – num caso por alunos do 2.º Ciclo a participar no SUB12 e noutro caso por alunos do 3.º Ciclo a participar no SUB14 – observei diferentes conjuntos de indivíduos, a resolver o mesmo problema e recorrendo a uma mesma ferramenta. Todavia, produziram soluções digitais significativamente diferentes e desenvolveram modelos conceptuais de cada situação que também são qualitativamente diferentes (Jacinto & Carreira, 2013, 2017; Jacinto, Nobre, Carreira &

[18] Coletivo – *s.m.*, conjunto de indivíduos que formam uma unidade em relação a interesses, sentimentos ou ideais comuns in Dicionário Priberam da Língua Portuguesa [em linha], 2008-2013, http://www.priberam.pt/dlpo/coletivo [consultado em 30-01-2016].

Amado, 2014, no prelo). Essa diferença, que se situa ao nível do pensamento matemático que suporta esses modelos conceptuais, parece subjacente à relação simbiótica entre as aptidões de quem resolve os problemas e a sua capacidade em percecionar as possibilidades de utilização da ferramenta.

Ao longo destas subsecções tenho discutido a produção de conhecimento matemático mediada por ferramentas tecnológicas, assumindo que o indivíduo está imerso, social e culturalmente, num ambiente tecnológico, que molda e é moldado pela sua ação. Nas secções seguintes pretendo debruçar-me sobre algumas questões relacionadas com a expressão do pensamento matemático desenvolvido aquando da resolução de problemas como resultado da atividade destes humanos-com-media.

3.2.3 Resolver e exprimir problemas de matemática com tecnologia

Aprofundar a noção de expressividade do pensamento matemático que decorre aquando da atividade de resolução de problemas, bem como conceptualizar a utilização de ferramentas[19] tecnológicas na abordagem aos problemas e na explanação dos processos seguidos, são questões cuja necessidade emergiu da revisão da literatura.

Retomando algumas ideias base, devo sublinhar aqui que os *problemas não-rotineiros* propostos no SUB14 procuram estimular intelectualmente os concorrentes com o pressuposto de que, no imediato, não disporão de um procedimento ou algoritmo cuja aplicação lhes garanta encontrar prontamente a solução. Os desafios não são intencionalmente alinhados com o currículo, pelo que a sua resolução envolve o *desenvolvimento de formas produtivas de pensar* acerca da situação desafiadora (Lesh & Zawojewski, 2007), com recurso a conhecimentos informais e incorporando uma vasta gama de elementos descritivos da abordagem seguida. De facto, o cerne desta atividade reside na abordagem desenvolvida para obter a solução, e não apenas na própria solução. Ora essa abordagem só fica completamente a descoberto mediante uma explicação pormenorizada dos processos seguidos. Isto significa que encontrar a resposta a um dado problema comporta, igualmente, a necessidade de criar uma explicação da solução, ou seja, resolver um problema incorpora tanto a resposta solicitada como o reportar do processo seguido na sua obtenção. Assim, a expressão do pensamento matemático é um

[19] Embora reconheça que a distinção entre instrumento, ferramenta e artefacto é fundamental em algumas perspetivas teóricas, ela não é essencial na Teoria da Atividade. Assim, ao longo deste trabalho utilizarei estas designações indistintamente.

dos aspetos vitais desta atividade de resolução de problemas com tecnologias que pretendo estudar. Considerarei que a fase de procura da solução e a fase de explanação são facetas da resolução de problemas que estão intimamente relacionadas. Importa ainda sublinhar que esta relação entre o ato de resolver e o ato de exprimir se torna mais robusta, e também visível, quando as tecnologias digitais estimulam o desenvolvimento de uma abordagem ao problema e suportam a expressão de pensamento matemático (Carreira et al., 2016).

Este pressuposto de que a expressão do pensamento é uma parte integrante e fundamental da atividade de resolução de problemas é sustentada pelas próprias regras de participação do SUB14. Estas regras não só estipulam que as soluções encontradas sejam comunicadas eletronicamente, como determinam o envio de uma justificação convincente que explique a solução, ou seja, estas regras implicam que um concorrente pondere, intencional e conscientemente, o modo como exprime o seu raciocínio e como faz uso dos conhecimentos matemáticos durante o processo de encontrar a solução. Deste modo, há que considerar que todas as ilustrações, os esquemas, ou a própria utilização de cores, por exemplo, permitem traçar um roteiro do pensamento matemático desenvolvido até obter a solução, tal como argumentam Lesh e Doerr (2003, p. 3):

> As descrições, explicações e construções não são apenas processos que os alunos utilizam ao longo do percurso de 'obtenção da solução' e não são apenas pós-escritos que os alunos apresentam depois de terem obtido a 'solução'. De facto, SÃO as componentes mais importantes das respostas que se pretendem.

O projeto *Virtual Math Teams* (Capítulo 2, Secção 2.4.2) permitiu estudar as novas competências de comunicação, colaboração e raciocínio matemático que emergiram através da análise de padrões de interação entre estudantes a resolver problemas de matemática *online*, num *chat* síncrono. No estudo reportado em Stahl (2009), os termos *discurso expositivo* e *discurso exploratório* foram avançados para analisar esses padrões de interação em termos do tipo de discurso que encerravam. Num registo com um *discurso expositivo*, aquele que se relaciona com a presente discussão, "uma pessoa oferece-se para 'contar uma história' sobre como resolveu o problema" (Stahl, 2009 p. 49), ou seja, procede a uma narração que contém a sequência dos elementos essenciais da abordagem que conduziu à obtenção da solução do problema. Este tipo de discurso, dado que é de natureza matemática, "tem as suas próprias características, tais como fornecer garantias matemáticas das afirmações, determinar valores, abordar questões de lógica formal, etc." (Stahl, 2009, p. 59). Por outro lado, tem também uma natureza tecnológica porque é produzido por meio de ferramentas digitais. Torna-se assim importante atender a outras características deste discurso expositivo que é, simultaneamente, matemático e digital: o uso da cor para salientar aspetos específicos, o uso de diagramas, tabelas, imagens, legendas, símbolos, a simulação de movimento, o uso de ficheiros criados a partir de programas como a folha de cálculo ou um ambiente de geometria dinâmica, ou ainda combinações entre eles, para nomear apenas algumas das possibilidades de utilização que os jovens identificam nestas tecnologias.

Estas componentes são consideradas fundamentais para compreender a atividade de resolver-e-exprimir problemas no sentido em que não são apenas um relato da sequência de processos na obtenção da resposta, mas antes contribuem para a conceptualização da estrutura matemática do problema. A propósito da utilização de esquemas na resolução de problemas, Pantziara, Gagatsis e Elia (2009) discutiram como os esquemas encerram os elementos que os alunos identificam num enunciado, as relações entre esses elementos e o significado que atribuem aos elementos e às relações, ou seja, os diagramas refletem a estrutura criada pelos alunos. E acrescentaram que a utilização de texto ou imagens serve para exprimir qualquer informação relacionada com o problema, pelo que nalguns casos podem até nem ser necessários para a solução do problema mas foram imprescindíveis para o desenvolvimento e a implementação de uma abordagem para obter a solução, no sentido em que têm o poder de "gerar conhecimento" (Pantziara, Gagatsis & Elia, 2009, p. 43).

Portanto, esta atividade de resolução de problemas pode ser encarada como um processo síncrono de matematização e de expressão do pensamento matemático (Carreira et al., 2016), no seio da qual ocorre o desenvolvimento de estruturas conceptuais das situações problemáticas num processo que é mediado por tecnologias digitais. Estes modelos conceptuais assentam em ideias e relações matemáticas, e facilitam a construção e o desenvolvimento de uma abordagem para encontrar a solução.

Na confluência do *The Rational Number Project* e do *The Applied Problem Solving Project*, Lesh, Landau e Hamilton (1983) avançaram com uma discussão teórica em torno da noção de 'modelo conceptual', particularizando com dados relativos à resolução de problemas que envolviam números racionais. Um modelo conceptual é então uma estrutura adaptável que tem as seguintes componentes: a) redes de relações e operações intrínsecas a um dado conceito; b) sistemas entre conceitos que relacionam ou combinam essas redes; c) sistemas de representação (por exemplo, imagens, símbolos, esquemas), que permitem a tradução e transformação entre diferentes modos de representação; e d) sistemas de processos de modelação. As primeiras duas componentes dizem respeito à compreensão da estrutura subjacente ao conceito, enquanto a terceira tem a ver com a utilização e conversão entre diferentes sistemas de representação, e a quarta refere-se à operacionalização das primeiras três componentes de modo a poderem ser usadas ou adaptadas para descrever as situações em questão.

Lesh e colegas desenvolveram esta noção nas últimas décadas, materializando-se a sua proposta teórica na Perspetiva dos Modelos e da Modelação (*MMP - Models and Modeling Perspective*), segundo a qual os alunos criam modelos conceptuais enquanto desenvolvem pensamento matemático na tentativa de resolução de uma dada situação problemática. A MMP coloca uma forte ênfase na interpretação e na expressão do pensamento, ou seja, considera-se que a modelação diz respeito à descrição e à explicação dos sistemas existentes entre conceitos e ainda à criação ou desenvolvimento de novos sistemas (Lesh, English & Fennewald, 2008). Nas palavras de Lesh e Doerr (2003):

> Os alunos produzem ferramentas conceptuais, que incluem sistemas descritivos ou explicativos explícitos, que funcionam como modelos que revelam aspetos importantes sobre a forma como os alunos estão a interpretar as situações de resolução de problemas (p. 9).

Denota-se pois um certo contraste entre esta perspetiva e alguns posicionamentos teóricos sobre resolução de problemas de matemática que atribuem grande centralidade ao desenvolvimento de uma estratégia e à obtenção de uma solução. Ora, são precisamente algumas destas ideias relativas ao desenvolvimento de um modelo conceptual presentes na MMP que se afiguram como úteis para explicar, do ponto de vista teórico, a atividade de resolução de problemas com tecnologias no seio do SUB14: os jovens desenvolvem modelos conceptuais por meio da utilização de ferramentas digitais para encontrar a solução, sendo que se envolvem de forma igualmente ativa na criação de uma explicação da sua solução, isto é, na forma como estão a interpretar o problema e como obtiveram a resposta.

Como se caracteriza então um modelo conceptual? De acordo com a Educação Matemática Realista, os modelos são “representações das situações problemáticas, que refletem necessariamente os aspetos essenciais dos conceitos e das estruturas matemáticas que são relevantes para a situação problemática, mas podem ter diferentes manifestações" (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p. 13). Nesta linha, estes modelos conceptuais podem compreender uma descrição textual ou oral das condições inerentes ao problema, podem incluir diagramas, desenhos, tabelas, ou expressões que envolvam símbolos matemáticos. Estes modelos específicos e contextuais aparecem, inicialmente, como uma forma de representar o problema ou para lhe atribuir significado (Gravemeijer, 2005), e podem consistir em estratégias informais baseadas em conhecimento do senso comum ou na experiência particular de cada indivíduo. Não obstante, o papel destes modelos é suscetível de sofrer alterações na medida em que, à medida que os jovens se vão familiarizando com problemas semelhantes, podem começar a focar-se nos objetos matemáticos, nas relações e nos procedimentos que caracterizam a matematização vertical. O modelo deixa se ser usado apenas para representar a solução; transforma-se na base do pensamento matemático que está muito mais focado nas relações envolvidas e, de alguma forma, já desarraigado do contexto específico apresentado no problema. Tal como Gravemeijer (2005) descreve, "um *modelo de* actividades matemáticas informais desenvolve-se num *modelo para* um raciocínio matemático mais formal" (p. 95).

Enquanto na construção de um modelo informal um aluno tende a focar-se na relação entre a situação contextualizada e os procedimentos ou os conceitos matemáticos que podem estar envolvidos, o desenvolvimento de um modelo formal envolve um afastamento do próprio contexto, direcionando a atenção para a procura de uma simbolização adequada, de relações e estratégias mais formais, que sustentem o pensamento matemático. Os modelos conceptuais assumem progressivamente um carácter de objetos matemáticos, transformando-se a si próprios até terem "uma vida própria" (p. 98).

Uma compreensão do fenómeno de resolução de problemas matemáticos com tecnologias, no contexto do SUB14, implicará uma conceção do sujeito que a empreende como a entidade que resulta da relação simbiótica entre o jovem e as ferramentas tecnológicas que decidir usar, perspetivando o papel dialético entre as aptidões deste jovem e o reconhecimento das possibilidades de utilização das ferramentas, bem como a utilização de recursos matemáticos e tecnológicos para planear e desenvolver modelos conceptuais das situações de forma a resolver-e-exprimir os problemas propostos na competição. Em particular, considerarei que estes modelos conceptuais integrarão todas as inscrições textuais e suas combinações com ilustrações, esquemas, diagramas, tabelas, sublinhados, e poderão ser apresentadas sob qualquer tipo de formato eletrónico, confluindo pois num roteiro, num sistema descritivo do pensamento matemático.

Constato agora, numa breve e pontual reflexão, que o andamento desta discussão está, lenta mas gradualmente, a entrar no campo cognitivo. Se, durante algum tempo esta questão me inquietou, estou agora em condições de a abraçar.

> [As] investigações empíricas apontam para o facto de que os processos cognitivos (saber, pensar, resolver problemas, etc.) mostram uma relação muito estreita entre o contexto situacional, a situação do problema e o indivíduo. A separação da cognição do contexto (físico e social) parece portanto ser enganadora ou deficiente (Dörfler, 1993, p. 172).

Se a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias que decorre no SUB14 é profundamente marcada por características inerentes ao contexto físico e social envolvente, parece-me incontornável o aprofundamento da discussão em torno dos processos cognitivos que os jovens desenvolvem enquanto resolvem e exprimem estes problemas. É esta a discussão que enceto na secção seguinte.

3.3 Processos de resolução de problemas de matemática com tecnologias

Da revisão da literatura conjugada com o aprofundamento teórico das temáticas mais relevantes parece emergir a necessidade de um referencial exequível para analisar e descrever os processos de resolução de problemas de matemática, mediados por ferramentas tecnológicas, tal como ocorrem no SUB14. Aparentemente, os modelos e os quadros teóricos existentes, que têm no pensamento e na experiência matemática os seus recursos cognitivos primários, apenas poderão descrever de forma parcial esta atividade de resolução de problemas – *com tecnologias digitais*. Na verdade, assumir que o ator desta atividade não é o jovem mas o jovem-com-media e que a atividade deste indivíduo não se resume a obter a solução mas antes a resolver-e-exprimir a solução, leva-me a considerar que o pensamento e a experiência no mundo digital devem ser encarados como recursos cognitivos igualmente centrais e fundamentais nessa atividade.

3.3.1 Literacia digital e resolução de problemas tecnológicos

Até meados dos anos sessenta, perdurou uma certa ideia de que ser-se letrado, ter literacia, era possuir um conjunto de destrezas de índole técnica: ler, escrever, calcular. Bélisle

(2006), tendo estudado a evolução histórica do conceito de literacia, organizou as diferentes visões em três modelos: o *modelo funcional* encara a literacia como o domínio de capacidades práticas e cognitivas (que varia desde uma visão centrada nas capacidades mecânicas de leitura ou escrita até uma abordagem mais desenvolvida que perceciona as competências necessárias à vivência em comunidade); o *modelo de prática sociocultural* segundo o qual a literacia apenas pode ter significado se arreigada em contextos sociais, ou seja, implica o acesso a aspetos culturais, económicos e políticos da sociedade; e ainda o *modelo de empoderamento intelectual* que considera que

> a literacia não só providencia os meios e as capacidades para lidar com textos escritos e números em contextos culturais e ideológicos específicos, mas confere um enriquecimento profundo e, eventualmente, envolve uma transformação ao nível do pensamento humano. Este empoderamento intelectual acontece sempre que a humanidade se mune de novas ferramentas cognitivas, como a escrita, ou de novos instrumentos técnicos, como os que as tecnologias digitais tornaram possível (Bélisle, 2006, pp. 54-55).

É precisamente este 'equipar' das nossas capacidades cognitivas por meio de ferramentas tecnológicas que se faz cada vez mais presente na conceção de cidadão do século XXI. Por exemplo, a OCDE concebeu um quadro conceptual para apreciar as capacidades de adultos de 25 países da Europa, Américas e Ásia através do *Programme for the International Assessment of Adult Competencies* (PIAAC). O principal propósito deste estudo é o de avaliar as competências de literacia, numeracia (cujo suporte teórico foi desenvolvido por um grupo de peritos em Educação Matemática liderados por Iddo Gal) e de resolução de problemas em ambientes tecnologicamente ricos. Neste contexto,

> a resolução de problemas em ambientes tecnologicamente ricos é definida como a capacidade de usar a tecnologia digital, ferramentas e redes de comunicação para adquirir e avaliar informações, comunicar com os outros e realizar tarefas práticas . . . centra-se nas capacidades para resolver problemas com fins pessoais, de trabalho ou cívicos através da criação de metas e planos adequados, e do acesso e uso de informações através de computadores e redes computacionais. (PIAAC, 2009, p. 9).

Este conceito remete assim para a utilização eficiente das tecnologias do quotidiano na resolução de problemas que surgem, também, no dia-a-dia, reconhecendo que envolve ainda a aquisição de informação e sua apreciação, bem com a comunicação com outros. Para operacionalizar a implementação do estudo e a análise dos resultados, o grupo de peritos definiu três domínios da resolução de problemas em ambientes tecnologicamente ricos: i) a *dimensão cognitiva*, que diz respeito às estruturas e processos mentais que são habitualmente desenvolvidos enquanto se resolve um problema (e envolvem a definição de objetivos, a monitorização, o planeamento, a seleção de informação, a sua transformação); ii) a *dimensão da tarefa*, ou seja, os elementos que desencadeiam a perceção de que existe uma situação problemática para ser resolvida e que determina a execução de um conjunto de ações; e iii) a *dimensão da tecnologia*, isto é, os dispositivos ou as aplicações através dos quais a tarefa é resolvida e as suas representações. Importa pois compreender de que forma se relacionam a dimensão cognitiva e a dimensão da tecnologia, no âmbito da resolução de um problema.

Considerando uma perspetiva abrangente do papel das ferramentas tecnológicas – que nos conferem um empoderamento intelectual – trago para a discussão a construção teórica resultante do projeto DigEuLit (Martin, 2006). O projeto, financiado por fundos europeus sob a alçada do Programa de eLearning da Comissão Europeia, tinha como principal propósito desenvolver um *Framework Europeu para a Literacia Digital*. Os parceiros do projeto propunham-se encontrar uma definição de literacia digital, uma estrutura genérica e um conjunto de ferramentas que permitissem um entendimento partilhado desta noção e que promovesse o seu desenvolvimento entre os vários agentes educativos do espaço europeu.

Assentando sobre a premissa de que toda a aprendizagem é uma atividade social, construtiva e reflexiva, o projeto DigEuLit desenvolveu a seguinte noção:

> Literacia Digital é a perceção, atitude e capacidade dos indivíduos de utilizar adequadamente ferramentas e instrumentos digitais para identificar, aceder, gerir, integrar, avaliar, analisar e sintetizar recursos digitais, construir novos conhecimentos, criar expressões com media, e comunicar com outros, no contexto de situações específicas da vida, a fim de permitir a ação social construtiva; e refletir sobre este processo. (Martin, 2006, p. 155).

A literacia digital, segundo Martin e Grudziecki (2006), pode ser desenvolvida ao longo de três fases: i) a *competência digital*, que diz respeito ao conhecimento ou compreensão sobre as tecnologias digitais, mas também engloba perceções, atitudes ou capacidades relacionadas com o mundo digital, ii) a *utilização digital*, que se refere à aplicação da competência digital num contexto específico que pode ser profissional ou da vida do dia-a-dia; e iii) a *transformação digital*, isto é, quando a utilização das tecnologias digitais origina inovação e criatividade, tanto a nível profissional como ao nível do domínio do conhecimento (Figura 3.3). A propósito de uma melhor clarificação do que se entende por competência digital, os autores apresentam uma lista de processos que são desempenhados no contexto da resolução de uma tarefa ou um problema que requeira o uso de um recurso tecnológico digital. Este problema ou tarefa digital pode inscrever-se em qualquer área de atividade, tal como escrever um ensaio ou preparar uma apresentação multimédia, desde que um recurso digital seja utilizado com esse fim.

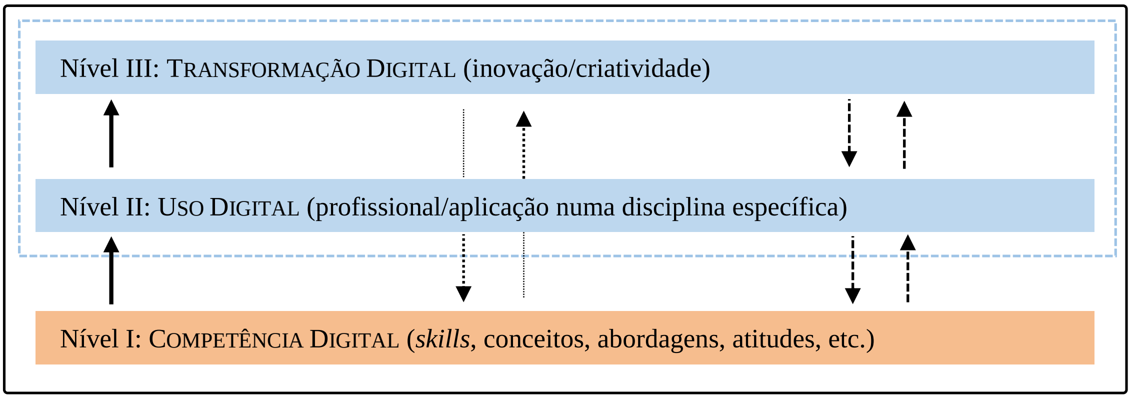


Figura 3.3. Níveis de literacia digital segundo Martin (2009, p. 8)

Deste modo, e perante todas as características já oferecidas sobre o SUB14, é possível considerar que resolver e exprimir um problema de matemática do campeonato é uma tarefa que requer esta competência digital no sentido em que a participação na fase de apuramento no Campeonato determina o uso de algum tipo de ferramenta digital (no mínimo, o e-mail e um editor de texto). À semelhança do *framework* desenvolvido no projeto DigEuLit, irei assumir a noção de 'recurso digital' no sentido mais amplo possível: "qualquer item que possa ser armazenado como um ficheiro de computador" (Martin & Grudziecki, 2006, p. 157). Desta forma, irei considerar que a resolução e a expressão de um problema de matemática, no âmbito do SUB14, pode ser executada e armazenada num ficheiro de texto, numa folha de cálculo, num ficheiro GeoGebra, num editor de apresentações, num filme, etc.

A lista de treze processos executados aquando da resolução de um problema ou tarefa digital, que os autores consideram ser relativamente sequenciais, compreende os seguintes: *formulação* – definir claramente a tarefa ou o problema a ser resolvido, bem como as ações que, previsivelmente, serão necessárias; *identificação* – identificar os recursos tecnológicos necessários para resolver o problema ou completar a tarefa; *acesso* – localizar e obter o recurso tecnológico necessário; *avaliação* – avaliar a possibilidade de concretização, a precisão e a fiabilidade do recurso tecnológico bem como a sua relevância para a resolução do problema ou tarefa; *interpretação* – compreender o significado emanado pelo recurso digital; *organização* – organizar e definir os recursos tecnológicos de forma a permitir a resolução do problema ou a realização da tarefa; *integração* – aliar diferentes recursos tecnológicos de forma a encontrar uma combinação relevante ao problema ou à tarefa; *análise* – examinar recursos tecnológicos a partir de conceitos e modelos que permitam solucionar o problema ou realizar a tarefa com êxito; *síntese* – combinar recursos tecnológicos de novas formas para permitir solucionar o problema ou realizar a tarefa; *criação* – criar novos objetos de conhecimento, unidades de informação ou outros produtos digitais que irão contribuir para a resolução do problema ou a realização da tarefa; *comunicação* – interagir de forma relevante com outros enquanto se lida com o problema ou a tarefa; *disseminação* – apresentar a solução ou os produtos a outros de relevância; *reflexão* – considerar o sucesso do cumprimento da tarefa e refletir sobre o seu próprio desenvolvimento enquanto pessoa com literacia digital (Martin & Grudziecki, 2006, p. 257).

Possivelmente devido à natureza da atividade que estes autores visam descrever – a atividade de um indivíduo enquanto desenvolve uma abordagem para resolver um problema tecnológico ou uma tarefa que envolva o uso de recursos digitais – estes processos assemelham-se aos que são mobilizados na resolução de problemas de matemática, tendo por base modelos bastante conhecidos e usados no campo da Educação Matemática, como por exemplo, o modelo de Pólya (1945/1978). Interessa-me pois explorar a possibilidade de complementar o modelo proposto por Martin & Grudziecki (2006) com um modelo funcional e flexível de resolução de problemas de matemática, bem como as suas potencialidades para analisar o fenómeno aqui em estudo.

3.3.2 Modelos de resolução de problemas de matemática

A resolução de problemas era vista por Pólya (1978) como a arte da descoberta. O seu sobejamente conhecido modelo de resolução de problemas enfatiza a importância de procurar e descortinar uma ideia brilhante, possível através de um posicionamento que permita observar a questão de diferentes pontos de vista. Esse modelo envolve quatro fases: (i) *compreensão do problema*, em que se deve prestar extrema atenção ao enunciado de forma a poder interpretá-lo e identificar alguns aspetos relevantes; (ii) *estabelecimento de um plano*, em que se deve planear a estratégia a seguir, ponderando o caminho que pode vir a ser longo e tortuoso; (iii) *implementação do plano*, em que se executa o roteiro geral delineado na fase anterior sem perder de vista o problema em si;

(iv) *fazer uma análise retrospetiva*, em que o aluno reconsidera e reexamina o caminho seguido e verifica a solução obtida.

Para além da simplicidade e da clareza patentes no modelo de Pólya, o que o fez ser adotado nas mais diversas áreas foi a sua potencialidade para orientar uma forma de instrução. Numa estreita associação a cada etapa do modelo, Pólya avançou uma lista de estratégias e heurísticas que tinham como principal objetivo ajudar o professor a orientar o aluno ao longo do processo da resolução do problema. Em cada uma das etapas referidas anteriormente, o indivíduo deve colocar questões a si próprio de forma a poder organizar e estruturar o seu raciocínio. Pólya referia ainda que a lista de heurísticas devia ser tão breve quanto possível, de modo que as indagações sejam facilmente "assimiladas pelo estudante e contribuam para o desenvolvimento de um hábito mental" (1978, p. 14).

Todavia nos anos 80, e apesar da larga escala da implementação deste modelo, o entusiasmo pela abordagem não se estava a traduzir numa melhoria da capacidade de resolução de problemas dos alunos. Tal como assinalou Schoenfeld (1987), "não existem evidências de que os alunos tenham realmente aprendido mais em virtude da instrução através de heurísticas, ou que tenham adquirido capacidades gerais de resolução de problemas transferidas para situações novas" (p. 288). A grande lacuna no modelo residia precisamente no seu grau de generalidade já que apenas permite um nível de descrição da resolução de problemas que acaba por não ser efetivamente útil, ou seja, "não contém detalhe suficiente para pessoas não familiarizadas com as estratégias as poderem implementar" (Schoenfeld, 1987, p. 288).

O modelo proposto por Schoenfeld, dois anos antes, no seu livro *Mathematical Problem Solving* tem subjacente o modelo de Pólya e é também um dos modelos de resolução de problemas mais conhecidos e usados no campo da Educação Matemática. Schoenfeld (1985) procurava explicar o comportamento dos seus alunos durante a resolução de problemas de matemática de forma a poder ajudá-los a melhorar o seu desempenho. A proposta teórica que desenvolveu para analisar o pensamento matemático e, em particular, a resolução de problemas compreende: i) domínio de *recursos* matemáticos básicos, tais como, conceitos, algoritmos, teoremas, mas também as regras da lógica, da demonstração ou prova; ii) a capacidade para utilizar *heurísticas*, questões que lhe permitem organizar e estruturar o seu raciocínio, podendo envolver técnicas ou estratégias de resolução, tais como, fazer um esquema ou uma tabela, resolver um problema semelhante ou mais simples; iii) o *controlo* da forma como utiliza os recursos e as heurísticas, que está relacionado com a sua capacidade de metacognição; e iv) as *crenças* sobre si próprio e sobre a matemática, que influenciam as suas atitudes em relação à atividade de resolução de problemas, em relação à própria aprendizagem da matemática ou podem ainda influenciar as suas conceções em relação à natureza da matemática.

Schoenfeld desenhou e implementou uma grande experiência baseada na lecionação de um curso sobre resolução de problemas para os seus alunos universitários assente nos princípios enunciados atrás e que constituíam o quadro teórico desse estudo. Para descrever o desempenho dos seus alunos e de um grupo de matemáticos, portanto peritos em resolução de problemas, Schoenfeld (1985) propôs uma 'estratégia regulatória' (de Corte, Verschaffel e Op 't Eynde, 2000) que compreende cinco fases: *leitura* – tempo despendido "ingerindo as condições do problema"; *análise* – tentativa de compreender completamente o problema "permanecendo muito próximo das condições ou objetivos", podendo envolver a seleção de abordagens à solução tais como fazer um esquema, se adequado, ou estudar um caso particular, procurando formas de simplificação ou reformulação do problema; *exploração* – a "busca por informação relevante", num movimento que se afasta do contexto do problema; *planeamento e implementação* – que diz respeito à definição de uma sequência de ação e sua execução de forma ordenada; e *verificação* – o indivíduo revê o processo seguido e faz uma apreciação crítica da solução que encontrou (pp. 297-298).

Parte do sucesso do seu curso deve-se ao estabelecimento de uma listagem de heurísticas associadas às fases do modelo de resolução de problemas. Por exemplo, na fase da análise, é útil desenhar um diagrama se tal for apropriado, examinar um caso particular ou tentar simplificar o problema; na fase de exploração, pode ajudar decompor o problema em objetivos parciais e trabalhar em cada um deles separadamente, olhar para o método de resolução de um problema análogo, reformular o problema ou recombinar elementos do problema de formas diferentes; ou ainda na fase de verificação, conferir se todos os dados pertinentes foram usados, se a solução se aproxima da que estimativa feita, ou verificar se a solução poderia ter sido obtida de outra forma (Schoenfeld, 1985). O autor identificou cinco características dos participantes com melhor desempenho na resolução de problemas: i) não só têm mais conhecimentos como identificam muitas conexões entre eles; ii) têm tendência para se focar na estrutura dos problemas, enquanto os menos aptos se focam em questões superficiais; iii) são mais conscientes das suas capacidades e fraquezas; iv) são melhores a monitorizar as suas tentativas de resolução; e v) mostram-se mais preocupados em obter soluções ‘elegantes’ para os problemas.

Naturalmente existem vários modelos de resolução de problemas de matemática, tendo sido, muitos deles, propostos no final do século passado acompanhando o interesse dos investigadores neste campo de estudo. Por exemplo, Garofalo e Lester (1985) propuseram um modelo que preconiza os processos cognitivos e metacognitivos para estudar o desempenho em matemática: i) orientar; ii) organizar; iii) executar; iv) verificar. Este modelo foi posteriormente discutido em termos dos processos de resolução de problemas de matemática por Lester, Garofalo e Kroll (1989). De acordo com os autores, a mudança de uma etapa para a seguinte ocorre quando as decisões metacognitivas provocam uma determinada ação cognitiva, explicando assim a dualidade cognitivo-metacognitivo que atravessa a sua construção teórica. Ou ainda o trabalho iniciado por Verschaffel e desenvolvido por de Corte, Verschaffel e Op’t Eynde (2000) que consiste em cinco fases de autorregulação da aprendizagem em sala de aula, nomeadamente através da resolução de problemas: i) construir uma representação mental do problema; ii) decidir como resolver o problema; iii) efetuar os cálculos necessários; iv) interpretar os resultados e formular uma resposta; e v) avaliar a solução. Este modelo tem subjacente, à semelhança de vários outros, o modelo de Pólya. No entanto, o seu contributo passa ainda por identificar um conjunto de heurísticas específicas de cada etapa, por exemplo, para construir uma representação mental do problema os alunos podem desenhar uma figura, construir um esquema ou uma tabela, ou usar o seu conhecimento do dia-a-dia.

Carlson e Bloom (2005) também propuseram um modelo que designaram *Multidimensional Problem-Solving Framework* através do qual descrevem os processos seguidos por 12 matemáticos na resolução de problemas. O modelo compreende quatro fases: i) orientação, ii) planeamento, iii) execução, e iv) verificação. As investigadoras concluíram que os processos seguidos pelos matemáticos não eram sequenciais mas cíclicos e identificaram dois ciclos, cada um dos quais, envolvendo pelo menos três daquelas quatro fases, normalmente, o planeamento, a execução e a verificação. Para além disso, Carlson e Bloom (2005) observaram e caracterizaram subciclos ao nível da fase de planeamento que, de forma sintética, consistiam na formulação de uma conjetura, do seu teste “*imaginando* como a abordagem à solução poderia ser” (p. 63, grifo no original) e consequente apreciação, de onde resultava a aceitação ou a rejeição dessa conjetura. Inspiradas pela proposta de Schoenfeld (1985), o modelo que as investigadoras desenvolveram oferece ainda uma forma de caracterizar o que denominam por *atributos* da resolução de problemas – recursos, afetos, heurísticas e monitorização – descrevendo também os seus papéis em cada uma das fases de resolução de problemas definidas.

Mais recentemente, Hähkiöniemi, Leppäaho e Francisco (2013) apresentaram um modelo construído com o propósito de compreender os processos de resolução de problemas abertos e as formas segundo as quais os professores podem apoiar os seus alunos nessas atividades. Este novo modelo foi motivado pela insuficiência encontrada pelos autores ao aplicar os modelos existentes na sua análise do trabalho desenvolvido por alunos de 9.º ano a resolver um problema aberto com o recurso ao GeoGebra (que consistia em determinar a melhor localização de um parque de diversões de forma a servir quatro localidades). O modelo proposto compreende cinco fases, que são ilustradas com algumas ações relativas ao problema proposto: i) *enquadrar o problema*, que envolve a seleção dos aspetos do problema que serão investigados (e.g., escolher a localização das quatro localidades); ii) *explorar a solução*, em que os alunos se envolvem em trabalho matemático relacionado com a tarefa a fim de desenvolver uma conjetura (e.g., os alunos construíram a mediatriz de um segmento de reta no GeoGebra); iii) *formular conjeturas*, isto é, avançar uma possível resposta ao problema (e.g., os alunos sugeriram uma localização para o parque de diversões); iv) *investigar a conjetura*, o que diz respeito a explicar como obtiveram a conjetura e examinar se é uma solução razoável (e.g., alunos explicaram como encontraram a localização do parque através do GeoGebra); e v) *justificar*, que envolve explicar que a conjetura é viável e corresponde à solução (e.g., explicar que o parque está a igual distância de cada uma das localidades). Este é um modelo particularmente interessante pois, apesar de se focar nos aspetos matemáticos da obtenção de uma solução, inclui já importantes pistas de como o uso de uma ferramenta tecnológica pode ser considerado nos processos de resolução de problemas abertos.

Apesar de terem sido propostos em épocas bastante distintas e do seu desenvolvimento ter surgido a partir de experiências com participantes muito distintos, é possível estabelecer correspondências entre as diferentes fases ou etapas de todos os modelos analisados (síntese na Tabela 3.1). A título de exemplo, correspondem entre si as seguintes fases: *compreender o problema* (Pólya, 1978), *leitura* (Schoenfeld, 1985), *orientar* (Garofalo & Lester, 1985; Carlson & Bloom, 2005), *construir uma representação mental do problema* (Verschaffel, 1999), e *enquadrar o problema* (Hähkiöniemi, Leppäaho & Francisco, 2013). Em boa verdade, e apesar de ser o mais antigo, o modelo de Pólya parece continuar a captar uma certa uniformização das ideias propostas pelos restantes autores analisados: numa primeira abordagem ao problema importa interpretá-lo e compreendê-lo bem; de seguida, é necessário definir um caminho a seguir para encontrar a solução, o que conduz à execução dessa abordagem e, após haver encontrado uma solução, é útil verificar se a solução respeita, efetivamente, as condições iniciais. Naturalmente, existem particularidades que levam os autores a optar por uma terminologia diferente, nomeadamente, em relação ao exemplo que dei acima. Contudo, as singularidades destes modelos situam-se nos pressupostos teóricos e nas motivações que subsistem à sua génese embora, a nível de estrutura e organização dos processos, a distinção reside na amplitude e na clarificação de cada fase de cada modelo.

Tabela 3.1. Síntese das etapas que constam de vários modelos de resolução de problemas de matemática

Pólya (1978)	**Schoenfeld** (1985)	**Garofalo e Lester** (1985)
i) Compreensão do problema ii) Estabelecimento de um plano iii) Implementação do plano iv) Fazer uma análise retrospetiva	i) Leitura ii) Análise iii) Exploração iv) Planeamento e implementação v) Verificação	i) Orientar ii) Organizar iii) Executar iv) Verificar
Verschaffel (1999)	**Carlson e Bloom** (2005)	**Hähkiöniemi, Leppäaho e Francisco** (2013)
i) Construir uma representação mental do problema; ii) Decidir como resolver o problema iii) Efetuar cálculos necessários iv) Interpretar os resultados e formular uma resposta v) Avaliar a solução	i) Orientação ii) Planeamento iii) Execução iv) Verificação	i) Enquadrar o problema ii) Explorar a solução iii) Formular conjeturas iv) Investigar a conjetura v) Justificar

Considerando então as possibilidades emergentes de utilização de um destes modelos constato que, enquanto o modelo de Pólya utiliza sobretudo descritores de índole comportamental (ler e interpretar o enunciado, estabelecer um plano, executar o plano, fazer uma retrospetiva), o modelo de Schoenfeld compreende descritores com traços comportamentais mas também outros com um caráter mais cognitivo (ler, analisar, explorar, planificar, implementar, verificar). Para além disso, o modelo de Schoenfeld sugere que a fase de *estabelecimento de um plano*, de Pólya, foi fragmentada de modo a oferecer mais detalhe dos processos envolvidos – a *análise*, a *exploração* e o *planeamento*. Por seu turno, e embora pareçam reportar-se ao mesmo significado, o *planeamento* no modelo de Schoenfeld tem características interessantes. Tal como refere,

> a etapa do planeamento não é propriamente uma fase independente, mas algo que atravessa todo o processo de resolução; a sua função é assegurar que se está envolvido em atividades que muito provavelmente (tanto quanto é possível dizer no momento) serão proveitosas (Schoenfeld, 1985, p. 108).

Contrastando agora os modelos de Schoenfeld (1985) e Carlson e Bloom (2005), observo que as fases de *leitura*, *análise* e *exploração* parecem corresponder à fase de *orientação*, já que o *planeamento* tem a mesma designação e sentido nos dois modelos, e a *implementação* diz respeito à *execução*, sendo que a *verificação* encerra ambas as sequências de processos. A principal diferença parece situar-se no foco de cada modelo: enquanto o de Schoenfeld centra atenções nos processos de resolução de problemas, o de Carlson e Bloom parece centrar-se no indivíduo que resolve os problemas e, muito concretamente, num tipo de indivíduo muito particular: um matemático. Este posicionamento é particularmente interessante, já que o sujeito que pretendo analisar no meu estudo é também muito peculiar: um jovem-com-media.

Com exceção do modelo avançado por Hähkiöniemi, Leppäaho e Francisco (2013), todos os outros nasceram da análise e categorização das abordagens que alunos e/ou matemáticos desenvolveram durante tarefas de resolução de problemas de matemática em que o papel-e-lápis eram a principal ferramenta. Nestes modelos, as etapas que os compõem são tão abrangentes que impedem um evidenciar natural das particularidades da atividade de resolução de problemas que podem advir da utilização de tecnologias digitais e que, tal como consta na literatura, exercem influências qualitativamente diferentes do papel-e-lápis no sistema jovem-com-media.

> O que acontece quando os sujeitos usam sistematicamente as ferramentas computacionais para dar sentido ao enunciado, representar, explorar e resolver problemas? Argumentamos que o uso de tecnologia introduz nova informação para caracterizar a proficiência do indivíduo que resolve problemas. (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013, p. 282)

Na realidade, estou apenas a retomar questões que já abordei anteriormente, embora não sejam novas nem tenham surgido com o advento das tecnologias digitais mais poderosas. Já nos idos anos 80, Richard Lesh mostrava o seu desapontamento pelo facto de a investigação não ter sido capaz de clarificar de que forma os ‘aparelhos tecnológicos podem contribuir para a aquisição de modelos conceptuais que são o objetivo mais importante da instrução matemática” e ainda em explicar “os processos que são necessários quando os modelos matemáticos e as ferramentas tecnológicas são usadas para resolver problemas em situações reais" (Lesh, 1981, p. 254). Embora as situações que dão corpo aos problemas propostos na competição SUB14 nem sempre tenham o grau de realismo a que Lesh se refere, a análise dos modelos conceptuais subjacentes às soluções encontradas pelos jovens-com-media pode fornecer pistas sobre o pensamento matemático que desenvolvem enquanto os conceitos e os processos matemáticos e as tecnologias digitais são postos em ação para resolver-e-exprimir estes problemas.

A análise do fenómeno 'resolução de problemas de matemática com tecnologias' requer um suporte num modelo de resolução de problemas bem firmado no campo da Educação Matemática. Para além disso, constato que não pode ser feita, exclusivamente, com recurso a ferramentas que foram desenvolvidas para descrever de que formas o professor pode ajudar os alunos a desenvolver estratégias de resolução de problemas, ou para contrastar as características dos processos desenvolvidos por novatos e peritos, ou para avaliar a competência dos estudantes na resolução de problemas de matemática. O modelo de resolução de problemas de matemática, tal como proposto por Alan Schoenfeld (1985) está, assim, mais próximo daquilo que procuro.

3.3.3 Um modelo de Resolução de Problemas de Matemática com Tecnologia

Para descrever os processos de resolução de problemas com tecnologias que os participantes no SUB14 desenvolvem, procuro um modelo que me permita focar nas ações que os jovens desenvolvem e nos processos cognitivos associados, assumindo que são mediados pelas tecnologias que escolhem utilizar. É, contudo, oportuno sublinhar que procuro delinear um aparato que seja efetivamente útil para analisar o fenómeno identificado, sem a pretensão de renegar qualquer um dos anteriores modelos de resolução de problemas de matemática. Com esse propósito em mente e a partir da análise da literatura, observei que estes modelos emergiram em contextos em que o papel-e-lápis eram as principais 'tecnologias'. Tal como vários investigadores já se questionaram, até que ponto estes modelos têm a elasticidade suficiente para explicar as particularidades de uma resolução de problemas mediada por tecnologias digitais? Falta-lhes, pois, uma ou mais componentes que ajudem a explicar, por exemplo, em que fases a tecnologia é usada, ou se a sua finalidade é a mesma em qualquer dessas fases.

É agora oportuno retomar as ideias que registei na Secção 3.3.1 e que refletiam uma situação relativamente oposta a esta: os referenciais que descrevem a literacia tecnológica ou digital, os processos de resolução de problemas ou tarefas de índole tecnológica – que nada têm a ver com matemática – estão repletos de descritores de comportamentos associados ao uso de ferramentas tecnológicas. Para me serem úteis falta-lhes, pois, uma ou mais componentes que contemplem aquilo que é específico e característico da resolução de problemas de matemática, como por exemplo, a formulação de uma conjetura, o efetuar de cálculos, o uso de um raciocínio lógico ou uma inferência. É este hiato, esta dupla insuficiência, aliado à adequação e pertinência de cada um destes modelos na sua especificidade, que estão na base da proposta que a seguir desenvolvo a fim de fornecer o nível de pormenor necessário à descrição da resolução-de-problemas-de-matemática-com-tecnologias que acontece no âmbito da competição SUB14.

A concretização de um modelo combinado envolverá duas etapas. Num primeiro momento, irei ponderar uma associação entre as fases sugeridas por Schoenfeld (1985) e os processos propostos por Martin e Grudziecki (2006) com base nos aspetos que possam ter em comum e nas descrições de cada modelo (sintetizados na Tabela 3.2). Num segundo momento, a combinação entre os modelos torna-se possível através da procura das ações mais proeminentes em cada um deles, eventualmente, agrupando alguns dos processos da resolução de problemas tecnológicos e dividindo ou detalhando algumas das fases de resolução de problemas de matemática. Doravante irei designar o modelo proposto por Schoenfeld (1985) a propósito da resolução de problemas de matemática por RPM, e o modelo proposto por Martin e Grudziecki (2006) a respeito da resolução de problemas com tecnologias por RPT.

Tabela 3.2. Primeiro momento de aproximação dos dois modelos de resolução de problemas

RPT (Martin & Grudziecki, 2006)	Formulação	Identificação Acesso Avaliação Interpretação	Organização Integração Análise	Síntese Criação Comunicação	Disseminação Reflexão
RPM (Schoenfeld, 1985)	Leitura	Análise	Exploração	Planeamento e Implementação	Verificação

Uma metáfora para descrever o primeiro momento de ‘tecelagem’ entre os dois modelos consiste em imaginar uma aproximação entre os dois mundos em que eles ‘habitam’: retiremos o modelo de Schoenfeld do laboratório/sala de aula de matemática, retiremos o modelo de Martin e Grudziecki do contexto profissional, e coloquemo-los em diálogo num terreno que é simultaneamente tecnológico e matemático, um ambiente extraescolar onde os sujeitos da atividade não são ‘alunos’, mas participantes desse universo – uma competição *online* de resolução de problemas de matemática.

Segundo as regras do campeonato SUB14, cada problema matemático é proposto quinzenalmente pela comissão organizadora. Deste modo, o primeiro contacto do participante com o problema é através da ‘leitura’ do seu enunciado, conforme sugere o modelo RPM, embora não seja propriamente necessário formular o problema ou definir a tarefa a realizar, tal como o modelo RPT propõe através do processo ‘formulação’. Esta primeira fase tem a finalidade de apropriação da situação em causa e das condições do problema, ou seja, o *captar* serve o propósito de o indivíduo desenvolver uma primeira ideia daquilo que o problema envolve.

A segunda etapa do modelo RPM remete para a ‘análise’ do problema, isto é, um aprofundamento da compreensão da situação problemática, ponderando formas de a abordar e que recursos poderão ser necessários. Ora, considerando que estes poderão ser recursos matemáticos mas também tecnológicos, importa identificá-los, garantir que estão acessíveis, que é possível apreciar a sua precisão, fiabilidade e relevância, e que o produto que for gerado é compreensível (‘identificação’, ‘acesso’, ‘avaliação’, ‘interpretação’). O trabalho realizado com base na experimentação do modelo RPT na análise dos processos de resolução de problemas com o GeoGebra (Jacinto & Carreira, 2015) levou a identificar um espartilhamento da atividade, resultando num excessivo detalhe que se verificou não trazer vantagens. Dado que são os concorrentes que escolhem as ferramentas tecnológicas que utilizam, fazem-no por serem as que lhes são mais familiares, estão mais acessíveis no seu dia-a-dia, pelo que emergiu a vantagem de aglutinar processos como o acesso, a avaliação e a interpretação num processo mais abrangente, congregando conhecimento e decisão sobre os recursos digitais. Assim, comungando das características da fase de análise (RPM), optei por: i) aglutinar os processos ‘identificação’ e ‘acesso’ num único que designei por *identificar* e que envolve uma tentativa inicial de compreender o que está em causa no problema, em particular, que noções matemáticas poderão ser relevantes e que recursos tecnológicos poderão ser adequados ou necessários para encontrar uma solução; e ii) aglutinar os processos ‘avaliação’ e ‘interpretação’, mantendo a designação *interpretar* no sentido do percecionar as *affordances* dos recursos tecnológicos aquando da consideração de formas matemáticas para abordar a solução.

Já a fase de 'exploração' (RPM) diz respeito a uma procura mais focada na informação relevante com um afastamento relativo do contexto, que aproximei dos processos de 'organização', 'integração' e 'análise' (RPT), ou seja, na organização e conjugação de diferentes tipos de recursos tecnológicos e da sua inspeção a partir de modelos que possam contribuir para solucionar o problema. Com base a linha de pensamento já referida, optei por aglutinar os processos 'organização' e 'integração' num só, que denominei de *integrar* por dizer respeito à combinação de recursos tecnológicos e matemáticos no âmbito de uma abordagem exploratória. A etapa seguinte, a que chamei *explorar*, caracteriza-se pela utilização destes recursos matemáticos e tecnológicos para explorar e investigar modelos conceptuais que favoreçam a obtenção de uma solução para o problema.

Proponho ainda associar o 'planeamento' e a 'implementação' (RPM), que estão relacionados com a definição de uma sequência de ações e a sua execução, com a 'síntese' e a 'criação' (RPT), pois estão relacionadas com novas formas de combinar os recursos tecnológicos e a consequente criação de novas formas de conhecer ou compreender, novos objetos de conhecimento que permitirão resolver o problema. Com a fase que designo de *planear* pretendo observar o delinear de uma abordagem que conduza à solução tendo por base a análise das conjeturas formuladas e exploradas. Segue-se o *criar*, fase em que os jovens desenvolvem a abordagem planeada, recombinando os recursos matemáticos e tecnológicos de maneiras novas que favoreçam encontrar a solução. Nesse processo criam-se novos objetos de conhecimento, novas unidades de informação que irão contribuir para resolver-e-exprimir o problema.

Por fim, Schoenfeld propõe a 'verificação' da solução, uma revisão do processo e apreciação crítica sobre o trabalho efetuado, enquanto Martin e Grudziecki propõem a 'disseminação', a apresentação do produto, e a 'reflexão' sobre o sucesso do cumprimento da tarefa. A verificação da solução não é convenientemente considerada no modelo RPT mas é um processo metacognitivo de grande importância para assegurar a completude ou correção da solução. Ponderando as características do SUB14, e embora não seja considerada no modelo de Schoenfeld, a disseminação é extremamente importante dada a natureza competitiva desta atividade e o facto inevitável de ser necessário submeter a solução à apreciação dos responsáveis pela sua aceitação e de quem se espera feedback. Avanço pois com dois processos: i) *verificar*, que diz respeito ao envolvimento em atividades que visem explicar ou justificar a solução encontrada tendo por base a utilização de recursos tecnológicos e matemáticos; e ii) *disseminar*, que se refere à apresentação da solução ou produto obtido a outros de relevo e ainda à ponderação do sucesso do processo de resolução do problema.

O modelo RPT ainda prevê a existência de um outro processo – a *comunicação* – encaixando-o entre os processos de criação e disseminação. Todavia, este processo está relacionado com a procura de ajuda por parte dos concorrentes e está já documentado que trespassa diversas etapas da atividade de resolução de problemas, desde a compreensão do problema ao delinear de um possível caminho, até à disseminação da solução. Por estes motivos, esta interação de forma relevante com outros enquanto o concorrente lida com o problema é um processo que é transversal a todos os outros.

Em suma, a construção deste modelo combinado decorreu em dois momentos. Inicialmente, ponderei uma associação entre as fases sugeridas por Schoenfeld (1985) e os processos propostos por Martin e Grudziecki (2006), tendo por base as semelhanças que identifiquei em cada modelo. Em seguida, a síntese entre os dois modelos tornou-se possível através da identificação das ações mais proeminentes em cada modelo, fundindo alguns dos processos da resolução de problemas com tecnologia e dividindo algumas das fases da resolução de problemas de matemática. O modelo assim proposto de resolução de problemas de matemática com tecnologias (RPMT) compreende uma lista de dez processos cujas designações e descrições, decorrentes da síntese referida, visam concentrar os atributos originais presentes em cada modelo e que considero fundamentais (Jacinto & Carreira, 2016a) (Figura 3.4).

Ao contrário do que Schoenfeld (1985) sugere relativamente à flexibilidade das fases de resolução de problemas de matemática, no modelo de Martin e Grudziecki (2006) os processos de resolução de problemas com tecnologias ocorrem de forma relativamente sequencial. Na verdade, à semelhança do que Schoenfeld sugeriu, os processos deste novo modelo também devem oferecer a flexibilidade suficiente para descrever tentativas falhadas ou novas apropriações dos problemas. Além disso, e apesar de estes processos aparentarem fronteiras claras e bem definidas, neste modelo combinado eles são flexíveis o suficiente para serem considerados em diferentes fases, aliás, tal como é reconhecido nos modelos originais.

Tabela 3.3. Processos de resolução de problemas de matemática com tecnologias (RPMT)

Resolução de problemas de matemática com tecnologia		
Captar	Apropriação da situação e das condições do problema, e primeiras ideias sobre o que o problema envolve. (Ler[a]; Definir[b])	**Comunicar** Interagir com outros de relevo enquanto resolve o problema (Comunicar[b])
Identificar	Tentativa inicial de compreender o que está em causa, nomeadamente, a matemática que poderá ser relevante e as ferramentas necessárias. (Analisar[a]; Identificar[b], Aceder[b])	
Interpretar	Percecionar *affordances* nos recursos tecnológicos ao ponderar maneiras de abordar matematicamente a solução. (Analisar[a]; Avaliar[b], Interpretar[b])	
Integrar	Combinar recursos tecnológicos e matemáticos no âmbito de uma abordagem exploratória. (Explorar[a]; Organizar[b], Integrar[b])	
Explorar	Utilizar recursos tecnológicos e matemáticos para explorar modelos conceptuais que tornem possível obter uma solução. (Explorar[a]; Analisar[b])	
Planear	Delinear uma abordagem para obter uma solução com base na análise das conjeturas exploradas. (Planear e Implementar[a]; Sintetizar[b])	
Criar	Implementar a abordagem delineada, recombinando recursos de novas maneiras que tornem possível uma solução, criando novos objetos de conhecimento, novas unidades de informação ou outros produtos, que irão contribuir para resolver-e-exprimir o problema. (Planear e Implementar[a]; Criar[b])	
Verificar	Envolver-se em atividades para explicar ou justificar a solução encontrada com base nos recursos matemáticos e tecnológicos. (Verificar[a])	
Disseminar	Apresentar a solução ou produto a outros de relevo e ponderar o sucesso do processo de resolução do problema. (Verificar[a]; Refletir[b], Disseminar[b])	

[a] fase da resolução de problemas de matemática tal como proposto por Schoenfeld (1985)

[b] processo de resolução de problemas tecnológicos tal como proposto por Martin e Grudziecki (2006)

3.4 A Fluência Tecno-matemática na resolução de problemas

Ao encontro da terceira questão norteadora deste estudo, e também com forte presença na revisão da literatura, surge a necessidade de compreender esta capacidade de resolver-e-exprimir os problemas da competição a partir da relação que os jovens estabelecem com as tecnologias ao seu redor. Nas secções seguintes, procuro suporte teórico para essa compreensão, nomeadamente, que explique esta relação entre os jovens e as tecnologias que escolhem usar durante esta atividade de matematização e expressão de pensamento matemático, e ainda em termos dos aspetos que levam a perceber uma ferramenta como adequada e subsidiam a sua escolha e utilização.

3.4.1 Matemática e tecnologia: Literacias para o século XXI

A utilização de tecnologias digitais na resolução de problemas tem sido alvo de profunda reflexão num número significativamente crescente de instituições, mais ou menos relacionadas com educação e, em particular, com a educação matemática. Sob a tutela da

OCDE e reconhecendo o recurso ao conhecimento produzido pelas comunidades de investigação em Educação Matemática, um grupo internacional de especialistas que desenharam os sucessivos *frameworks* do estudo PISA, consideram que um aluno com uma elevada proficiência matemática tem também uma elevada capacidade para resolver problemas de matemática (OCDE, 2013). Este referencial teórico define *literacia matemática* da seguinte forma:

> Literacia matemática é a capacidade de um indivíduo de formular, aplicar e interpretar a matemática numa variedade de contextos. Inclui raciocínio matemático e o uso de conceitos matemáticos, procedimentos, factos e ferramentas para descrever, explicar e prever fenómenos. Leva os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática desempenha no mundo e apoia a formulação de juízos e decisões fundamentados por cidadãos construtivos, empenhados e reflexivos. (OCDE, 2013, p. 5)

Esta perspetiva encontra eco numa diversidade de trabalhos anteriores e correspondentes terminologias. A título de exemplo, Ahmed, Gimenez, Keitel, Klakla, Kraemer e Porfírio (2001) discutiram a noção de ‘competência matemática’; Kilpatrick (2001) procurou caracterizar o desenvolvimento da ‘proficiência matemática’ com base nos resultados do projeto *Adding up*; Goos, Geiger e Dole (2012) discutiram ‘numeracia’ no século XXI, a partir do modelo desenvolvido por Goos anos antes. No fundo, todos estes investigadores procuraram caracterizar a capacidade ou a aptidão para utilizar a matemática, bem como uma diversidade de ferramentas, para pensar matematicamente, o que se pode condensar na ideia de que “tornar-se matematicamente competente tem a ver com a forma como os alunos se apropriam e ganham perícia na *utilização de ferramentas* para pensar e agir” (Llinares & Roig, 2008, p. 506, grifo meu). No mesmo sentido, os últimos dois ciclos do PISA (realizados em 2012 e em 2015) contemplaram uma visão de ‘ferramentas matemáticas’ que ultrapassa o uso de um algoritmo ou um processo mental: “estas ferramentas incluem uma variedade de equipamentos físicos e digitais, *software,* e instrumentos de cálculo” (OCDE, 2013, p. 8).

Embora a utilização de tecnologias digitais na sala de aula de matemática seja uma temática muito explorada em variadíssimas vertentes, o seu uso em ambientes matemáticos exteriores à sala de aula, quer em contextos de enriquecimento curricular, quer no mundo do trabalho, também tem atraído vários investigadores em Educação Matemática ao longo dos últimos anos (Barbeau & Taylor, 2009; Hoyles, Noss, Kent & Bakker, 2010; Stahl, 2009).

Ao investigar que matemática seria necessária em certas profissões e locais de trabalho, Celia Hoyles e colegas identificaram uma interligação muito particular entre a utilização de capacidades matemáticas e capacidades tecnológicas (Hoyles, Noss, Kent, & Bakker, 2010; Hoyles, Wolf, Molyneux-Hodgson, & Kent, 2002). Para explicar essa interligação, os autores propuseram a expressão 'Literacias Tecno-matemáticas' e discutiram-na como uma noção que congrega as capacidades matemáticas e tecnológicas indispensáveis às atividades específicas de cada uma das profissões estudadas.

Quanto à composição da designação *literacias tecno-matemáticas*, os autores explicam que recorreram ao prefixo 'tecno' para destacar as formas pelas quais a matemática entra nos sistemas de atividade de cada contexto laboral, que envolvem uma cada vez maior quantidade de informação simbólica ou quantitativa e, em certa medida, um tanto invisível, no sentido de mascarada pelos próprios sistemas informáticos em uso. A escolha do termo 'literacias', no plural, teve o propósito de enfatizar, por um lado, as várias dimensões do conhecimento exigido no âmago dos locais de trabalho contemporâneos e, por outro, a "importância do envolvimento que vai além da manipulação de símbolos para se passar a uma apreciação de como esses símbolos transportam diferentes significados em diferentes contextos" (Kent, Noss, Guile, Hoyles & Bakker, 2007, p. 66). Desta forma, a noção de literacias tecno-matemáticas enfatiza o ser-se capaz de desenvolver pensamento matemático a partir de informações simbólicas ou quantitativas alusivas a um determinado contexto laboral, de incorporá-lo na tomada de decisões e comunica-las com eficiência. O conhecimento matemático que caracteriza as literacias tecno-matemáticas é, pois, moldado em termos das formas pelas quais é exprimido, nomeadamente, através das tecnologias que imperam naqueles ambientes.

Ao longo dos seus estudos, a equipa de investigadores percebeu que, apesar da adoção generalizada de sistemas informáticos nas empresas observadas, os gestores e os formadores de trabalhadores dessas empresas tinham dificuldades em reconhecer a necessidade de um novo tipo de conhecimento – a literacia tecno-matemática – e menosprezavam o seu potencial no desempenho dos seus negócios. Um outro resultado curioso desta investigação consiste na perceção, por parte dos trabalhadores, de que a informação mediada pelos sistemas informáticos e apresentada na forma de números, tabelas ou gráficos, são 'pseudomatemática', isto é, têm pouca conexão com as relações matemáticas subjacentes e expectáveis, possivelmente, por contraste com as suas experiências com a matemática escolar. Os investigadores sugeriram então que a formação de trabalhadores daqueles setores deveria ter por base o desenvolvimento da sua literacia tecno-matemática, isto é, a matemática inerente e indispensável a cada contexto laboral deve ser tornada visível e alcançável através de modelos que se possam manipular através de ferramentas digitais interativas (que a equipa desenvolveu posteriormente e apelidou de *technology enhanced boundary objects*).

No fundo, Hoyles, Noss, Kent e Bakker (2010) rejeitam a ideia de que a presença de tecnologias da informação e da comunicação, naqueles contextos de trabalho, reduzam a necessidade de desenvolvimento de capacidades de interpretação e compreensão dos produtos gerados com e por meio dessas ferramentas. O que parece suceder é que, embora tenham por base a interpretação e compreensão, está a despontar a necessidade de capacidades diferentes: novas formas de conhecimento matemático com tecnologias, novas formas de aquisição desse conhecimento, novas conceptualizações da aprendizagem naqueles contextos laborais.

Em suma, a noção de literacia tecno-matemática designa o conhecimento matemático funcional mediado por ferramentas tecnológicas, que está ancorado num contexto laboral concreto (Hoyles et al., 2010) e está em sintonia com as conceptualizações de literacia matemática e de literacia digital, atrás discutidas, na medida em que se referem à utilização, com sucesso, das competências matemáticas e tecnológicas em situações da vida do dia-a-dia.

Com efeito, o conceito de literacia digital, na perspetiva de Martin e Grudziecki (2006), envolve ser-se capaz de desempenhar, com sucesso, ações digitais que extravasam do contexto profissional para a vida pessoal, o lazer e a aprendizagem. Outra vertente desta competência diz respeito à sua variabilidade consoante as características pessoais do indivíduo, o que leva a que o desenvolvimento de literacia digital não implique somente a aquisição de conhecimento e técnicas específicas, mas também atitudes e qualidades pessoais, como a capacidade de planeamento, de execução, avaliação de ações digitais e reflexão sobre os seus progressos. O desenvolvimento da literacia digital surge, molda-se e manifesta-se em contextos sociais, portanto aproveito para retomar a discussão que foca a relevância do contexto nesta atividade de resolução de problemas, marcada pelo uso concomitante de recursos matemáticos e tecnológicos (Secção 3.1).

O referencial que Martin e Grudziecki (2006) desenvolveram envolve a conceção de literacia digital, atrás apresentada, e procura explicar o seu desenvolvimento em três níveis – a competência digital, o uso digital e a transformação digital (Figura 3.3). Para compreender em detalhe a competência digital, os autores descreveram uma lista de treze processos, mais ou menos sequenciais, que um indivíduo desempenha com ferramentas tecnológicas no âmbito de uma tarefa e num contexto específico (sintetizados na Tabela 3.2). Todavia, a literacia digital de um indivíduo é ativada e/ou desenvolvida pela necessidade de resolver uma tarefa ou um problema incorporado no seu contexto – profissional, escolar, familiar, ou outro – isto é, tem uma natureza social. Então, o indivíduo identifica a competência necessária para lidar com o problema ou a tarefa, ou seja, faz uso de ou procura adquirir os conhecimentos ou as aptidões indicadas, pelos processos que preferir e estiverem ao seu alcance.

Estes autores designam por *uso digital* a utilização informada da competência digital nos contextos profissionais ou do dia-a-dia, que envolve ainda o uso de conhecimentos específicos inerentes a essa profissão ou contexto. Esses usos digitais incluem o recurso a uma ferramenta tecnológica para "pesquisar, encontrar e processar informação, e então desenvolver um produto ou uma solução referente à tarefa ou problema" (Martin & Grudziecki, 2006, p. 258). Eventualmente, o produto ou solução encontrada podem desencadear outra ação da mesma natureza no contexto em questão. No fundo, os processos *formulação* e *reflexão*, o primeiro e o último, fazem a mediação entre as ações digitais e o contexto social e cultural em que decorrem. A Figura 3.4 apresenta um esquema que enquadra os processos de resolução de um problema tecnológico (ao centro) num contexto social e cultural.

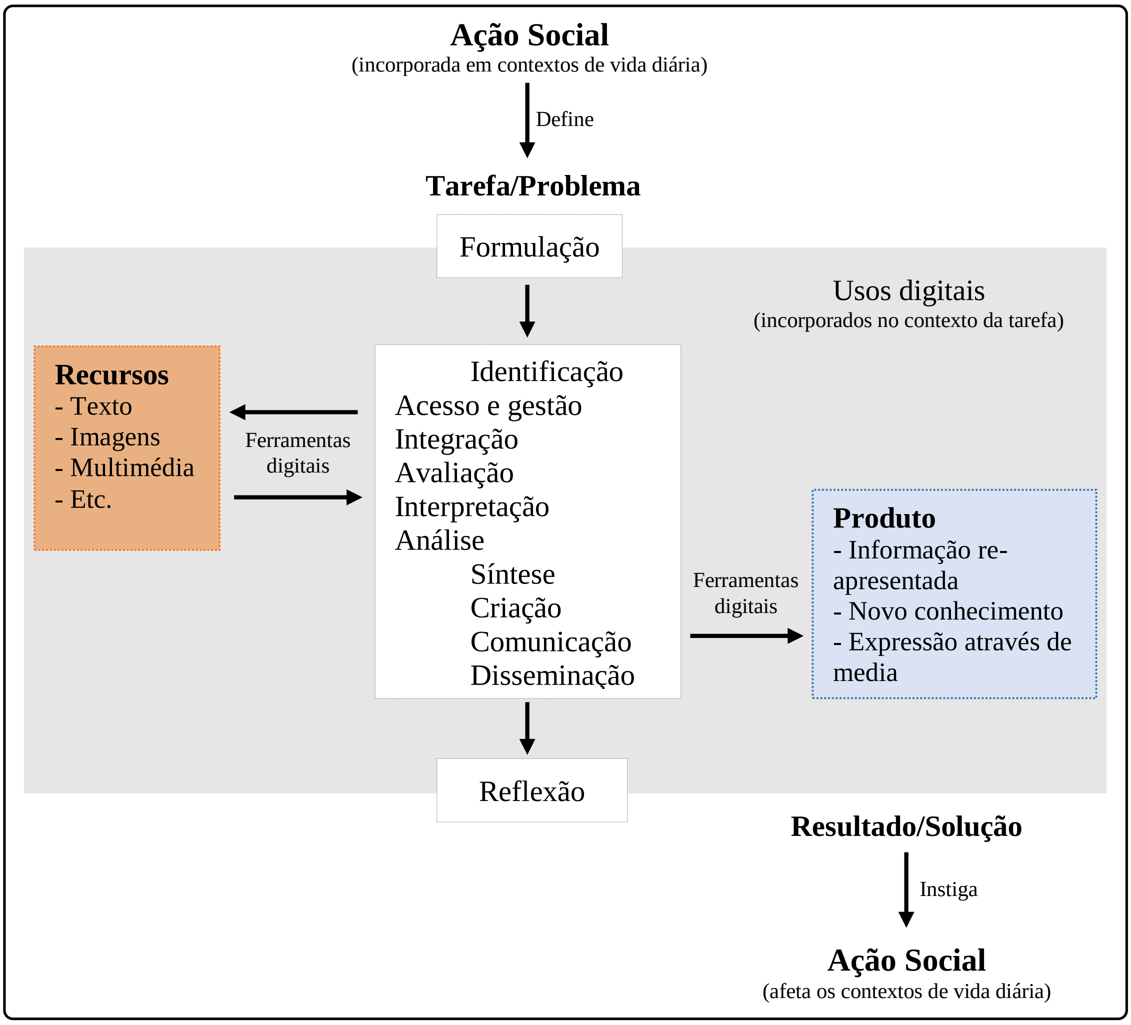


Figura 3.4. A literacia digital em ação, segundo Martin e Grudziecki (2006, p. 258)

3.4.2 Fluência Tecno-matemática para resolver-e-exprimir problemas

Seguindo o mesmo padrão de profusão de termos anteriormente identificada relativamente à literacia matemática, a literatura aponta uma diversidade de designações no que se refere ao uso eficiente de tecnologias digitais: literacia computacional, literacia digital, competência digital, literacia mediática, literacia da informação, para nomear algumas. Gallardo-Echenique, Oliveira, Marqués-Molias e Esteve-Mon (2015) fizeram recentemente uma revisão extensiva da literatura a este respeito.

Após uma longa discussão em torno do que constitui a literacia tecnológica e o que a distingue da literacia digital, Papert e Resnick (1995) avançaram com o termo ‘fluência digital’. A opção pela expressão ‘fluência’ tem por base a comparação estabelecida com a noção de se ser fluente numa dada língua, o que quer dizer que a fluência vai além do “saber usar” ferramentas digitais, tal como explica Resnick (2002):

> Para ser-se realmente fluente numa língua estrangeira, tem que se ser capaz de articular uma ideia complexa ou contar uma história envolvente; por outras palavras, tem que se ser capaz de "fazer coisas" com a linguagem. De forma análoga, ser-se fluente digitalmente envolve não só saber como usar ferramentas tecnológicas, mas também saber como construir coisas relevantes com essas ferramentas (Papert & Resnick 1995, citados por Resnick, 2002, p. 33).

Com efeito, já em 1999, o *National Research Council* (NRC, uma organização não governamental sem fins lucrativos da Academia Nacional das Ciências, Engenharia e Medicina dos Estados Unidos) emitiu um relatório intitulado *Being Fluent with Digital Technology* em que coloca a ênfase, precisamente, na ideia de fluência por oposição à de literacia. A justificação é clara: o termo literacia adquiriu uma forte conotação com a ideia de se ter certas habilidades (*skills*) o que remete para a competência na utilização de certas ferramentas tecnológicas, como o processador de texto, uma folha de cálculo ou o correio eletrónico. Contudo, a rápida e imprevisível transfiguração do mundo tecnológico hodierno faz com que "as competências existentes se tornem antiquadas e não existe caminho de migração para novas habilidades" (NRC, 1999, p. 2). Desta forma, a opção pelo termo 'fluência' procura fazer face a esta exigência de constante mudança e adaptação que requerem a contínua aquisição de novas competências.

Mais recentemente, Barron, Martin e Roberts (2007, p. 83) argumentam que a expressão 'fluência' permite descrever "a capacidade para reformular conhecimento, para expressar-se criativamente e apropriadamente, e produzir e gerar informação (ao invés de apenas compreendê-la)". Tal como acontece com a fluência linguística, as ferramentas tecnológicas podem ser encaradas como uma extensão do indivíduo que é tecnologicamente fluente, pelo que este tipo de competência diz respeito ao ser capaz de pensar e de se exprimir por meio de um dialeto, neste caso, tecnológico e/ou digital. Aproveitando para sublinhar o consenso existente com a perspetiva da relação simbiótica entre ser humano e tecnologia, defendida por Borba e Villarreal (2005), possuir uma elevada fluência digital é ser-se fluente a pensar, a produzir e a comunicar com tecnologias digitais, num processo que se quer transparente à semelhança de se ser fluente numa língua:

> os conceitos fluem do nosso cérebro e são ditos pela nossa boca. O processo é transparente para nós. O foco é o nosso pensamento, aquilo que queremos dizer, e não a tradução ou a pronunciação. Como resultado, somos muito mais eficazes a exprimir a nossa verdadeira intenção (Crockett, Jukes & Churches, 2012, pp. 13-14).

Esta noção de fluência surge também noutros trabalhos, uns mais e outros menos, relacionados com a matemática e as tecnologias. Por exemplo, Pea (1987) utiliza a expressão 'tecnologias cognitivas', para se referir à aprendizagem *com* tecnologias, e discute-as enquanto reorganizadoras da mente humana, ao invés de amplificadoras. Argumentando que o papel das tecnologias da informação e comunicação vai muito além de tornar mais fácil ou mais célere o que já somos capazes de fazer, o autor discute a ideia de tecnologia cognitiva como sendo "qualquer meio que permite transcender as limitações da mente" (Pea, 1987, p. 91), tanto em termos do pensamento que se pode desenvolver, da aprendizagem ou das atividades de resolução de problemas. A propósito das funções destas tecnologias cognitivas que permitam um indivíduo desenvolver atividades que envolvem pensamento matemático, Pea identifica as 'ferramentas de *fluência* conceptual', isto é, os programas que desobstruem os processos de resolução de problemas à medida que o indivíduo se vai tornando mais fluente em desempenhar determinadas tarefas matemáticas, consideradas de rotina. Tal como o autor justifica, as "tecnologias computacionais podem promover fluência ao permitir a prática controlada e individual de tarefas rotineiras e, assim, libertando recursos mentais dos alunos para esforços de resolução de problemas" (Pea, 1987, p. 106).

Por outro lado, Lévy (1994) discute a génese das coletividades pensantes na presença das tecnologias da inteligência, manifestando a ideia do que significa ser-se fluente com uma dada tecnologia a partir de uma comparação com o conhecimento de uma língua materna:

> A interiorização das tecnologias intelectuais pode ser muito forte, quase reflexa, como o podem ser o conhecimento de uma língua materna, a leitura e a escrita de ideogramas ou de alfabetos, os sistemas de numeração e de medida, a representação em linhas e em colunas, o uso de teclado das máquinas de escrever ou dos computadores, etc. (Lévy, 1994, p. 220).

Por conseguinte, a designação *fluência tecno-matemática* apresenta-se como forte candidata para descrever a essência da capacidade de utilizar tecnologias digitais para resolver e exprimir os problemas matemáticos do SUB14. Por um lado, continua a captar a relação de interdependência, mencionada por Hoyles et al. (2010), entre conhecimento matemático e tecnologia. Por outro, congrega a ideia de fluência enquanto o ser-se capaz de produzir pensamento matemático mediante a utilização de ferramentas digitais para reformular ou criar novo conhecimento e para expressar esse pensamento tecnologicamente. Assim, proponho que a *fluência tecno-matemática* (FTm) enfatize a conceção de ser fluente numa 'língua', que engloba não só conhecimento matemático e tecnológico mas também a utilização hábil de ferramentas digitais na interpretação e comunicação eficiente da solução tecno-matemática de um dado problema.

3.5 Dos conceitos teóricos à estruturação de um quadro de análise

O quadro conceptual aqui patente, construído simultaneamente a partir de uma revisão bibliográfica alargada e de confrontações com o contexto em estudo, fundamenta-se, naturalmente, em conceitos que estão arreigados em visões teóricas muito concretas e bem definidas na literatura, como é o caso da Teoria da Atividade ou da Resolução de Problemas. A esses conceitos e perspetivas teóricas, fui adicionando outros conceitos que me pareceram relevantes para compreender o fenómeno em causa – a atividade de resolução de problemas com tecnologias no âmbito do SUB14, procurando sempre fundamentar essas escolhas. Este processo assemelha-se ao que Lester (2010) apelidou de *bricolage*, pois permitiu-me analisar e selecionar noções ou conceitos de diferentes perspetivas com o propósito de os conjugar de forma apropriada, e o mais coerente possível, para empreender esta investigação. Importa agora explicar a forma como estas perspetivas – e a teia de conceitos que se veio a desenhar – irão ser operacionalizadas, transformando-se numa ferramenta de análise com potencial para, a partir dos dados empíricos, fornecer respostas às questões de investigação que motivam este trabalho.

As noções teóricas trazidas a esta discussão permitem organizar um quadro de análise que se sustenta em três patamares (Figura 3.5). Embora cada patamar possa subsistir com relativa independência, pois encontra-se focado numa questão de investigação e está munido de um conjunto de conceitos e noções específicos, a conjugação entre os três patamares é fulcral na medida em que possibilitará ultrapassar uma visão 'fatiada' da atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias, intensificando a caracterização integral e o entendimento global deste fenómeno, tal como pretendido. Passo a explicitar em que conceitos se baseia a análise de dados em cada um destes três patamares e de que forma se relacionam entre si.

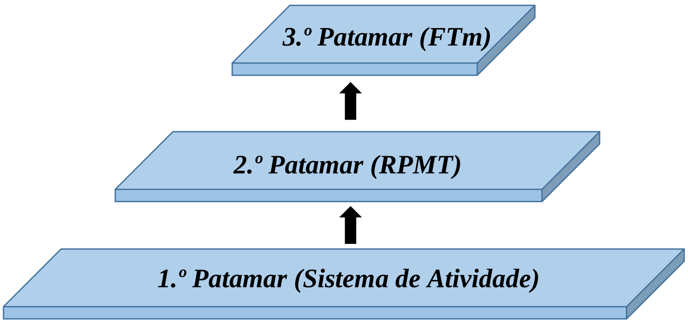


Figura 3.5. Patamares de análise e suas dimensões

Num primeiro patamar, pretendo caracterizar a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias subjacente à participação de jovens numa competição baseada na Internet. Desse modo, irei recorrer às noções estruturantes de um *sistema de atividade*, segundo a conceptualização proposta por Engeström (1987) tendo como base o triângulo de mediação proposto por Vygotsky (1978), tal como se apresenta já ligeiramente adaptado na Figura 3.6.

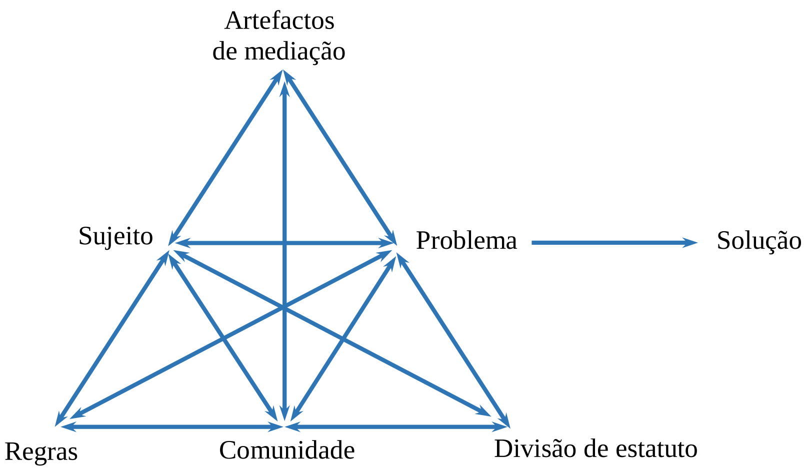


Figura 3.6. Primeiro patamar de análise de dados: caracterização de sistemas de atividade

Da aplicação desta ferramenta de análise aos dados que virei a recolher, espero captar a essência do sistema de atividade de cada jovem envolvido no estudo, isto é, perceber quais os traços implícitos na sua atividade – de natureza social, cultural e até histórica – que podem apoiar a compreensão dos seus processos de resolver e exprimir com tecnologias os problemas de matemática do SUB14.

Com esse conhecimento em ‘modo espera’, é possível concentrar a atenção no triângulo de relações situado no topo do esquema de um sistema de atividade. A partir daqui, a análise dos dados estará centrada no processo mediado por artefactos tecnológicos segundo o qual os jovens obtêm as soluções dos problemas matemáticos e as exprimem. Para compreender as (re)configurações desta resolução de problemas de matemática com o recurso espontâneo ao uso de tecnologias, será usado o modelo de Resolução de Problemas de Matemática com Tecnologias (RPMT) resultante de uma síntese entre o modelo de resolução de problemas tecnológicos proposto por Martin e Grudziecki (2006) e o modelo de resolução de problemas matemáticos proposto por Schoenfeld (1985). A Figura 3.7 sublinha este segundo patamar de análise, embora mantenha visíveis as raízes sociais e culturais fundacionais desta atividade.

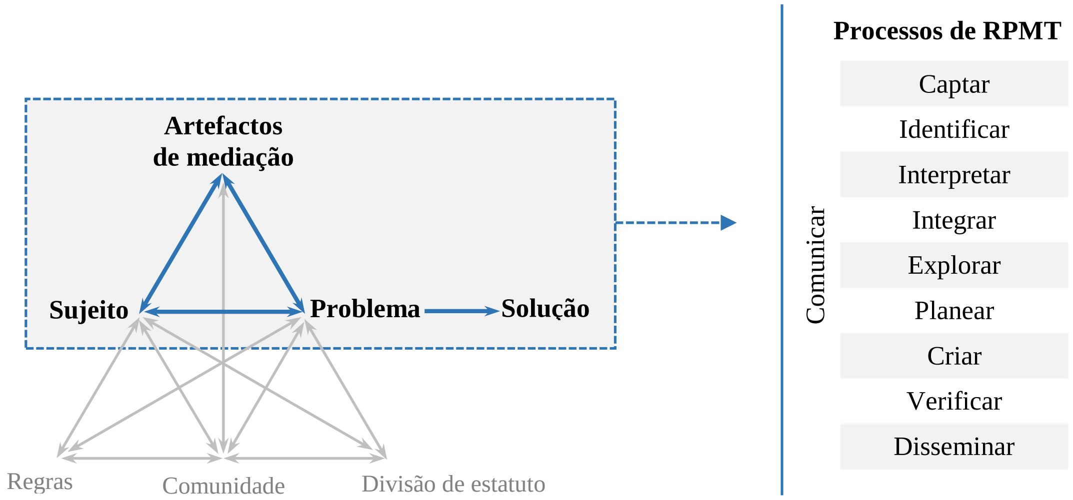


Figura 3.7. Segundo patamar de análise de dados: caracterização dos processos de resolução de problemas de matemática com tecnologias

Apesar de prever que algumas ideias ou conceitos irão surgir de forma transversal aos vários patamares de análise (e.g., a ideia de que resolver um problema é desenvolver pensamento matemático produtivo, ou a noção de resolver-e-exprimir, entre outros), o último patamar de análise visa ampliar o conhecimento sobre a relação que cada jovem participante estabelece com os artefactos de mediação, em particular, as tecnologias, durante a atividade de resolução de problemas de matemática do campeonato. Pretendo, pois, caracterizar de que forma a capacidade para resolver os problemas e exprimir as suas soluções pode ser entendida a partir da relação que cada jovem mantém com as tecnologias que escolhe utilizar nesse processo. Atrás argumentei que esta relação tem uma natureza simbiótica e que se poderia manifestar através da metáfora 'humanos-com-media'. Procurarei, então, descrever essa capacidade de produzir pensamento matemático mediante a utilização de ferramentas digitais para reformular ou criar novo conhecimento e expressar esse pensamento, por meio da noção de fluência tecno-matemática (FTm). Tal como a literatura sugere, antevejo a existência de diferentes fluências tecno-matemáticas que se poderão entrever da análise do reconhecimento de possibilidades de ação (affordances) com uma ferramenta digital (como algo relativo ao sujeito e ao artefacto) por um jovem-com-media (como uma unidade) enquanto desenvolve modelos conceptuais num contexto de resolução-e-expressão de problemas matemáticos tal como sintetizado na Figura 3.8.

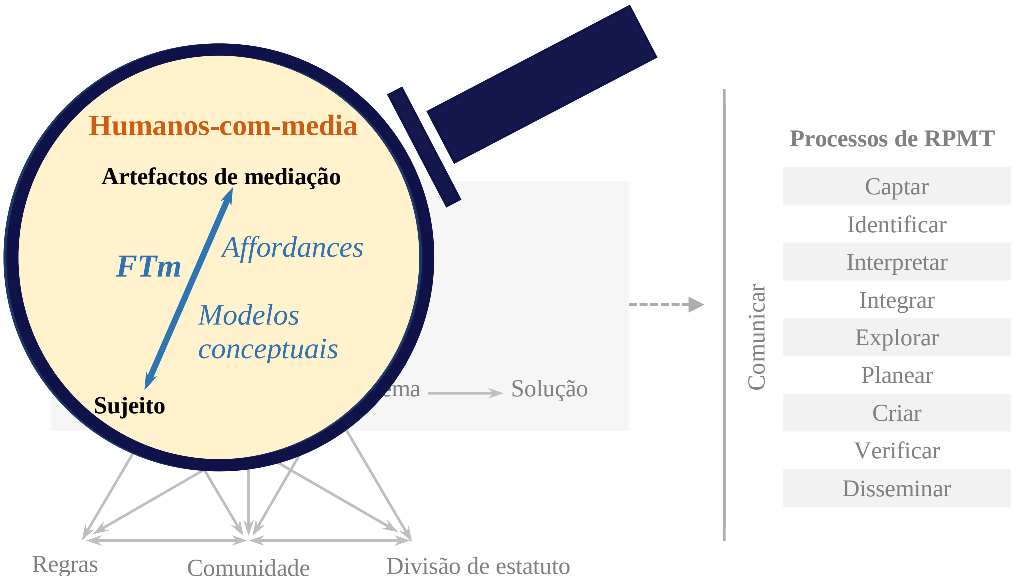


Figura 3.8. Terceiro patamar de análise de dados: caracterização da capacidade de resolver e exprimir problemas de matemática com tecnologias

Retomo agora a ideia de que o fenómeno em estudo aparenta uma natureza multifacetada, tal como identificado no Capítulo 1 (Secção 1.6.3), e que tentei inicialmente contornar ao refletir sobre outras possíveis formulações do problema de investigação. Porém, são essas várias circunstâncias da atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias que parecem impelir uma análise conduzida sob múltiplos focos teóricos, tal como sintetizei nesta secção. Gostaria pois de destacar a intencionalidade em lidar com este aspeto do fenómeno, delineando uma análise de dados que, podendo parecer espartilhada, pressupõe a complementaridade entre resultados e o aprofundamento progressivo da sua compreensão, isto é, tem potencial para permitir a construção de um retrato compreensivo e globalizante desta atividade. Por outro lado, gostaria também de realçar que esta organização do quadro de análise faz emergir uma amena transição entre correntes teóricas que, tradicionalmente, surgem na literatura como conflituantes: as de natureza social (como a Teoria da Atividade) e as de natureza cognitiva (como a Resolução de Problemas).

4

METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

There is no empirical method without speculative concepts and systems;
and there is no speculative thinking whose concepts do not reveal, on closer investigation,
the empirical material from which they stem.

(Albert Einstein[20])

Preâmbulo

"*Investigar* é uma de muitas formas diferentes de conhecer ou compreender . . . é um processo de inquirição sistemática que é concebida para recolher, analisar, interpretar e utilizar dados" (Mertens, 2009, p. 2). Esta aceção vai ao encontro de outras, em particular da de Stenhouse (1984) que a resumia nestes termos: investigar é uma "inquirição sistemática que é tornada pública" (p. 77). Portanto, de acordo com estes autores, a validade de uma investigação assenta na capacidade do investigador em conduzir (e relatar de forma clara e rigorosa) um trabalho de pesquisa que segue um *processo sistemático*, isto é, que segue um sistema, que é metódico ou ordenado, meticuloso ou organizado. Daqui surge, naturalmente, uma diversidade de questões: O que se poderá considerar um sistema? Quais as possibilidades de sistemas a seguir e o que os distingue? E será imprescindível seguir *um* sistema predefinido? Em termos muito amplos, um sistema pode ser visto como um 'conjunto de princípios verdadeiros ou falsos reunidos de modo que formem um corpo de doutrina'[21]. Portanto, o desenvolvimento de uma

[20] Citado por Schoenfeld, A. (2007). Method. In F. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 69-107). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

[21] "sistema", in Dicionário Priberam da Língua Portuguesa [em linha], 2008-2013, https://www.priberam.pt/dlpo/sistema.

investigação enquanto um processo sistemático pauta-se por uma forma de pensar, um conjunto de princípios fundamentais.

A revisão da literatura que efetuei, além de me permitir enquadrar e aprofundar a compreensão de diversas facetas do fenómeno em estudo, também me levou a refletir sobre os princípios fundamentais subjacentes às abordagens metodológicas adotadas. Se é natural que qualquer investigação seja dirigida por um "conjunto aberto de asserções, conceitos ou proposições logicamente relacionados e que orientam o pensamento e a investigação" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 52), isto é, um *paradigma de investigação*, constato que a maioria dos trabalhos que consultei são guiados por um sistema de pressupostos muito semelhante, embora alguns autores o mencionem explicitamente e outros apenas façam referência a métodos conotados com esse posicionamento.

> Um paradigma pode ser visto como um conjunto de *crenças básicas* . . . representa uma *visão do mundo* que define, para o seu portador, a natureza do "mundo", o lugar do individuo nele, e a gama de relações possíveis com aquele mundo e as suas partes. (Guba & Lincoln, 1994, p. 107).

Guba e Lincoln (1994) discutiram de forma aprofundada os diferentes paradigmas, correspondentes pressupostos e suas implicações nas pesquisas que orientam. De forma breve, um paradigma pode ser caracterizado por três tipos de questões, que estão relacionadas entre si, nomeadamente, *questões ontológicas* que dizem respeito à forma e à natureza da realidade e, consequentemente, àquilo que é possível ao investigador conhecer sobre essa realidade; *questões epistemológicas*, que se referem à relação entre aquele que conhece, o investigador, e aquilo que pode ser conhecido, o seu objeto de estudo; e por *questões metodológicas*, isto é, as decisões que o investigador tem que tomar ao longo da condução da sua pesquisa. Assim, as características decorrentes deste questionamento proporcionam ao investigador uma visão global e coerente do conhecimento, do seu papel e da sua relação com esse conhecimento e as estratégias metodológicas que pode utilizar para o explorar.

Guba e Lincoln (1994) identificaram quatro paradigmas e caracterizaram-nos com base nas suas questões ontológicas, epistemológicas e metodológicas: o positivista, o pós-positivista, a teoria crítica (*critical theory*, no original) e o construtivista (também designado por investigação naturalista pelos autores). Mais recentemente, estes mesmos autores optaram por reformular a sua categorização ao acrescentar à lista anterior o paradigma participatório (Guba & Lincoln, 2005).

Mertens (2009), tendo por base os trabalhos de Lather (1992) e de Guba e Lincoln (1994, 2005), também desenvolveu uma taxonomia dos principais paradigmas: pós-positivista, construtivista, transformador e pragmático (p. 8). Realçando que uma teoria pode ser menos abrangente do que um paradigma, Mertens (2009) argumentou que a 'teoria crítica' de Guba e Lincoln (1994, 2005) pode ser considerada como uma teoria no âmbito do paradigma transformador. Numa linha de argumentação semelhante, a autora defende que o 'paradigma participatório' deve antes ser considerado uma 'metodologia' que pode ser aplicada sob diferentes paradigmas, dependendo das crenças que guiam o investigador. A inclusão de um quinto paradigma na sua taxonomia – o pragmático – deve-se, sobretudo, ao trabalho que Mertens e vários outros investigadores desenvolveram no campo dos métodos de investigação mistos (e.g., Creswell, 2009).

Uma discussão que permanece acesa, e de certa forma ganhou novo ímpeto com o aparecimento destes designados métodos mistos e a procura de um paradigma que lhes confira suporte filosófico a montante, diz respeito ao facto de diversos investigadores considerarem que os rótulos 'quantitativo', 'qualitativo' e 'misto' se constituem como paradigmas de investigação. Vários têm sido os que criticam essa visão: Guba e Lincoln (1994) já alegavam que os termos quantitativo e qualitativo se referem ao método e que "as questões do método são secundárias às questões do paradigma" (p. 105); Mertens (2009) explicava que, na sua aceção, a designação qualitativo não se refere a um paradigma mas a um tipo de metodologia normalmente associado com o paradigma construtivista. Todavia, e como Mertens (2009) fez notar, a discussão em torno do papel de um paradigma de investigação tem revelado posicionamentos extremados. Por um lado, há autores como Patton (2002) que relativizam o papel da adoção de um paradigma, na medida em que é possível aprender-se a ser bom investigador sem um envolvimento profundo em questões epistemológicas pelo que, em certa medida, esse conhecimento é desnecessário e pode até constituir um obstáculo. Por outro, há posicionamentos que não admitem a realização de investigação no campo das ciências sociais sem esse enquadramento filosófico, como Schwandt (2000, p. 190) defendeu: "A prática de inquirição social não pode ser adequadamente definida como uma realização ateórica que requer apenas proeza metodológica".

Apesar desta profusão de terminologias e da contínua discussão que geram, penso que continuam a destacar-se duas doutrinas no campo da investigação em ciências sociais: a de natureza experimental-positivista e a naturalista (outro termo que tem sido usado como sinónimo de construtivista e de interpretativo). Na origem da distinção estão entendimentos radicalmente distintos sobre o conhecimento de um determinado fenómeno, não apenas sobre a sua forma e natureza como também sobre aquilo que se assume possível conhecer sobre esse fenómeno (Guba & Lincoln, 1994).

Diversos autores têm discutido, ao longo do tempo, as potencialidades destas duas correntes nos estudos de foro social (Patton, 1990), muito embora a abordagem naturalista só tenha começado a ser utilizada, efetivamente, nas ciências da educação no final da década de 60 do século passado (Bogdan & Biklen, 1994). As abordagens naturalistas, apesar de terem origens anteriores aos métodos experimentais-positivistas, foram sendo recuperadas pelos investigadores que procuravam e sentiam necessidade de uma "postura interpretativa dos comportamentos e dos fenómenos sociais" (Almeida & Freire, 2003, p. 101). Por outro lado, o paradigma positivista, preocupando-se com a extensão dos fenómenos, isto é, com a sua quantificação, com a previsão e ainda com a formulação de leis gerais, recorre a métodos experimentais e a medições quantitativas como forma de testar hipóteses. Assim, e em oposição aos métodos usados na tradição do positivismo lógico, o paradigma naturalista argumenta que as ciências sociais e humanas não devem socorrer-se das mesmas ferramentas e técnicas que as chamadas ciências da natureza. Uma vez que são os fenómenos humanos que constituem o objeto de estudo do paradigma naturalista, este possui métodos próprios que permitem uma compreensão da multiplicidade e do tecido de aspetos que configuram tais fenómenos.

No que se refere explicitamente ao campo da Educação Matemática enquanto domínio de investigação, no seu percurso de afirmação e autonomia, é possível identificar vários momentos históricos em que a variedade de estudos produzidos mostra uma certa pulverização dos diferentes paradigmas do conhecimento (Schoenfeld, 2002; Stinson & Bullock, 2012). Com base em diversos trabalhos e na revisão oferecida por Kilpatrick (1992), Stinson e Bullock (2012), identificaram e sumariaram quatro momentos marcantes na investigação em Educação Matemática, ao longo dos últimos 50 anos. O primeiro diz respeito à investigação produzida nos anos 70, muito marcada pelo positivismo e pelo seu propósito de fazer previsões a partir da observação e medida, em que se procurava quantificar um ensino da matemática eficaz ao relacioná-lo com os resultados dos alunos. Foi, por isso, designado por *momento processo-produto*. Já no início dos anos 80, decorrente de preocupações com uma excessiva dependência da inferência estatística, vários investigadores "começaram a explorar metodologias qualitativas adaptadas de disciplinas como a antropologia, a psicologia cultural e social, a história, a filosofia e a sociologia" (p. 43) – o *momento interpretativista-construtivista*.

Mas à medida que os investigadores se centraram em compreender os fenómenos sociais e as interações entre professores e alunos, "começaram a compreender a necessidade de contextualizar essas interações" pelo que o "reconhecimento de que o significado, o pensamento, e o raciocínio são produtos de ação social em contexto" (p. 44) marcaram o designado *momento da viragem social*. Tal como os autores explicam, a investigação não abandona por completo a sua raiz na psicologia mas centra-se numa visão sociocultural do ensino e da aprendizagem da matemática em que a compreensão dos contextos é fundamental. As investigações começam a debruçar-se não só sobre as salas de aula, mas também sobre as escolas, as comunidades locais, as sociedades e a forma como impactuam nos alunos e professores, na aprendizagem e no ensino. Estes movimentos de *zoom in* e *zoom out*, no sentido de afastamento e aproximação progressivos aos contextos, levaram alguns educadores matemáticos a adotar um certo "grau de consciência e responsabilidade social ao observar um quadro social e político mais amplo" (Gates & Vistro-Yu, 2003, p. 63, citado por Stinson & Bullock, 2012). É o *momento da viragem sociopolítica* na investigação em Educação Matemática, cujo início coincide com a viragem do século. Na perspetiva dos autores, o interesse de muitos investigadores deslocou-se das questões centradas em explicar *como* melhorar o ensino da matemática e o desempenho dos alunos, para abraçar uma agenda que questiona o próprio *porquê* da Educação Matemática. Não obstante este progresso em termos da agenda investigativa em Educação Matemática, os aspetos que caracterizam os vários momentos identificados continuam a reger a diversidade e multiplicidade de estudos, o que quer dizer que, enquanto persiste o desenvolvimento de investigações com uma forte matriz positivista, existem também estudos de índole qualitativa, sejam eles construtivistas, de cariz social ou sociopolítico.

Uma vez que diferentes paradigmas servem diferentes propósitos de investigação, cabe ao investigador encontrar o que melhor se adequa aos seus objetivos, tal como recomendaram Cohen, Manion e Morrison (2007) ao aconselhar o princípio norteador '*fitness for purpose*', a adequação do paradigma ao propósito do estudo. Consciente das vantagens e dos desafios que a adoção de um posicionamento desta natureza pode trazer aos estudos inseridos no campo das ciências sociais e, em particular da Educação Matemática, ponderei, por um lado, a formulação do problema e das questões de investigação e, por outro, as características do ambiente em que decorre o SUB14. Deste modo, considero que este estudo tem por base os princípios do paradigma interpretativo que, de um modo muito geral, é caracterizado pela premissa de que *a realidade é construída socialmente* (Creswell, 2003; Eichelberger, 1989; Guba & Lincoln, 1994, 2005; Mertens, 2009; Schwandt, 2000) – o que tem levado diversos autores a optar pela designação de paradigma construtivista.

Os princípios do paradigma interpretativo incluem o pressuposto de que toda a atividade humana é essencialmente uma experiência social e de construção de significados (Eisenhart, 1988) que a pesquisa procura reconstruir de forma intencional e a partir das perceções dos participantes sobre a sua atividade e a forma como os significados que lhes atribuem se relacionam com os seus comportamentos e ações (Eichelberger, 1989). Este posicionamento remete para uma rejeição da noção de que há uma realidade objetiva que pode ser conhecida, pelo que o papel do investigador construtivista é, precisamente, "compreender as múltiplas construções sociais de significado e conhecimento" (Mertens, 2009, p. 18). Presume-se que estes significados, que o indivíduo desenvolve a partir das suas experiências no mundo, são múltiplos, o que impele o investigador a explorar essa complexidade. A (re)construção da realidade tem por base as interpretações dos dados recolhidos, confiando tanto quanto possível na perceção dos participantes no estudo, já que resultará de uma tentativa de compreender a complexidade das experiências a partir do ponto de vista daqueles que as vivem (Creswell, 2003; Guba & Lincoln, 2005; Schwandt, 2000). Para além disso, o foco da investigação também pode residir nos contextos nos quais as ações decorrem, pelo que o investigador pode procurar compreender as questões históricas ou culturais desses contextos, nos quais os participantes estão imersos. Por seu lado, os investigadores interpretativos também reconhecem que os seus percursos de vida e crenças moldam a sua interpretação pelo que devem posicionar-se na pesquisa que fazem para deixar claro de que forma a sua interpretação "flui a partir das suas experiências pessoais, culturais e históricas" (Creswell, 2009, p. 8).

Nesta perspetiva, argumenta-se que é possível compreender objetivamente o significado subjetivo de uma ação. Embora neste paradigma a investigação seja encarada como um "produto dos valores dos investigadores e não pode ser independente deles" (Mertens, 2009, p. 16), o investigador – o *intérprete* (Matos & Carreira, 1994) – deve empregar um método que lhe permita afastar-se dos seus próprios modelos e referências, e adotar uma atitude teórica enquanto observador (Schwandt, 2000). Embora exista uma diversidade de abordagens metodológicas que podem ser desenvolvidas na investigação de cunho interpretativo, há um conjunto de métodos qualitativos que são bastante comuns, pelo que o investigador pode ler documentos produzidos pelos participantes no estudo, realizar entrevistas formais e informais, fazer observações (Eichelberger, 1989; Mertens, 2009) e, a partir dos dados assim recolhidos, desenvolver classificações e fazer descrições densas que vão "além dos factos e das aparências, apresentando com grande riqueza de pormenor o contexto, as emoções e as interacções sociais que ligam os diversos participantes entre si" (Ponte, 2006, p. 15). Um alerta habitual refere-se ao processo muitas vezes lento e tortuoso de definição definitiva das questões de investigação, isto é, o investigador interpretativo deve estar consciente de que as questões orientadoras do estudo podem evoluir e alterar-se à medida que o estudo se desenrola (Mertens, 2009).

Posto isto, torna-se mais claro que conceber uma investigação exige um rigoroso pensar dos procedimentos a seguir com vista à obtenção de dados pertinentes que possam contribuir de forma fiável para a construção da compreensão pretendida do fenómeno em estudo – "a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias". Ao constatar que também partilho desta visão construtivista do mundo, do conhecimento e da aprendizagem, esta parecia ser a perspetiva mais adequada à pesquisa focada nos comportamentos relevantes dos participantes neste estudo, concorrentes no SUB14, comportamentos esses que não podem ser manipulados, mas que decorrem em contextos onde é possível fazer observações e entrevistas sistemáticas. Poderia portanto desenvolver uma relação intensa e inquiridora com os jovens participantes, num processo de sucessivas buscas de sentido para o objeto de estudo.

Regra geral, o investigador qualitativo procura definir um enquadramento teórico que dê conta do desenvolvimento da investigação na temática estabelecida, circunscreva os conceitos envolvidos no seu trabalho de investigação e lance linhas de compreensão do problema em estudo. Deste quadro, que é teórico, espera-se que assumam relevância teorias específicas, conceitos fundamentais mas também perspetivas de análise. A fase de decisões passa igualmente por colocar questões: Que dados obter? Como lhes aceder? A que instrumentos recorrer? Fazem igualmente sentido outras preocupações de carácter metodológico: Como organizar esses dados? Como transformá-los em informação útil? Como analisá-los? Que teorias e conceitos poderão ser ativados de forma produtiva e que novas construções teóricas poderão decorrer do diálogo entre os dados empíricos e o campo teórico?

Uma vez que as questões enunciadas neste estudo ganharam especial relevo durante a planificação de uma investigação que pudesse responder às questões inicialmente levantadas, senti necessidade de realizar uma primeira experiência de investigação. Este estudo preliminar teve como principal contributo para este trabalho adquirir uma maior familiarização com os fatores envolvidos no fenómeno em estudo (Stebbins, 2001), bem como auxiliar na tomada de decisões, como a construção dos instrumentos de recolha de dados ou as formas de lhes aceder. O estudo preliminar, que passo a descrever na secção seguinte, foi realizado em 2010/2011 numa fase precoce do trabalho de investigação que antecedeu a formulação definitiva da questão central do estudo e a definição do quadro conceptual, tais como os apresentei nos respetivos capítulos.

1ª Fase: Um estudo preliminar

4.1 Um estudo preliminar: porquê e para quê

Vários autores justificam a pertinência e, por vezes, a absoluta necessidade de se conduzir um estudo preliminar, na medida em que esse trabalho exploratório poderá contribuir para a preparação da investigação central (Babbie, 2007; Stebbins, 2001). Apesar de este tipo de estudo não ter o propósito de originar respostas satisfatórias para a questão de investigação central, pode fazer emergir pistas ou trazer indícios dos métodos que melhor se adequem ao pretendido (Babbie, 2007). Essas contribuições poderão fazer-se sentir na reformulação do problema a investigar ou das questões que o assistem, na averiguação da exequibilidade dos processos de recolha de dados e das técnicas de análise, ou até mesmo na convicção da adequação do referencial teórico (Yin, 1989/2009; Babbie, 2007; Ketele & Roegiers, 1995).

Segundo Babbie (2007), deve-se recorrer a um estudo prévio quando existe algum tipo de constrangimento na recolha dos dados, o que efectivamente acontecia neste caso particular: a atividade de resolução de problemas ocorre em variados contextos extra-escolares e sofre influência de numerosos factores – ambientais e sociais – impossíveis de controlar, identificar ou, sequer, prever. Ponderando, assim, a natureza do fenómeno que pretendia estudar, as informações a recolher, bem como a complexidade do contexto em que a investigação iria estar ancorada, optei por planificar um estudo norteado pelo paradigma interpretativo, seguindo uma abordagem qualitativa e, mais concretamente, recorrendo a três casos. Ressalvo que, embora este estudo servisse objetivos muito claros, não foi encarado com algumas das preocupações clássicas inerentes às investigações de carácter extensivo (como ‘levantamentos’ ou estudos de larga escala), nomeadamente, do teste ou validação dos instrumentos ou, num sentido mais abrangente, da sua fiabilidade ou validade.

Assim, este estudo preliminar visava explorar, testar e refinar (i) *formas de aceder aos dados* – uma vez que os concorrentes dispõem de duas semanas para responder aos problemas e podem fazê-lo nos mais diversos locais e recorrendo à ajuda de familiares, amigos ou professores, como se poderia garantir uma observação o mais real possível dessa atividade pessoal de resolução de problemas? (i) *a relevância e adequação do* *enquadramento teórico* – de que forma a literatura poderia contribuir para a interpretação dos dados? Quais as suas potencialidades? Que limitações se anteviam? e (iii) *os instrumentos de recolha e técnicas de análise de dados* – quais os instrumentos mais adequados? Que constrangimentos poderiam surgir durante a sua aplicação?

Consciente destas preocupações, iniciei este estudo definindo processos de recolha de dados e solicitando a colaboração da Organização do SUB14 no sentido de obter informações relativamente às produções dos concorrentes nas últimas edições do Campeonato, bem como para contactar um concorrente que pudesse participar numa experiência em tempo real de resolução de problemas. As próximas subsecções reportam três casos de atividade de resolução de problemas no âmbito do SUB14: o primeiro caso serviu para analisar formas de aceder aos dados e testar procedimentos; o segundo e o terceiro caso serviram para estudar a relevância e adequação das linhas teóricas embrionárias. Numa última subsecção apresento uma análise global sobre a construção e aplicação de instrumentos de recolha de dados e otimização da sua análise.

4.2 Formas de aceder aos dados e procedimentos testados

Um dos maiores obstáculos às investigações em educação, que se focam em contextos exteriores à sala de aula ou à própria Escola, é precisamente o acesso aos dados. Com base em trabalhos anteriores (Jacinto, 2008; Jacinto, Amado, & Carreira, 2009; Jacinto & Carreira, 2010a), constatei que os jovens participantes no SUB14 enviam resoluções criativas dos problemas, quer do ponto de vista das estratégias matemáticas que desenvolvem, quer das tecnologias a que recorrem para definir, implementar, avaliar ou comunicar esses processos.

Na Suécia, Aarsand (2007) conduziu um estudo em que pretendia analisar e discutir como é que as crianças participam em jogos de computador e em salas de conversação *online*, na sua vida diária. Deparando-se com a impossibilidade de observar essas atividades na Escola, o investigador apercebeu-se de que a forma mais fidedigna de obter informações seria recorrer aos ambientes familiares das crianças. A investigação, com características etnográficas, veio a ser incluída num projeto internacional sobre a vida familiar intitulado *Everyday Lives of Working Families*, pelo que Aarsand pôde usufruir do dispositivo metodológico já em curso, recolhendo cerca de 300 horas de filmagens das atividades das crianças de oito famílias, complementadas com entrevistas aos participantes na experiência.

De forma semelhante, a atividade de resolução de problemas que os participantes no SUB14 desenvolvem não se confina a um único local ou espaço e, na maioria das vezes, é retomada ao longo da quinzena. E tal como a experiência sueca, este estudo também poderia beneficiar de estar integrado no Projeto de Investigação Problem@Web. Assim, o estudo preliminar teve início com a seleção de um jovem participante no SUB14, que pudesse ser um bom informante e cuja família mostrasse interesse e disponibilidade para abrir as portas de sua casa, permitindo uma observação do jovem a resolver um problema do campeonato. A Equipa Organizadora do SUB14 teve um papel crucial na identificação de um potencial participante e no acesso ao seu meio familiar pois, conhecendo bem de perto o percurso da maioria dos concorrentes, também contacta habitualmente com os seus familiares quer ao longo de cada edição dos campeonatos quer durante as Finais presenciais.

Comecei também por definir o tipo de problema que seria proposto ao participante, de forma que fosse ao encontro do que habitualmente é exigido no SUB14. Esse problema foi disponibilizado, temporariamente, no *website* do campeonato e seria solicitado que o jovem lhe acedesse e tentasse resolvê-lo, reproduzindo com normalidade a sua atividade quando participa efetivamente no SUB14.

A jovem selecionada era participante assídua em vários Campeonatos de Matemática – SUB12, SUB14 e Olimpíadas Concelhias da Matemática – e foi finalista em todas as edições dos mesmos. Os pais acederam em receber a investigadora em sua casa e mostraram bastante interesse em perceber o propósito do estudo, descreveram o seu envolvimento na aprendizagem das suas duas filhas e, em especial, na aprendizagem da Matemática, e ainda discursaram sobre a importância das atividades extracurriculares no desenvolvimento integral dos jovens. Em particular, mostraram bastante apreço pelos Campeonatos de Matemática promovidos na Universidade do Algarve, confessando que também eles se sentiam desafiados pelos problemas do SUB14.

Os pais da concorrente assinaram uma autorização que consentia a sua participação no estudo, e que possibilitou: a captura de ecrãs, a gravação áudio, a gravação vídeo, a publicação de transcrições e a divulgação de excertos do vídeo, pretendendo contudo a ocultação do rosto da sua educanda. Parte significativa da recolha de dados ocorreu através de captação de imagens da jovem em atividade de resolução de problemas, complementada com notas de campo recolhidas das conversas informais com a participante, a sua irmã e os seus pais, e captura de ecrãs do seu computador durante a resolução de um problema. Salienta-se que a concorrente mostrou interesse em escolher o seu próprio pseudónimo para este estudo: Teresa.

Posteriormente, os documentos produzidos foram digitalizados, a resolução final foi solicitada à Organização do SUB14, a entrevista vídeo gravada foi transcrita, e esses materiais foram analisados, procurando compreender se a descrição do processo de resolução de problemas e se as metodologias adotadas tinham potencialidades para dar corpo ao *design* de investigação do estudo que se estava a projetar.

4.2.1 Caso 1: Teresa a resolver um problema do SUB14

O desafio é muito apreciado por todos os elementos da família de Teresa, especialmente pelo pai, de origem alemã, e que sempre gostou muito de Matemática. A concorrente, que reside no concelho de Loulé, frequentava então o 7.º ano de escolaridade, tendo participado nos Campeonatos SUB12 e SUB14 desde o seu 5.º ano. Sendo o propósito desta visita observar como é que um jovem resolve um dos problemas do SUB14, no seu contexto, espaço e ambiente natural, procurou-se compreender todo o processo. Teresa começou assim por explicar que costumava imprimir o enunciado do problema e, havendo um prazo alargado para enviar a sua resolução, ficava "*a pensar nele durante uns dias*". Se era fácil chegar à solução, costumava responder logo. Contudo, quando o problema era mais complicado, conversava com o pai sobre os aspetos que não estava a compreender ou sobre os possíveis erros do seu raciocínio. Procurava sempre responder dentro do prazo e demonstrava bastante brio em que a completude e a clareza da sua resolução refletissem o empenho que nela tinha depositado.

O problema colocado no *website* do SUB14 pode ser considerado um problema de lógica: mediante um conjunto de pistas, o problema solicitava a ordem pela qual cinco amigas estariam sentadas num banco de um parque (Figura 4.1).

Passeio no parque

A Cristina, a Marina, a Silvina, a Gina e a Lina estão sentadas num banco de um parque.

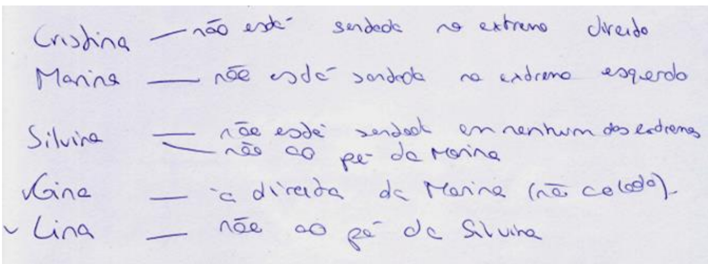
A Cristina não está sentada no extremo direito e a Marina não está sentada no extremo esquerdo. A Silvina não está sentada em nenhum dos dois extremos. A Lina não está sentada ao pé da Silvina e a Silvina não está sentada ao pé da Marina. A Gina está sentada à direita da Marina, mas não necessariamente ao lado dela. Como estão sentadas as cinco amigas?

Figura 4.1. Enunciado do problema

Teresa resolveu o problema no escritório do pai, embora também possua um computador pessoal no seu quarto. O espaço onde o trabalho decorreu estava equipado com uma grande diversidade de ferramentas tecnológicas: computador, dois monitores, equipamento de som, telefone e fax, e impressora multifunções (Figura 4.2).

Figura 4.2. Local onde Teresa resolve os problemas

Pedi a Teresa que reconstituísse, tanto quanto possível, todos os passos que costuma executar quando resolve os problemas da quinzena, e que procurasse 'pensar em voz alta' para que se pudesse seguir o seu raciocínio na íntegra. Teresa começou por aceder ao problema *online*, mas não o imprimiu, lendo-o apenas em voz alta. Procurou papel na impressora e começou a resumir as condições do enunciado numa folha (Figura 4.3), pois costuma usar "*sempre uma folha de rascunho*".



Cristina — não está sentada no extremo direito
Marina — não está sentada no extremo esquerdo
Silvina — não está sentada em nenhum dos extremos
— não ao pé da Marina
Gina — à direita da Marina (não colado).
Lina — não ao pé da Silvina

Figura 4.3. Resumo das condições do enunciado do problema

Em seguida, tentou organizar o conhecimento sobre a situação de forma esquemática, simulando a ordem pela qual as amigas poderiam estar sentadas no banco do parque (Figura 4.4). Após algumas experiências em que testou a posição das várias amigas, descobriu que a Silvina não podia estar no meio nem na segunda posição, pelo que decidiu registar essas duas conclusões (Figura 4.5).

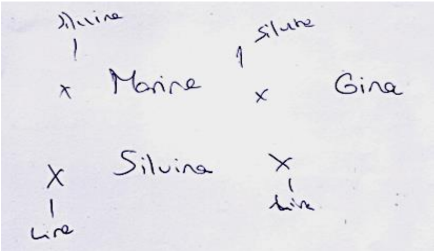


Figura 4.4. Primeira tentativa de resolução do problema

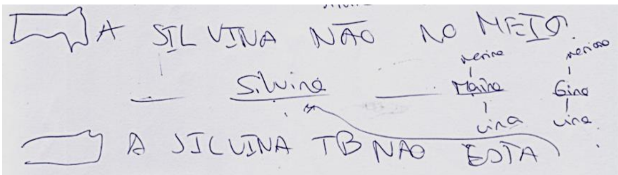


Figura 4.5. Primeiras conclusões registadas

Uma vez que não estava a conseguir prosseguir com a sua estratégia, voltou a ler o enunciado e sintetizou o conhecimento que já possuía sobre a posição de algumas das amigas, na tentativa de organizar o raciocínio subsequente (Figura 4.6).

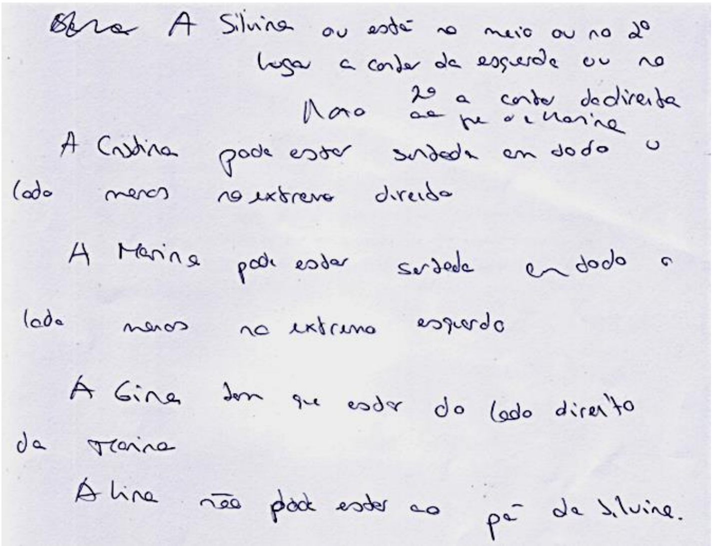


Figura 4.6. Síntese do que já sabe sobre as posições das cinco amigas

Ao fim de apenas 6 minutos de trabalho, Teresa começa a mostrar alguma preocupação por não ter ainda encontrado a solução e questiona: "*não faz mal se eu demorar muito tempo, pois não?*". Após ser tranquilizada, regressa rapidamente ao seu raciocínio. Inicia então a construção de um esquema, que deixa algumas possibilidades em aberto, mas que virá a utilizar para apresentar a solução final. Resolve, agora, começar a registar as suas conclusões, sequenciando-as pela mesma ordem em que as ideias lhe ocorreram naturalmente, já a pensar na explicação completa do seu raciocínio que terá de enviar para a Organização do SUB14.

Esta segunda abordagem ao problema parece conferir-lhe um maior entendimento e domínio das condições e das relações entre elas, pelo que regressa ao esquema e volta a emaranhar-se no teste das hipóteses que ia colocando, obtendo, subsequentemente, a solução do problema. Este processo de resolução do problema demorou, no total, cerca de 16 minutos. Assim que encontrou a solução do problema, Teresa voltou a ler cada uma das condições do enunciado, verificando criteriosamente se a sua solução lhes obedecia, o que acabou por confirmar, envergando um ar de satisfação pessoal.

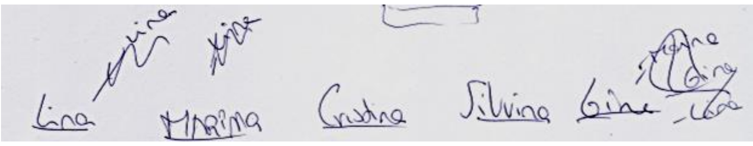


Figura 4.7. Esquema com o teste de hipóteses e a solução

Foi-lhe então solicitado que procedesse ao envio da resolução para o SUB14. A Teresa acedeu ao *website* do campeonato, mas explicou que não iria utilizar a janela de resposta do SUB14, pois já tivera alguns problemas com respostas que enviara e que a Equipa não recebeu. Para evitar essas situações, costumava enviar as suas respostas através do *e-mail* pessoal e foi para lá que se dirigiu. Já tinha o contacto do SUB14 gravado, pelo que passou rapidamente a redigir o assunto "*Camisola 19, problema extra, [Teresa]*", bem como a explicação do seu processo de resolução (Figura 4.8).

Vou pegar numa pessoa, e ver as várias possibilidades da posicao dela.
Vou pegar por exemplo na Silvina.

A Silvina, como dito no problema nao pode estar em nenhum dos extremos.

Podemos colocar a Silvina primeiro no segundo lugar a contar da esquerda:

A seguir a Silvina (que está no segundo lugar a contar da esquerda), a Marina nao pode estar ao pé da Silvina nem a Lina, ficando ambas com a obrigacao de ficar no primeiro e segundo lugar a contar da direita.
Mas a Marina tem que ficar em segundo lugar a contar da direita porque a Gina tem que ficar do lado direito dela.
Assim concluimos que nao há espaco para a Lina, logo a Silvina nao pode estar em segundo lugar a contar da esquerda.

Se colocarmos a Silvina no meio, a Marina nao pode ficar nem no extremo esquerdo nem ao lado da Silvina, ficando no extremo direito e nao deixando espaco para a Gina, mais uma vez pois esta tem de ficar do lado direito da Marina.

Logo, chegamos à conclusao de que a Silvina tem que estar em segundo lugar a contar da direita. A Marina ocupa o segundo lugar a contar da esquerda (nao pode estar ao pé da Silvina nem no extremo esquerdo). A Lina fica em primeiro a contar da esquerda (nao pode estar ao pé da Silvina). A Cristina fica no meio (nao pode estar no extremo direito). Ficando o primeiro lugar a contar da direita para a Gina (que está do lado direito da Marina, embora nao directamente).

R: As 5 amigas estao sentadas pela ordem certa a contar da esquerda da seguinte maneira: Lina/ Marina/ Cristina/ Silvina/ Gina

Figura 4.8. Resolução que a Teresa enviou para a Organização do SUB14

Nesta fase, Teresa digitou a sua descrição do processo com uma velocidade surpreendente, apesar de parar por momentos para espreitar as folhas de rascunho: "*o que eu pensei e escrevi de uma forma desorganizada, estou a tentar escrever em texto*". No final, percorreu todo o texto para "*emendar os erros e melhorar a* [sua] *resposta*". De frisar que o *layout* do teclado que a Teresa utilizou é alemão, pelo que não possuía algumas teclas necessárias à escrita corrente em português, como o til ou a cedilha.

4.2.2 Discussão

Apesar de esta experiência não ter sido analisada em toda a sua extensão é possível afirmar que este exercício pode auxiliar na tomada de decisões relativamente ao *design* de investigação do estudo central. Pelas declarações de Teresa e da sua família, constatei que a atividade de resolução de problemas que a concorrente levou a cabo nesta experiência se assemelha à que normalmente desenvolve quando participa no campeonato. Contudo, é incontestável que a presença da investigadora e o aparato de recolha de dados interferem na dinâmica, dita 'normal'. Uma vez que não é possível observar-se a atividade usual de um concorrente nos vários contextos e ambientes em que se insere, a presença da investigadora seria menos sentida e os concorrentes e seus familiares reagir-lhes-iam mais naturalmente, se a observação se transformasse em algo 'banal', o que podia ser tentado através de vários contactos e encontros. Assim, uma primeira recomendação desta experiência foi a de se projetar um mínimo de três encontros com cada participante espaçados temporalmente e, consequentemente, três momentos de recolha de dados, com o aparato que lhes for indispensável (registo de notas, gravação áudio, ou recolha de imagens em vídeo).

Embora a experiência de observação da concorrente no seu espaço natural de participação no Campeonato tivesse primordialmente a intenção de ensaiar formas de recolha de dados e de estudar condições de acesso ao fenómeno em estudo, os dados obtidos geraram ideias e possibilidades quanto ao desenvolvimento do referencial teórico do estudo. Em particular, observei que a Teresa recorreu essencialmente ao papel e lápis para resolver o problema, embora isso não inviabilize a tentativa de procurar compreender estes jovens em todas as suas vertentes relacionadas com a utilização de ferramentas tecnológicas, digitais ou outras. Aliás, Lévy (1990) sublinhou precisamente que a escrita se constituiu como uma das primeiras 'tecnologias da inteligência', pelo que faz sentido considerar o papel-e-lápis como uma tecnologia fundamental que mediou a atividade de resolução de problemas da Teresa.

4.3 Relevância e adequação das principais linhas teóricas

Embora, em investigações anteriores, algumas noções teóricas já tivessem sido utilizadas como referenciais para a compreensão do contexto e das perspetivas dos participantes no SUB14 relativamente às tecnologias que utilizam (Jacinto & Carreira, 2008; Jacinto, Amado & Carreira, 2009; Jacinto & Carreira, 2010b), sentiu-se necessidade de aprofundar conceitos como o de ‘atividade’ ou de ‘mediação’.

A seguir apresentam-se e analisam-se mais dois casos de atividade de resolução de problemas no âmbito do SUB14. Um deles é constituído por um grupo de três participantes que, na altura, frequentavam o 8.º ano de escolaridade e residiam no concelho de Serpa, no Baixo Alentejo. Os dados recolhidos correspondem à resolução de um problema enviada pelo grupo para o Campeonato SUB14 e entrevistas semiestruturadas que foram realizadas aos três participantes e a um dos encarregados de educação de uma das concorrentes do grupo, que sempre se mostrou bastante próximo da atividade da sua educanda. O outro caso é constituído por uma concorrente que, na edição 2009/2010 frequentava o 7.º ano de escolaridade e residia no concelho de Odemira, no Alentejo Litoral. Aqui a análise centrou-se nas produções da concorrente, nomeadamente, na resolução de um problema que submeteu ao SUB14.

4.3.1 Caso 2: Uma equipa em atividade de resolução de problemas com tecnologias

A Alexandra, o Filipe e a Ângela conhecem-se desde sempre e têm sido colegas de turma, igualmente, há vários anos, gostam de trabalhar juntos e ajudam-se mutuamente. A Alexandra, apesar de parecer muito introvertida, estava a frequentar um clube de teatro. Para encontrarem a solução de alguns problemas do SUB14, estes jovens faziam de conta que eram professores numa aula em que cada um explicava as suas ideias e tentava convencer os restantes colegas de grupo. Apenas a Alexandra e o Filipe foram à Final do SUB14 e levaram a família: pais, avós, tios e primos (Jacinto, 2008).

O grupo revelou um interesse e um envolvimento crescente na elaboração das suas respostas aos problemas, notando-se um esforço gradual para que a explicação do seu raciocínio e os processos utilizados fossem o mais claros possível. O problema #9 da fase de apuramento da edição 2006/2007, a que os três amigos responderam e cuja resolução é analisada adiante, questionava a possibilidade da construção de triângulos mediante a utilização de réguas de quatro tamanhos diferentes (Figura 4.9). Os jovens enviaram uma descrição detalhada do raciocínio e da estratégia que os conduziu à solução do problema, anexando um ficheiro PDF à mensagem eletrónica. Como explicaram no seu texto e clarificaram na entrevista, começaram por cortar palhinhas de refresco com as dimensões enunciadas. Em seguida, procuraram perceber que palhinhas permitiam construir um triângulo, como explicou a Alexandra: "*Íamos, tipo, jogando com as palhinhas e íamos assim, por tentativas, para ver qual era a solução*".

Problema 9: Construir triângulos

Numa caixa encontram-se várias réguas de 4 tamanhos diferentes: 5, 7, 15 e 17 cm de comprimento. Com o mesmo comprimento, existem várias réguas. Quais são todos os triângulos possíveis que se formam, usando estes tamanhos de réguas?

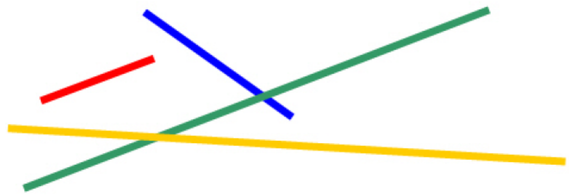


Figura 4.9. O problema #9 da fase de apuramento (edição 2006/2007)

Como referiram, apenas precisaram de algumas experiências para se recordarem que, em qualquer triângulo, o comprimento de um lado deve ser menor ou igual à soma dos comprimentos dos outros dois lados: a propriedade conhecida como desigualdade triangular. Ainda na sua mensagem eletrónica, o grupo anexou uma imagem com o intuito de ilustrar a variedade de experiências realizadas. A Ângela, na entrevista, descreveu com detalhe a sequência dessa atividade: o pai tinha uma câmara fotográfica digital, ideal para fotografar as várias tentativas que fizeram. Passaram, depois, as fotografias para o computador, selecionaram as mais adequadas e usaram o Corel Draw para legendar as palhinhas com as medidas dos seus comprimentos (Figura 4.10).

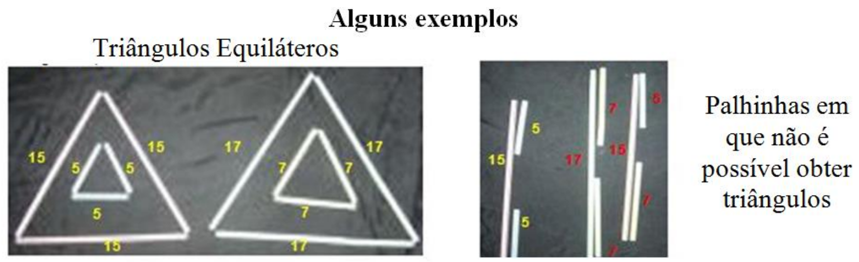


Figura 4.10. Parte da imagem que o grupo anexou à resolução

Posteriormente, o grupo sintetizou as suas conclusões numa tabela (Figura 4.11) onde salientou, para cada linha, as medidas dos dois lados menores e, para cada terno de comprimentos de lados, a possibilidade de construção de um triângulo.

Lados do Triângulo			Soma dos lados menores	Maior ou menor que o 3.º lado	Possível ou Não
5	5	5	10	>	É Possível
5	5	7	10	>	É Possível
5	5	15	10	<	Não é possível
5	5	17	10	<	Não é possível
7	7	5	12	>	É Possível
7	7	7	14	>	É Possível
7	7	15	14	<	Não é possível
7	7	17	14	<	Não é possível

15	15	5	20	>	É Possível
15	15	7	22	>	É Possível
15	15	15	30	>	É Possível
15	15	17	30	>	É Possível
17	17	5	22	>	É Possível
17	17	7	24	>	É Possível
17	17	15	32	>	É Possível
17	17	17	34	>	É Possível
17	15	5	20	>	É Possível
17	15	7	22	>	É Possível
17	7	5	12	<	Não é possível
15	7	5	12	<	Não é possível

Figura 4.11. Excerto da resolução dos participantes numa linguagem mais formal

Como o Filipe acrescentou, enviar o documento em formato PDF tornou-se uma necessidade, pois queriam garantir a integridade do seu trabalho, com todos os detalhes das suas ações, sem que o aspeto global sofresse alterações. Todavia, parecem ter encontrado esse *software* por acaso:

> Foi recente. Nas férias, um dia... Estávamos ali a pesquisar e encontrámos 'formato PDF'. Depois fomos ver o que é isto, fizemos, usámos, instalámos... e pronto foi assim […] Porque aqui, às vezes, desconfigurava. Passava, por exemplo, números para outro sítio, onde não era devido. E pronto, no PDF ficava ali tudo fixo.

4.3.2 Discussão

Esta análise da resolução apresentada pelo grupo de participantes, complementada pelos excertos das entrevistas, permite olhar para o campeonato de resolução de problemas como um *sistema de atividade* (Engeström, 1987). Tal como está patente na Figura 4.10 e na Figura 4.11, é possível apreender a forma como os participantes abordaram este problema. Para além das regras matemáticas a que evidentemente recorreram, existem várias outras regras implícitas à participação no SUB14: conhecem o prazo limite para enviar a resposta; têm que submeter a resolução em formato digital; devem apresentar o raciocínio de forma detalhada, coerente e clara. Percebe-se ainda a existência de uma comunidade que compreende não só os jovens participantes mas também os seus familiares próximos, alguns professores de matemática que colaboram com os seus alunos em sala de aula ou fora da escola, porventura ocasionalmente, e a Organização do SUB14 que cria os problemas, recebe as resoluções e responde aos participantes.

É, ainda, possível identificar uma clara divisão de estatuto entre os membros da comunidade. A Organização detém um estatuto privilegiado – pertence ao mundo académico, concebe os problemas, aprova as resoluções e devolve um *feedback* aos participantes. Os pais exercem um papel distinto pois motivam os filhos, ajudam-nos no raciocínio ou na escrita da explicação, relembram os prazos, autorizam a sua participação na Final e, em alguns casos, também colaboram em questões técnicas, como anexar um documento. A maioria dos professores tem um papel menos visível na competição, pois o SUB14 não é efetivamente uma atividade escolar (Jacinto, 2008). Contudo, a Alexandra, o Filipe e a Ângela também recorreram ao seu professor de Matemática, para os ajudar na resolução de alguns dos problemas.

O sistema de atividade deste grupo de jovens (Figura 4.12) compreende: (i) o sujeito que corresponde ao *grupo* de três participantes e a sua atividade constitui a unidade de análise; (ii) o objeto sobre o qual o grupo exerce a sua ação é o *problema da quinzena*, e o produto correspondente é a *solução enviada* para a equipa do SUB14; (iii) os artefactos de mediação que sobressaem são as *ferramentas* usadas durante a atividade de resolução do problema (palhinhas, câmara fotográfica digital, computador, *software* diversificado); (iv) as regras, normas ou convenções são apropriadas a partir do *regulamento* do campeonato, nomeadamente, o prazo para envio da resposta, ou a exigência de uma resposta com o processo de resolução completo, a participação individual ou em pequenos grupos, na fase de apuramento, e individual, na fase final, bem como a expectativa de um retorno da Organização sobre a resolução enviada; (iv) a *comunidade* engloba não só a Organização e os participantes em prova, mas ainda os seus familiares mais próximos (pais, irmãos, avós), os colegas e amigos de Escola, e ainda alguns professores que seguem de perto o trabalho dos concorrentes – unidos por um interesse partilhado: a resolução dos problemas; (vi) a *divisão do estatuto* é também notória neste sistema de atividade, pois cada elemento da comunidade assume um papel diferente e essencial à continuidade do Campeonato e, de forma semelhante, é possível identificar uma clara distinção entre o estatuto de que cada membro goza.

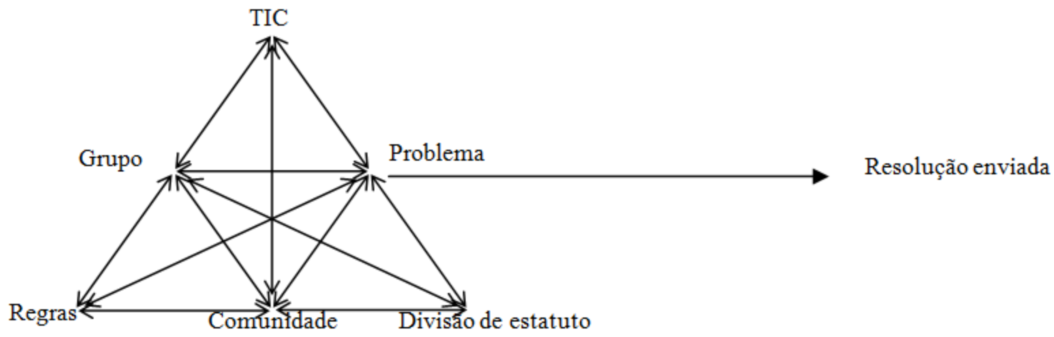


Figura 4.12. O sistema de atividade do grupo de participantes no SUB14

Analisando a atividade matemática da Alexandra, do Filipe e da Ângela, envolvida durante a primeira abordagem ao problema, é evidente que a tecnologia se assume como um artefacto de mediação de uma *matematização horizontal* caracterizada pela simples observação e interpretação de um fenómeno. Por outro lado, a apresentação do desenvolvimento da estratégia, patente na Figura 4.11, demonstra uma preocupação com a formalização do discurso – o que pode ser interpretado como um caminhar em direção a uma *matematização vertical*, assente numa estrutura e numa formalização mais abstrata desse fenómeno (Freudenthal, 1973; Gravemeijer, 2005; Treffers, 1987). Neste caso, a tecnologia atuou ainda como um artefacto mediador: os participantes utilizaram as potencialidades do editor de texto com que estão familiarizados para organizar a sua investigação, para exibir cada teste, esperando que a tabela, as cores das células ou o texto adicionado, pudessem transmitir uma visão clara dos seus raciocínios e procedimentos.

As regras da participação na comunidade do SUB14, que estão relacionadas com o uso de ferramentas tecnológicas e são familiares à grande maioria dos participantes, têm impacto na forma como estes se empenham na atividade de resolução de problemas.

4.3.3 Caso 3: Leonor a pensar com o computador

Leonor frequentava o 7.º ano de uma pequena escola do Concelho de Odemira e havia participado nos campeonatos de resolução de problemas da Universidade do Algarve desde o 5.º ano. Sempre se destacou pelo seu constante empenho, pela simplicidade dos seus raciocínios, pela clareza dos seus argumentos, mas igualmente pela criatividade evidenciada e pelo domínio da tecnologia que as suas resoluções têm demonstrado.

Enviou sempre um anexo em formato Word, no qual apresentava e explicava a sua estratégia, intercalando imagens construídas para exemplificar o seu raciocínio com descrições tão pormenorizadas que permitem compreender, na íntegra e em profundidade, o desenrolar dos seus pensamentos e a sua compreensão do problema.

Na edição 2009/2010, o Problema #10 – O gato e o rato (Figura 4.13) apresentou-se como um verdadeiro quebra-cabeças, pois inúmeros foram os pedidos de ajuda solicitados à Equipa do SUB14 e a maioria das resoluções recebidas continha erros ou não apresentava a solução correta.

O gato e o rato

Um rato é surpreendido por um gato esfomeado. De imediato, o rato corre em fuga e o gato corre em perseguição.

Quando o rato começa a fuga tem 88 passinhos de avanço em relação ao gato.

Acontece que 2 passos do gato equivalem, em distância, a 12 passinhos do rato. Por outro lado, enquanto o rato dá 10 passinhos, o gato dá 3 passos. Quantos passos tem de dar o gato até apanhar o rato?

Figura 4.13. O problema #10, da fase de apuramento (edição 2010/2011)

No texto enviado, Leonor começa por fazer uma interpretação própria das condições do enunciado e, tal como afirma, recorre depois "*à realização de um esquema*". A construção do esquema (Figura 4.14) começa com a reprodução dos 88 passinhos de rato que separam os dois animais (condições iniciais), que Leonor representa ao desenhar e colorir pequenos círculos azuis-escuros e explica: *"as primeiras 88 pintinhas azuis escuras representam os 88 passinhos que o rato tinha de avanço."*

A linha sobre a qual os círculos assentam e as divisões em conjuntos de 6 pequenos círculos sugerem a representação de uma linha temporal, onde simultaneamente se exprime a relação entre o tamanho dos passos do gato e os do rato: cada grupo de 6 pintas é o comprimento de um passo do predador e de seis pequenos passos da presa. Inicialmente, a cor não fez parte do raciocínio de Leonor mas, mais tarde, veio a revelar-se muito útil: "*tanto que, para simplificar o esquema organizei os passos subsequentes dos dois animais com as mesmas cores em função da 'regra' enquanto o rato dá 10 passinhos, o gato dá 3 passos*".

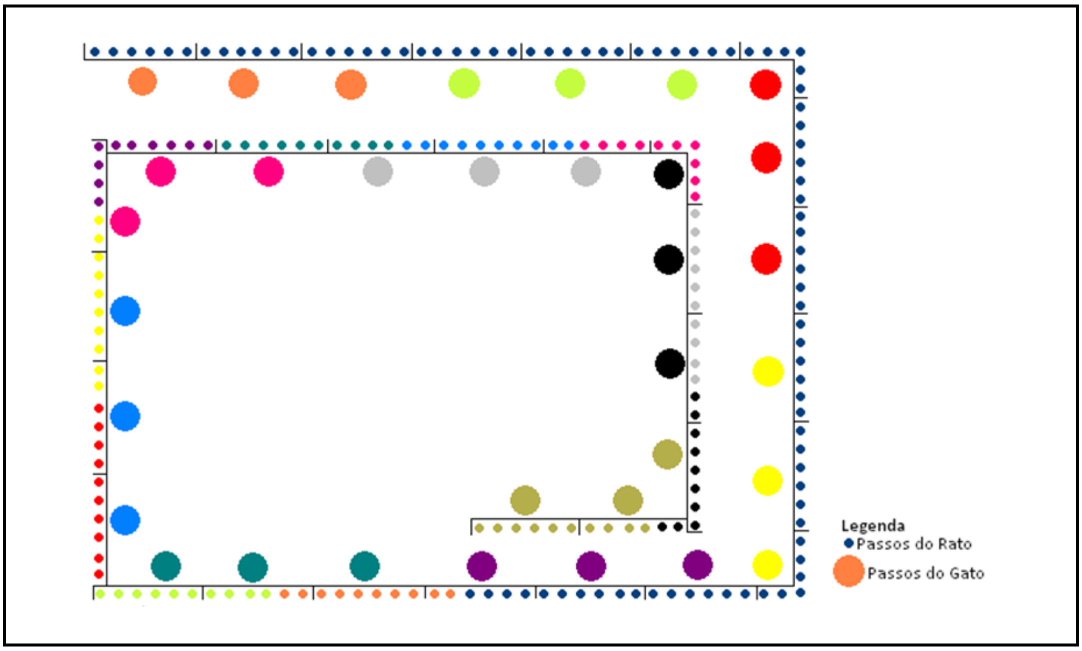


Figura 4.14. Parte da resolução do problema #10, enviada pela Leonor

Esta associação de cores amplia a expressividade do dueto *descrição* e *imagem*, proporcionando uma visualização da lenta sequência de imagens, muito provavelmente, a mesma que Leonor idealizou durante o seu processo de raciocínio: a 'caça' inicia-se. O esquema vai ganhando forma à medida que a jovem vai interpretando as condições do enunciado e, simultaneamente, fazendo uso de objetos e menus do editor de texto para construir a sequência de passos do gato e do rato. Na verdade, Leonor recorre a opções muito simples, mas sobejamente suas conhecidas, como a utilização e a formatação de formas icónicas elementares, para organizar a sua estratégia e também para avaliar os resultados de cada nova iteração: as dez *pintinhas* cor-de-laranja seguintes representam o rato a avançar os primeiros 10 passinhos relativamente à posição inicial, enquanto os círculos maiores, cor-de-laranja (no início da perseguição), representam o avanço de 3 passos do gato, no mesmo tempo. Sucessivamente, representa os avanços do rato e os do gato na mesma cor, e continua a formar os conjuntos de 6 passinhos do rato (a que corresponde um passo do gato). A cena termina assim que o gato apanhar o rato, ou seja, quando o último conjunto de 10 passinhos do rato se encontra com o último conjunto de 3 passos do gato, da mesma cor. Então, a solução está também encontrada: "a*o contar os passos dados pelo gato até apanhar o rato chegamos à conclusão que o gato deu 33 passos até apanhar o rato!*". E explica-se por si mesma.

Outro fator interessante a realçar na apresentação e explicação da resposta ao problema consiste no carácter 'quasi-dinâmico' da imagem, no sentido em que a observação da mesma sugere a transformação 'virtual' do estado do sistema composto pelos dois objetos em movimento, ao longo do tempo. A mudança das cores utilizadas nos ícones, que virtualmente constituem os dois animais na perseguição, emula digitalmente a mudança de posição do perseguidor e do perseguido, descrevendo a variação da sua posição relativa e a crescente aproximação entre ambos, quase como se de uma animação se tratasse. Este aspeto é extraordinariamente importante no que concerne à atividade matemática envolvida nesta resolução. Muitos alunos têm dificuldades num problema como este pela exigência de transformar um fenómeno dinâmico em condições matemáticas que 'congelam' a situação. Leonor superou o problema pela capacidade revelada em traduzir o seu pensamento de forma icónica e dinâmica, uma competência largamente reconhecida nos indivíduos que interagem naturalmente com a modelação, a simulação e a imagem, presentes nos aparatos digitais que rodeiam o atual quotidiano.

4.3.4 Discussão

À semelhança do que já se havia observado com outros concorrentes (Jacinto, 2008; Jacinto & Carreira, 2010a), Leonor tira partido das ferramentas digitais e da sua flexibilidade para dar forma e corpo ao seu próprio raciocínio e à construção de uma abordagem para encontrar a solução do problema. O computador não é somente um meio de 'passar a limpo' uma determinada resolução, pelo que a ferramenta se torna parte indissociável da resolução desenvolvida e, em certo sentido, a jovem usava a tecnologia como uma 'linguagem' para pensar, agir e comunicar. Dado que os participantes no SUB14 têm total liberdade na seleção das ferramentas que acham mais adequadas à resolução de cada problema, usam-nas não só para a comunicação escrita da sua abordagem mas também na definição da própria estratégia, tirando partido das suas potencialidades (desde a utilização de ferramentas específicas, ao recurso a formatos e modos de representação propícios, a meios de organização da informação e à interatividade, entre outros).

Estes dados sugerem que Leonor, tal como Alexandra, Filipe e Ângela, são pessoas-a-agir-com-artefactos-de-mediação (Wertsch, 1991) como se se tratasse de uma unidade indivisível, assumindo que o computador é um significativo artefacto de mediação da sua atividade de resolução de problemas. Sendo esses artefactos de mediação as ferramentas tecnológicas com as quais os participantes se envolvem na atividade de resolução de problemas, há evidências de que o seu pensamento matemático, o seu raciocínio e comunicação estão a ser reorganizados através dessa interação simbiótica. Deste modo, não são apenas humanos que usam tecnologias, mas humanos-com-media no sentido de uma entidade coletiva (Borba & Villarreal, 2005).

A solução desenvolvida por Leonor levanta ainda outras questões relacionadas com o papel das tecnologias digitais na atividade de resolução de problemas de matemática. O que se entende, neste âmbito, por resolução de problemas? O que pode ser considerado como a solução de um problema? Por exemplo, será que o esquema desenvolvido por Leonor pode ser considerado como 'a' resolução, dispensando explicações textuais? Cumpre as regras definidas no Campeonato, em particular, a de descrever o processo com a suficiente clareza?

Nos últimos dois casos apresentados, os participantes recorreram a tecnologias *domésticas* (computador e *software* de utilização corrente, Internet, câmara fotográfica digital) para desenvolver abordagens aos problemas de formas tão particulares, que se pode considerar que estiveram a pensar-com-a-tecnologia. Tal como estes quatro jovens, muitos concorrentes já não utilizam as ferramentas digitais apenas para se exprimir, para mostrar ou apresentar um raciocínio desenvolvido sem tecnologia, como é marcadamente visível nas resoluções mais 'escolares' de outros participantes. Para jovens como estes é trivial estar-se diariamente ligado à Internet, pelo que é habitual aprender, partilhar ou comunicar através de imagens, fotografias, vídeos, ícones ou hipertexto. É, pois, de considerar o papel da tecnologia digital como extremamente relevante no desenvolvimento de soluções dos problemas no âmbito do SUB14, em particular, este poder de ampliação da expressividade que algumas ferramentas parecem incutir nas formas de abordar os aspetos matemáticos destes problemas.

4.4 Instrumentos de recolha e técnicas de análise de dados

Uma vez que apenas alguns instrumentos de recolha foram testados, só foi possível encetar uma reflexão genérica, de onde sobressai a exequibilidade da observação e da gravação em vídeo e áudio da atividade de resolução de um problema. Como já foi referido, os maiores constrangimentos previstos estavam relacionados com a presença da investigadora durante a atividade de resolução de problemas dos jovens participantes. No entanto, esse é um fator que se assume como incontornável, mas que poderia ser minimizado através de contactos espaçados no tempo e relativamente demorados. Por outro lado, e tal como sucedeu no caso de Teresa, deveria procurar formas de lidar com o desconforto e as tensões que cada jovem poderia experimentar ao abordar um problema. Seria importante, por exemplo, preparar um discurso para tranquilizar o participante, ter várias soluções presentes para permitir um questionamento que desbloqueie o raciocínio ou mesmo o fornecimento de pistas, em casos de extrema dificuldade e ansiedade. Estas ações teriam de vir a ser equacionadas aquando da análise e da interpretação dos dados.

Igualmente importante era a definição e a conceção do tipo de problemas a propor na fase experimental. Nos três casos analisados, a simulação das condições dos problemas foi uma constante: Teresa construiu esquemas com papel e lápis; Alexandra, Filipe e Ângela fotografaram triângulos de palhinhas; Leonor construiu os dois percursos com objetos e formas através do editor de texto. No entanto, Teresa recorreu ao papel-e-lápis e, quando se tornou necessário submeter a solução por via digital, a jovem descreveu os passos seguidos descartando os esquemas produzidos. Isto pode estar relacionado com o tipo de problema, mas também com a apropriação das regras do SUB14. No fundo, estes problemas deviam ser da mesma tipologia e ter um grau de dificuldade ou complexidade semelhante ao que é habitualmente proposto pelo campeonato SUB14. No entanto, problemas diferentes podem induzir abordagens diferentes para participantes diferentes, algo que também devia ser equacionado. Uma possibilidade para a fase experimental seria a de disponibilizar vários problemas, de tipologias diferentes (e.g., algébrico, numérico, geométrico, ou de lógica) e permitir que o participante escolhesse um.

Apesar de se terem realizado algumas entrevistas semiestruturadas aos participantes e familiares, surgiu também como relevante a possibilidade de indagar os jovens acerca dos processos que vão desenvolvendo enquanto resolvem os problemas, nomeadamente, solicitando que expliquem em voz alta o que pensam. Estas entrevistas em profundidade podem também ser complementadas com outras acerca das resoluções anteriormente submetidas ao SUB14 e que se afigurem como relevantes. A gravação de ecrãs, realizada no caso de Teresa, não se veio a constituir como muito relevante dado que a jovem utilizou o papel-e-lápis para encontrar a solução e apenas usou o computador para submeter uma descrição dos seus passos. Todavia, considerei que seria importante manter esta possibilidade de recolha de dados, admitindo que outros participantes selecionados para o estudo principal pudessem vir a ter outros hábitos de utilização de tecnologias.

Relativamente ao processo de organização dos dados, nomeadamente, dos registos áudio das entrevistas, dos registos em vídeo da atividade de cada participante assim como dos ecrãs dos seus computadores, perspetivou-se como útil o recurso a um *software* específico de análise de dados qualitativos, que permitisse transcrever, identificar trechos, legendar, segmentar, codificar, analisar ou relacionar com outras fontes de dados.

2ª Fase: Conceção e desenvolvimento do estudo

4.5 Discussão de alternativas para o *design* da investigação

Compreender a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias, tal como decorre no âmbito da competição extraescolar SUB14, é o grande propósito desta investigação. Nos capítulos anteriores apresentei as motivações deste estudo, uma revisão alargada da literatura sobre as temáticas que circunscrevem o fenómeno e uma discussão teórica em torno dos conceitos e das noções que foram emergindo como essenciais à compreensão almejada. Já neste capítulo, na secção anterior, reportei algumas recomendações que surgiram de um estudo preliminar e que serão levadas em conta no *design* da investigação central. Importa pois apresentar e justificar as decisões metodológicas que enquadram os processos de recolha de dados e a sua análise com vista a dar resposta às questões de investigação enunciadas (Capítulo 1, Secção 1.5).

Delinear um *design* de uma investigação é um processo meticuloso que envolve a construção de uma planificação, um diagrama, que explique a forma como o estudo se encontra estruturado e a forma como será conduzido. De forma articulada com a questão de investigação e os pressupostos teóricos, essa planificação deve incluir os métodos e as ferramentas que serão usados durante o processo de investigação (Babbie & Mouton, 2007). Todavia, é o fenómeno que se pretende analisar que influencia a opção do investigador por uma determinada metodologia de investigação (Amado, 2015).

Procurar compreender de que forma os jovens participantes no SUB14 resolvem e exprimem problemas de matemática mediante o uso de tecnologias implica alcançar uma caracterização holística dessa sua atividade, isto é, sem menosprezar o contexto em que ela decorre e que é moldado por uma multiplicidade de fatores, cuja identificação se esperava possível através das ferramentas teóricas construídas anteriormente. A compreensão deste fenómeno "implica uma ênfase na qualidade das entidades estudadas e nos processos e significações que não são examináveis experimentalmente nem mensuráveis, em termos de quantidade, crescimento, intensidade ou frequência" (Denzin & Lincoln, 2003, p. 13). Além disso, procurava compreender "*o que*, na realidade, faz sentido *e como* faz sentido para os sujeitos investigados" (Amado, 2015, p. 41, grifo no original), isto é, apreender o fenómeno através dos significados que lhe são atribuídos pelos sujeitos em ação e pelas interações que mantêm com o contexto, incluindo outros indivíduos que possam intervir de forma 'indireta' na atividade. Desta forma, estudar a realidade dos jovens que resolvem e exprimem problemas de matemática com tecnologias, no seio do SUB14, não podia ser feito sem o recurso à própria perspetiva dos sujeitos que estão envolvidos nessa atividade (Almeida & Freire, 2003). Por isso, tornou-se necessário procurar evidências que permitissem uma descrição deste fenómeno no ambiente natural em que decorre, já que era o campeonato SUB14 que motivava os dados a recolher. Esses dados seriam posteriormente usados para relatar as ações e reportar os processos, pelo que a análise dos dados se perspetivava, essencialmente, descritiva.

Conforme discuti no preâmbulo, tanto a natureza do problema de investigação como a do fenómeno a estudar remetem para uma abordagem de cunho interpretativo. Por isso, é de esperar que nele se encontre um conjunto de caraterísticas comumente apontadas como as que definem uma investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994; Cohen, Manion & Morrison, 2005; Creswell, 2007, 2009; Hammersly, 2013; Lincoln & Guba, 1985; Mertens, 2009), desde a importância do *acesso direto ao contexto* em que o fenómeno ocorre, ao papel do *investigador como instrumento* vital, ao uso de *múltiplas fontes de dados*, à *natureza descritiva* de grande parte dos dados, ao *caráter indutivo da análise*, até à *centralidade do significado* que os participantes atribuem às situações e aos contextos em que participam.

Um passo seguinte envolveu a definição de um método. Para além da dicotomia positivismo/naturalismo, uma constatação imediata foi a proliferação de termos na literatura especializada (Mackenzie & Knipe, 2006). A diversidade de metodologias e métodos de foro qualitativo parece dever-se ao facto de descenderem de diferentes disciplinas e formas de pensar o processo de investigação, sendo que se distinguem pelo foco que colocam na recolha de dados, na sua análise ou na forma de proceder ao seu relato. Mertens (2009), com base nos trabalhos de Lather (1992) e Guba e Lincoln (2005), identificou sete estratégias de investigação qualitativa comumente usadas em estudos educacionais e conotadas com o paradigma construtivista: naturalista, fenomenologia, hermenêutica, interação simbólica, etnografia, qualitativo; investigação-ação participante. Creswell (2011, p. 20) distinguiu entre três tipos de *designs* em investigação qualitativa: *grounded theory*, narrativa e etnografia. Cohen, Manion e Morrison (2007) identificaram quatro 'estilos de investigação educacional' de pendor qualitativo: investigação naturalista e etnográfica; investigação documental e histórica; estudos de caso; e investigação-ação. Estas formas de catalogar são também discutíveis e têm sido contestadas pelos autores em constante diálogo. A título de exemplo, Bogdan e Biklen (1994) consideam que o interacionismo simbólico é "uma forma típica e bem estabelecida da perspetiva fenomenológica (p. 53).

De um modo geral, e identificando-me com a taxonomia proposta por Cohen, Manion e Morrison (2007), este estudo baseou-se na recolha de dados qualitativos e na sua análise descritiva, ações estas que são enquadradas por um posicionamento interpretativo. Mais precisamente, numa primeira etapa, procurei compreender a natureza da atividade em que os jovens se envolvem enquanto resolvem problemas de matemática com recurso a ferramentas tecnológicas. Para tal, seria necessário aceder às perceções dos participantes sobre a sua própria experiência, o que iria depender em grande medida da sua capacidade de refletir e tomar consciência das suas próprias ações enquanto participantes nesta atividade. Cada jovem era membro de diferentes comunidades (a sua família, a sua escola, a sua turma) e de uma comunidade comum e partilhada com outros participantes no estudo, que é o SUB14. Por isso, pretendia captar o que de essencial existia na atividade de cada um deles e a forma como o mundo em seu redor determina essa atividade. Era portanto uma etapa que exigia um centrar muito particular em cada jovem participante, na sua compreensão e interpretação das características das comunidades em que estava inserido e que, potencialmente, influíam na sua atividade de resolução de problemas com tecnologias. Antecipei que a obtenção de dados decorresse através de entrevistas em profundidade que permitissem identificar aspetos comuns nas perceções que os jovens têm da sua própria atividade de resolução de problemas.

Esta é uma linha de investigação que podia, eventualmente, ser perseguida através de uma metodologia fenomenológica em que o fenómeno a estudar – a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias – ocorre num determinado contexto mas ainda não está suficientemente compreendido. Nesse sentido, esta abordagem visava documentar as experiências dos sujeitos na sua ótica, o que é considerado como essencial para compreender as suas ações (Hammersly, 2013), tratando-se aqui, em particular, da atividade matemática em que se envolvem. Com efeito, uma das principais características da fenomenologia consiste no estudo dos aspetos que fazem com que os membros de uma comunidade interpretem o mundo em seu redor de determinado modo, pelo que se dá primazia ao "componente subjetivo do comportamento das pessoas" (Bogdan & Biklen, 1994, pp 53-54). O foco está, portanto, na compreensão das razões que levam diferentes indivíduos que partilham uma mesma experiência (o fenómeno a observar) a criar e entender o contexto em seu redor, e o porquê de desenvolverem determinadas ações (Creswell, 2007; Hammersly, 2013; Mertens, 2009).

Um problema com a implementação deste tipo de abordagem está relacionado com o facto de o investigador possuir de antemão algum conhecimento ou experiência com o contexto e fenómeno que pretende estudar pelo que se torna necessário um exercício que envolve deixar de lado preconceitos ou juízos de valor, como que suspendendo a sua própria interpretação (o que é designado por *bracketing* ou redução fenomenológica) (Cohen, Manion & Morrison, 2005, Creswell, 2007). Contudo, como também alertaram Bodgan e Biklen (1994), os "investigadores qualitativos tendem a ser fenomenológicos na sua orientação" (p. 54), pelo que continuei esta busca ao analisar outros pontos de vista das características do contexto empírico e das questões que pretendia abordar no estudo.

A minha intensa ligação e grande proximidade com o contexto do SUB14 teve lugar durante vários anos, quer por ter constituído o foco de uma investigação anterior que desenvolvi (no âmbito do meu mestrado em Informática Educacional) quer por ter desempenhado o papel de colaboradora em vários momentos e ter realizado várias tarefas: conceção de problemas, apoio na correspondência eletrónica, avaliação de respostas, assim como organização das Finais e dinamização de sessões para os pais. Ao passo que esta proximidade me dificultou o assumir de uma posição purista do ponto de vista fenomenológico, permitiu-me, por outro lado, traçar uma estratégia que me veio a conceder acesso à atividade de resolução de problemas que também pretendia observar diretamente no ambiente natural em que decorre. Ponderei, portanto, uma abordagem com um certo pendor etnográfico.

A etnografia é uma abordagem qualitativa, de cunho interpretativo, que visa estudar um fenómeno cultural no mundo real em que é partilhado por um grupo de indivíduos, e que é desenvolvida através da imersão do investigador no ambiente natural em que o fenómeno ocorre ao longo de um período prolongado de tempo. Na raiz desta abordagem reside o pressuposto de que a cultura é desenvolvida e partilhada por grupos de pessoas que, ao longo da sua participação numa dada atividade, desenvolveram uma certa matriz cultural comum, idêntica, isto é, um conjunto de valores, crenças, hábitos, métodos ou até mesmo uma linguagem com características peculiares que interessa ao investigador estudar (Creswell, 2003; 2005; 2011; Eisenhart, 1988; Hammersly, 2006, 2013; Mertens, 2009). Assim, o investigador etnográfico tem que imergir nesse mundo, enquanto participante no grupo ou apenas observador, a fim de descrever e interpretar esses "padrões de comportamento, as crenças, a estrutura social e outros fatores", como as motivações dos sujeitos, que caracterizam o fenómeno cultural em estudo (Creswell, 2003, p. 14). Num estudo etnográfico, um dos primeiros desafios que se coloca ao investigador é o conseguir acesso ao contexto que pretende estudar, estabelecer pontes de ligação com os participantes e ganhar a sua confiança a fim de se imiscuir nesse ambiente. A principal fonte de dados é a observação das ações no local e momento em que ocorrem de forma a que possam ser "explicadas em termos da sua relação com o contexto no qual ocorrem" (Kaiser, 2002, p. 247). A recolha de dados também pode ser complementada com conversas ou entrevistas informais, notas de campo ou recolha de artefactos (Creswell, 2003).

Como fez notar Eisenhart (1988), esta abordagem foi bastante usada no final dos anos 70 e inícios dos anos 80 do século passado pelos investigadores em Educação Matemática, inspirados pela antropologia, que se encontravam particularmente interessados em compreender a resolução de problemas de matemática do ponto de vista dos participantes nos seus estudos. Endereçando algumas críticas às correntes mais usadas na investigação em Educação Matemática da época, com fortes influências da psicologia, e à beira do momento da viragem social (Stinson & Bullock, 2012) atrás referenciado, Eisenhart (1988) sugeriu a articulação de métodos etnográficos a posicionamentos mais claramente situados no paradigma interpretativo e da antropologia cultural como forma de fazer avançar a investigação neste campo.

A partir da identificação de seis características que diferenciavam os estudos etnográficos dos realizados no âmbito da Educação Matemática à época, na ocorrência da *viragem social* (Stinson & Bullock, 2012), Eisenhart (1988) criticava o facto de os estudos etnográficos não se refletirem na comunidade. Com particular interesse, observei que alguns estudos produzidos mostravam que o conhecimento que os alunos desenvolvem para além da sala de aula, quer nas suas casas quer noutros contextos exteriores à escola, eram excecionalmente considerados pelos investigadores em Educação Matemática como relevantes na estruturação de oportunidades para que os mesmos alunos pudessem aprender matemática na escola. Fazendo notar que, por um lado, os educadores matemáticos raramente recorriam a teorias socioculturais e, por outro, os antropólogos davam pouca relevância aos aspetos cognitivos, Eisenhart (1988) sugeria que os investigadores deviam procurar aproximar as teorias cognitivas e as socioculturais a fim de criar uma "teoria compreensiva da atividade humana" (p. 112).

Não obstante, a abordagem etnográfica tem também sido alvo de críticas, maioritariamente provenientes da antropologia e dirigidas à sua implementação noutros contextos de investigação. Um problema identificado diz respeito ao facto de a maior parte dos etnógrafos atuais passar muito menos tempo com os sujeitos que estudam; quando anteriormente esse trabalho de campo durava, no mínimo, um ano, agora é possível recolher dados para um estudo etnográfico numa questão de meses o que faz com que tenha passado a fazer-se uma "observação participante em *part-time*" (Hammersley, 2006, p. 4). Um dos motivos é a existência de meios tecnológicos que suportam a recolha de dados: a gravação áudio e vídeo permite recolher uma grande quantidade de informação e com grande rapidez. Porém, este trabalho de campo, ligeiro, pode pôr em risco um estudo etnográfico pois "encoraja uma perspetiva sem história" (Hammersley, 2006, p. 5), e pode levar o investigador a considerar que a atividade que observou corresponde àquilo que é típico ou que acontece sempre, quando as ações dos participantes podem representar apenas reações à presença ou ao comportamento do investigador.

Ponderando estas características e cuidados, percebi que podia ser vantajoso conferir um "sabor de uma etnografia não-tradicional" a este estudo, pedindo emprestada a designação que Amit e Fried (2005) usaram no seu trabalho. Com efeito pretendia estudar uma atividade que é partilhada por uma diversidade de jovens participantes numa comunidade que tem uma identidade, onde há práticas sociais e aspetos linguísticos próprios, onde existem mesmo algumas idiossincrasias culturais – o SUB14. Conforme explicitei atrás, há vários anos que contacto com a realidade do SUB14 pelo que é possível considerar que tenho levado a cabo uma incursão pelo contexto do SUB14 que, em certa medida, caracteriza as abordagens etnográficas. Assim previ que, nesta investigação, uma imersão deste tipo se pudesse caracterizar por períodos de trabalho de campo nos lares dos participantes, espaçados no tempo, que permitissem a observação da sua atividade *in loco* e ainda a realização de entrevistas em profundidade. Com efeito, quer a partir destas experiências anteriores quer do estudo preliminar realizado, constatei que a compreensão que procurava do fenómeno em estudo envolvia vários atores, bem como as rotinas e entendimentos que partilham no contexto do SUB14 (Patton, 1990).

Todavia, não me parecia que a escolha dos participantes fosse indiferente como seria de esperar numa etnografia, na medida em que nem todos os participantes se envolviam no tipo de atividade em estudo: se era natural considerar que a resolução de problemas de matemática com tecnologias podia assumir muitas formas, era igualmente justificável a pretensão de estudar as atividades dos participantes que podiam ilustrar uma determinada faceta, porventura relacionada com a utilização de uma determinada ferramenta. Por outro lado, não creio que fosse possível assegurar na íntegra a condição de acesso tal como desejável para realizar uma etnografia: para além de residir numa zona do país que não é abrangida pelo campeonato SUB14 (e, portanto não seria possível observar a atividade que poderia decorrer na escola dos participantes), teria sido extremamente difícil mergulhar no ambiente natural em que a atividade acontece (que é, sobretudo, um ambiente doméstico), acompanhando alguns participantes a uma distância mínima e durante um período de tempo longo. A estas, acrescia ainda outra dificuldade, que se prende com o facto de a atividade que pretendia observar poder decorrer numa multiplicidade de locais, horas do dia, e em interações com outros indivíduos.

Mas, para além de pretender estudar a atividade de resolução de problemas no seu contexto natural, reconhecendo que é moldada pelos aspetos sociais e culturais em que acontece e procurando identificá-los e caracterizá-los, este estudo tinha também propósitos centrados nos processos de resolução de problemas mediados por tecnologias, portanto, de natureza cognitiva e intrínsecos a cada indivíduo. Isto sugere que seria pertinente tomar os processos de resolução de problemas de um determinado indivíduo como unidade de análise e procurar compreender como é que se reconfiguram mediante a utilização de ferramentas tecnológicas e como é que essa capacidade de desenvolver e expressar as abordagens aos problemas se explica a partir da relação que o indivíduo mantém com as tecnologias que conhece e utiliza. Nesta linha, o estudo de caso apresentava-se como uma abordagem metodológica a considerar.

De entre os autores que mais se debruçaram e exploraram em profundidade esta abordagem, destaco o trabalho de três: Yin (1989/2009, 2003, 2005), Merriam (1988, 1998) e Stake (1995, 2005). Em Portugal, o estudo de caso é também bastante utilizado em estudos no âmbito da Educação Matemática e também têm sido produzidas profundas reflexões sobre as vantagens, constrangimentos e desafios que esta abordagem coloca (Matos & Carreira, 1994; Matos & Pedro, 2011; Ponte, 1994, 2006).

Yin (1989) compreendia o estudo de caso como "uma pesquisa empírica que investiga um fenómeno contemporâneo dentro de um contexto da vida real, quando a fronteira entre o fenómeno e o contexto não é claramente evidente e onde múltiplas fontes de evidência são utilizadas" (p. 32). Segundo Bonoma (1985), este método é útil "quando um fenómeno é amplo e complexo, onde o corpo de conhecimentos é insuficiente para permitir a proposição de questões causais e quando o fenómeno não pode ser estudado fora do contexto no qual naturalmente ocorre" (p. 207). No entanto, o investigador não deve perder de vista aquilo que faz com que um certo caso seja único ou o torne interessante do ponto de vista da investigação (Stake, 2005). O ponto forte deste *design* de investigação reside no facto de proporcionar a exploração de processos sociais à medida que ocorrem nos ambientes estudados, permitindo uma análise processual, contextual e longitudinal das ações e significados que aí são construídos.

Embora, na literatura, persistam evidências de uma discussão sobre se o estudo de caso é um método ou um *design* de investigação (Hyett, Kenny & Dickson-Swift, 2014; Mertens, 2009), parece haver um consenso generalizado quanto à sua característica mais distintiva, isto é, "a delimitação do objeto de estudo: o caso" (Merriam, 1998, p. 27). Na perspetiva de Stake (2005) o estudo de caso será tanto mais apropriado "quanto mais o objeto de estudo for um sistema específico, único e delimitado" (p. 436). O caso é, portanto, uma unidade, uma entidade ou um fenómeno com fronteiras que devem ser absolutamente claras para o investigador de forma a ajuizar sobre o que vai e o que não vai ser estudado (Brown, 2008; Cohen, Manion & Morrison, 2007; Creswell, 2007; Matos & Carreira, 1994; Merriam, 1998; Ponte, 1994, 2006; Stake, 2005; Yin, 1989/2009). Desse modo, torna-se necessário oferecer uma descrição que permita compreender o contexto no qual o caso será abordado. Ponte (2006) alertou precisamente para um dos problemas mais comuns na condução de um estudo de caso: a "delimitação imprecisa ou inadequada do objecto" (p. 19), isto é, do caso em foco, do fenómeno.

Um estudo de caso deve refletir as múltiplas interpretações e significados atribuídos pelos participantes, comprovados e negociados entre eles e o investigador. A credibilidade de um estudo de caso pode ser conseguida através da triangulação das descrições e das interpretações, num processo contínuo ao longo do estudo (Stake, 2005). Por outro lado, a sua fiabilidade pode ser assegurada através da utilização de procedimentos claros e explícitos mas o investigador deve, sobretudo, apoiar-se numa descrição densa, isto é, numa descrição “factual, literal, sistemática e tanto quanto possível completa do seu objecto de estudo” (Ponte, 1994, p. 4).

Constatei, portanto, que um estudo de caso poderia permitir descrever e explicar os processos de resolução de problemas de matemática com tecnologia desenvolvido por um pequeno grupo de jovens no âmbito do SUB14, muito em particular, devido à dificuldade em estudar um fenómeno imerso numa entidade social complexa, e da qual não se consegue isolá-lo (Matos & Carreira, 1994). O ‘caso’ a estudar seria, pois, a ‘atividade de resolução de problemas com tecnologias’ de cada um desses jovens, sendo que a seleção de cada caso teria de assentar no reconhecimento da singularidade e da especificidade de cada uma dessas atividades. Mas, o estudo da atividade implicaria uma observação da mesma, no contexto natural em que iria decorrer. De novo, o mesmo entrave que já anteriormente referi: as fronteiras virtuais do SUB14 levam a que a atividade se possa desenrolar num sem número de locais, na interação com vários outros atores, ao longo de, no máximo, duas semanas. Assim, essa observação direta só se tornaria viável se fosse possível simulá-la para se assemelhar, tanto quanto possível, àquela em que os jovens se envolvem quando resolvem os problemas com o intuito de participação no campeonato SUB14. O pensar sobre um dado problema, a forma de o abordar ou a forma de explicar a solução – que fazem parte do fenómeno que é a atividade de resolução de um problema – permeiam as inúmeras atividades de cada jovem ao longo desses quinze dias em que é possível participar com uma resposta ao SUB14. Na verdade, podem envolver-se nessa atividade em casa, sozinhos ou com familiares, em viagem para a escola ou ao centro comercial, num grupo de amigos, na sala de aula com ou sem a colaboração de um professor. Por um lado, não me era possível delimitar as fronteiras deste fenómeno para o poder observar. Por outro, seria necessário criar uma situação que desencadeasse, tanto quanto possível, uma atividade semelhante à que era desenvolvida habitualmente, mas que fosse passível de observação e entrevista em profundidade. Deste modo, constatei que não era inteiramente possível observar o fenómeno pretendido no contexto natural em que ocorre, pelo que o estudo de caso perdia assim a sua razão de ser nesta investigação.

Em suma, ponderando a natureza das questões de investigação e o enquadramento conceptual delineado, continuava a defender a adoção de uma abordagem qualitativa, inserida numa perspetiva interpretativa, como a mais indicada para desenvolver este estudo. A tentativa, aqui resumida, em escrutinar e selecionar uma abordagem metodológica apropriada para orientar esta pesquisa revelou-se, porém, uma tarefa bastante difícil. “Não há um modelo único para planear uma investigação”, referem Cohen, Manion e Morrison (2007, p. 78). Já Schoenfeld (1992b), a propósito da dificuldade em encontrar uma metodologia e o aparecimento de novos métodos, referia que estas situações são comuns e podem resumir-se numa de duas inadequações: os métodos são inadequados, ou os pressupostos teóricos subjacentes a esses métodos são inadequados. Mas até que ponto seria aceitável delinear um método de trabalho próprio, que permitisse obter os dados necessários para compreender o fenómeno e dar resposta às questões de investigação, com o rigor indispensável a um trabalho desta natureza, mas que não se encaixasse numa terminologia ou numa classificação já existente? E até que ponto a necessidade de adoção de uma terminologia se imporia ao princípio do ‘*fitness for purpose*’ (Cohen, Manion & Morrison, 2007)? Existiria uma “obrigatoriedade em adotar uma metodologia tradicional” (Duffin & Simpson, 2000, p. 183)?

4.5.1 Uma forma de trabalhar, três vizinhanças metodológicas

Retomo uma ideia que já frisei no início deste relatório: os inúmeros trabalhos de investigação consultados perspiram um ideal de planeamento e execução de elevado rigor; neles tudo tem um local exato, tudo se justifica, e tudo se encaixa com exatidão e perfeição. E tudo, com uma apreciável naturalidade. Poucos são os autores, desses que li, que se detiveram a escrever sobre as incertezas e as dúvidas, os constrangimentos e os trilhos sem saída, sobre os aspetos desalinhados dos seus estudos (*messy aspects*) e da ação de investigar (Duffin & Simpson, 2000; Swan & Pratt, 2003). Mellor (2001) refletindo precisamente sobre a sua experiência durante o seu doutoramento referiu, a dada altura: “sou agora mais desconfiado dos relatórios ‘higiénicos’” (p. 474), ou seja, depois de refletir sobre o seu percurso pessoal, percebe e aceita as dificuldades e também as imperfeições, como parte integrante e natural do percurso. Em certa medida, também elas acabam por conferir autenticidade a uma investigação desta envergadura.

Duffin e Simpson (2000) discutiram a existência de metodologias válidas em Educação Matemática e a forma como o desenvolvimento de outras formas de investigar, não catalogadas, se tornam aceites pela comunidade enquanto método de investigação. Esta dupla de investigadores também se socorreu da própria experiência explicando que a sua *forma de trabalhar* "consiste numa amálgama de partes" de métodos (p. 176). Explicaram que a questão não se resume a saber se um segmento de um método é adequado ou não, mas antes a ajuizar sobre se a *forma de trabalhar* que alguém inculca num estudo funciona efetivamente da maneira para a qual foi projetada (p. 179). A apreciação da validade do trabalho em que o investigador recorreu à etnografia, embora parcialmente, para responder a uma questão de investigação, é uma tarefa que cabe a quem conhece bem e tem experiência com a abordagem etnográfica, na medida em que consegue avaliar se a sua aplicação cumpriu os objetivos enunciados. Nesta linha, Duffin e Simpson (2000) propuseram a metáfora de *vizinhança metodológica*. Uma vizinhança metodológica, qual noção topológica, pode ser entendida como um subconjunto de investigadores, no campo da Educação Matemática, que partilham os mesmos interesses em termos de metodologias de investigação. Apesar de partilharem perspetivas e terem formas de trabalhar afins, os "investigadores numa vizinhança metodológica podem recolher ideias dos seus vizinhos e reinterpretá-las, ou traduzi-las, para os seus vizinhos noutra vizinhança metodológica" (Duffin & Simpson, 2000, p. 181).

Na verdade, os métodos que servem de base à investigação em Educação Matemática foram trazidos de outras 'vizinhanças' (e.g., psicologia, antropologia, sociologia) num processo longo, tal como Stinson e Bullock (2012) resumiram. Mas esses métodos foram também reinterpretados e traduzidos para esta área pois os problemas de interesse no campo da Educação Matemática podem ser bem mais complexos e abrangentes do que aqueles que existem em cada um desses campos isoladamente (Schoenfeld, 1992b). É então que surgem outros métodos: quando os investigadores observam que os métodos conhecidos não são satisfatórios (Schoenfeld, 1992b).

Ao desenvolver um dos estudos mais proeminentes em Resolução de Problemas de Matemática, Schoenfeld teve que conceber um método para analisar os dados recolhidos no formato de cassetes de vídeo porque, à data, nenhum dos disponíveis lhe parecia adequado. Este assunto deu o mote para uma discussão mais aprofundada sobre paradigmas e métodos e 'o que fazer quando aqueles que conhecemos não fazem o que pretendemos que façam'. Deste artigo destaco a lista de padrões 'bastante rigorosos' para a apresentação de novos métodos em artigos científicos que Schoenfeld (1992b) defendeu: 1) estabelecer o contexto, descrevendo as questões a ser abordadas; 2) fundamentar o método; 3) descrevê-lo com suficiente detalhe, para que seja possível replicá-lo; 4) providenciar um corpo suficiente de dados que permita ao leitor analisá-lo e contrastá-lo com os resultados e com o método do autor; 5) oferecer uma discussão metodológica que especifique o âmbito e as limitações do método, bem como as circunstâncias em que pode ser aplicado, referindo questões de validade e fiabilidade. Como me preparo para relatar e justificar o processo de recolha, organização e análise de dados que dá corpo à abordagem metodológica desenvolvida no âmbito deste estudo, embora tal não constitua um novo método e considerando que seria uma mais-valia, optei por fazer o exercício de encarar estes padrões enquanto recomendações para esta *forma de trabalhar*, com pé assente em três vizinhanças metodológicas.

Assumindo um posicionamento interpretativo sobre a natureza da atividade humana e do conhecimento, abordei a questão central – a atividade de resolução de problemas com tecnologias – empreendendo um estudo qualitativo em que a fonte dos dados é o próprio contexto em que este fenómeno acontece, o campeonato SUB14. Os dados são eles próprios de natureza qualitativa (e.g., resoluções de problemas produzidas pelos participantes, transcrições de entrevistas, fotografias), e foram por mim recolhidos através de múltiplos instrumentos qualitativos (e.g., observação, entrevistas, documentos). A análise dos dados foi indutiva e interpretativa, na qual tive em conta as perspetivas dos participantes, e procurarei focar-me nos processos que compõem a atividade e não apenas o seu produto. Assumindo uma visão pragmática de investigação, recorri a métodos originários de três vizinhanças metodológicas, pretendendo que convergissem naquilo que se viria a tornar a 'minha forma de trabalhar', com a forte expetativa de que funcionassem, efetivamente, da maneira para a qual os estava a projetar.

Uma parte substancial da informação necessária foi obtida através de uma incursão no ambiente em que a atividade ocorre, o doméstico, pelo que recorri a técnicas de foro qualitativo para obter dados que me permitissem descrever as experiências subjetivas e as perspetivas dos participantes, e familiares próximos, sobre o seu envolvimento na atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias. Pretendia compreender a essência dessa atividade, das ações que os sujeitos empreendem e das próprias interações com outros atores que os rodeiam, nos seus sistemas de atividade, de modo a perceber as teias de relações que determinam os produtos da sua atividade.

Considero que, nesta etapa, esta forma de trabalhar assumiu características tanto da *abordagem fenomenológica* – foi necessário ponderar a escolha de participantes com experiência na atividade a observar, que estivessem disponíveis para colaborar no estudo; foi muito importante conseguir captar a essência única de cada um; a profundidade das entrevistas dependeu da relação estabelecida com os participantes; sendo que a análise e o relatório devem incluir citações diretas que apoiem as afirmações. Simultaneamente apresenta características de uma *abordagem etnográfica* – foi importante desenvolver uma visão holística da comunidade do SUB14; ponderei a escolha dos participantes com base em características que os demarcavam uns dos outros; considerei diversas formas de aceder aos dados; procurei ganhar a confiança dos participantes para que colaborassem voluntariamente numa etapa de observação da atividade; tornei completamente clara a intencionalidade do estudo, de forma a poder descrever os aspetos sociais e culturais da participação no SUB14. Acautelei ainda o *design* de uma situação que desencadeasse, tanto quanto possível, uma atividade semelhante à que é habitualmente desenvolvida pelos participantes no âmbito do SUB14, a fim de ser observada de forma direta e em tempo real. Daqui, em articulação com a análise de resoluções submetidas ao SUB14 e das perspetivas dos participantes sobre os processos de resolução empreendidos, esperava obter informações sobre os processos específicos de resolução de problemas de matemática e a integração de ferramentas tecnológicas nesses processos para resolver-e-exprimir as soluções.

A conjunção da análise dos dados recolhidos por estas vias foi operacionalizada através da escrita de casos, tomando aqui como referência a distinção entre a abordagem metodológica *estudo de caso* e o que significa escrever um caso. Dooley (2002) diferenciou o conceito de ‘caso’, do conceito de ‘estudo de caso’ e de uma ‘abordagem de estudo de caso’, embora reconhecendo que essas designações são usadas na literatura como sendo sinónimos (citando Herling, Weinberger e Harris, 2000). Com base em Merseth (1994), Dooley (2002) argumentou que um caso é um documento de investigação descritivo, que utiliza a forma narrativa para retratar a situação real em análise, de forma a transmitir uma panorâmica multidimensional do contexto, seus participantes e das atividades em que se envolvem. Nesta linha de pensamento, o estudo delineado baseou-se na análise de *casos* que retratam atividades de resolução de problemas com tecnologias, demarcando-se, portanto, da noção de estudo de caso enquanto abordagem metodológica. Cada capítulo empírico reporta o caso de um(a) jovem participante numa competição *online*, o SUB14, envolvido(a) numa atividade particular de resolução de problemas de matemática, recorrendo às ferramentas tecnológicas que tem à sua disposição no seu ambiente familiar.

Esta 'maneira de trabalhar', que paulatinamente se compôs, corresponde a uma 'amálgama' de vários métodos qualitativos e justificados à luz do paradigma interpretativo, que permitiram aceder ao fenómeno e proceder à recolha, organização e análise de dados. Conforme já referi, não creio que esta 'maneira de trabalhar' constitua um método novo. Na realidade, uma trilogia de métodos semelhantes foi utilizada por Andreas Busse e Rita Borromeo Ferri (2003), a observação, a entrevista e o recordar e reconstituir (*stimulated recall*), para estudar a interação entre os processos externos e internos que ocorrem quando se resolve uma tarefa matemática, dado que uns são diretamente observáveis e os outros não, o que dificulta qualquer tentativa de compreensão. Esta combinação de métodos é particularmente útil quando se pretende obter dados *após* o trabalho numa dada tarefa e *durante* a atividade propriamente dita. O método que os autores conceberam, designado por *design* em três etapas, consistia em: 1) observação dos processos de resolução de problemas em pares de alunos, com vídeo gravação; 2) retrospetiva incitada, i.e., os participantes visionaram os seus processos de resolução de problemas vídeo gravados e foram estimulados a dizer tudo o que viesse às suas mentes, com áudio gravação; e 3) entrevistas em profundidade a cada participante com foco nas outras duas fases.

A combinação destes três métodos permitiu a recolha de dados de diferentes naturezas que, sobrepondo-se ou sendo complementares, visavam providenciar uma visão global e compreensiva do fenómeno (Patrick & Middleton, 2002, p. 34). Esta técnica é comumente designada por *triangulação* metodológica (Borralho, Fialho & Cid, 2015; Lincoln & Guba, 1985; Patton, 2002) e muito usada em investigações qualitativas. Apresentando-se como adequada quando se pretende estudar um fenómeno que é complexo ou controverso, com a intenção de produzir uma compreensão holística (Cohen, Manion & Morrison, 2005), a triangulação é bastante vantajosa na medida em que, além de permitir explorar os benefícios e as vantagens que cada método tem a oferecer (Guba, 1981) na recolha de dados, potencia a resolução das fragilidades da utilização de um único método (Patrick & Middleton, 2002).

4.5.2 Papel da investigadora

Numa investigação qualitativa, de índole interpretativa, o investigador procura compreender objetivamente o significado subjetivo de um fenómeno; neste caso, procurava compreender a atividade de jovens participantes num campeonato *online* de resolução de problemas de matemática. Assim, importava discutir o papel da investigadora neste trabalho, em particular refletir sobre o eventual risco de subjetividade e enviesamento na recolha dos dados e na sua análise.

Sublinho, em primeiro lugar, a longa relação de colaboração e também pessoal que mantenho com os docentes e investigadores que dão vida ao SUB14, a sua Organização. Esta relação iniciou-se em 2007 e, desde então, tenho assumido uma diversidade de papéis (quer enquanto professora que acompanha o desenvolvimento da fase presencial e fase final de cada edição, quer enquanto investigadora) o que me permite conhecer de antemão e com relativa profundidade o modo de funcionamento do SUB14.

Uma vez que considero que a realização deste estudo é, em toda a sua extensão, uma experiência de aprendizagem pessoal, não abdiquei de assumir todo o trabalho que lhe é inerente: pesquisar, refletir e decidir, elaborar guiões e demais instrumentos de recolha de dados, contactar e visitar participantes com vista a recolher dados, organizar e sistematizar os dados, incluindo a transcrição de todas os encontros, a análise dos dados, redação da tese e de outros trabalhos de natureza científica, sua discussão e apresentação em conferências ou congressos.

O estudo preliminar, que se veio somar às experiências anteriores no terreno, levou-me a ponderar o meu papel na realização do trabalho de recolha de dados junto dos participantes e seus familiares. O facto de me apresentar enquanto investigadora que também é professora de matemática motivou inúmeras conversas em torno do papel da escola, da aprendizagem da matemática, das alterações curriculares, do insucesso e de outras questões que, no momento, eram parte do debate público. Estas conversas decorreram de um acesso e proximidade incomuns pelo que, não raras vezes, me solicitaram conselhos sobre o papel dos pais no acompanhamento das aprendizagens, sobre os materiais de estudo, entre outros. Seria, portanto, de prever ocorrências dentro desta linha no estudo que pretendia desenvolver. Esta proximidade foi considerada uma mais-valia, dado que uma das formas de aceder e recolher dados exigiu um trabalho de campo prolongado no tempo para que pudesse "assumir uma perspetiva interna" (Kaiser, 2002, p. 248), e de forma a que a minha presença se tornasse habitual, procurando que os participantes se sentissem o mais à vontade possível para falar abertamente das suas resoluções, das suas preferências, da sua sala de aula, do campeonato, para que se sentissem confortáveis a resolver um problema de matemática, ou seja, ultrapassar um desafio com um registo vídeo que capta todas as suas possíveis dificuldades. Assim, o sucesso desta etapa do trabalho assentaria no desenvolvimento de uma relação de empatia e confiança com os jovens e seus familiares. Isto significa que o contacto com os participantes envolveria o colocar-me no seu lugar, compreender os seus pontos de vista, as suas experiências e também as suas visões do mundo (Patton, 2002).

Relativamente à análise e interpretação dos dados, que neste trabalho são processos interpretativos com base na indução, o modelo conceptual que o investigador desenvolve sobre o fenómeno que se encontra a estudar inclui a sua própria conceção sobre os aspetos desse fenómeno que são relevantes ou válidos (Schoenfeld, 2007). Quer isto dizer que, enquanto investigadora, devo estar consciente de que as minhas próprias conceções sobre noções como 'atividade matemática', 'resolução de problemas' ou 'tecnologia na resolução de problemas' influenciam tanto a recolha de dados como as conclusões que se podem alcançar a partir desses dados. Na verdade, a discussão teórica incluída nos capítulos anteriores já procura ser uma ferramenta para lidar com esta dificuldade. Por um lado, porque a aprendizagem que decorre das leituras e sua discussão permite estabelecer balizas concretas para essas conceções. Por outro, porque me permite moldá-las até obterem o necessário grau de firmeza e fundamentação na literatura de forma a possibilitar distinguir o que é relevante e válido, para que "ultrapasse a mera visão do senso comum sobre os fenómenos" (Amado, 2015, p. 17).

4.5.3 Questões éticas

Diversas são as questões éticas que podem surgir durante a recolha de dados, a sua análise e também a sua divulgação (Creswell, 2007), pelo que um investigador qualitativo deve estar consciente dessas possibilidades e procurar formas de reduzir, senão resolver, qualquer tipo de conflito desta natureza.

Ao longo das últimas décadas, inúmeras entidades de abrangência internacional têm delineado princípios orientadores da prática de investigação em ciências da educação, tendo por base discussões e reflexões de vários autores influentes. Ao delinear esta investigação, tive em conta diversas recomendações relativamente às questões éticas a assumir numa investigação científica, muito em particular, em ciências da educação (Bogdan & Biklen, 1994; Cohen, Manion & Morrison, 2005; Hammersley & Traianou, 2012; Patton, 2002). A nível nacional, em 1995, um dos primeiros números da revista Quadrante dedicou alguns artigos às questões da ética divulgando as normas da *British Psychological Society*, da *American Educational Research Association*, e da *American Mathematical Society*. No mesmo número, Conceição Almeida (1995) discutia alguns princípios éticos e recomendava a salvaguarda dos seguintes: o direito dos participantes à privacidade e à informação; o direito à integridade física e moral; o direito à confidencialidade, ao anonimato e ao reconhecimento público[22]. Atualmente, podem ser encontradas recomendações idênticas na Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (Deliberação n.º 453/2016 de 15 de março do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2016) em sintonia com o estabelecido pela Carta Ética da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE, 2014). Deste modo, e em conformidade com o disposto nas Orientações para a investigação em educação e formação da Deliberação n.º 453/2016 supracitada, passo a explicitar os princípios éticos que acautelei nesta investigação bem como os procedimentos que adotei a esse propósito.

Um dos princípios éticos fundamentais é comumente designado por *consentimento informado* e compreende o seguinte: "Os participantes têm direito a ser plenamente informados e esclarecidos sobre todos os aspetos relativos à sua participação, bem como a mudar os termos da sua autorização, em qualquer altura da investigação" (SPCE, 2014, p. 7). Desta forma, nos primeiros contactos mantidos com os participantes e seus encarregados de educação comecei por tornar claros os propósitos desta investigação, bem como todos os procedimentos previstos e as condições em que se realizaria o estudo, explicitando a necessidade de proceder a várias entrevistas e os mecanismos de registo, e de propor a simulação da resolução de problemas do SUB14 no ambiente natural em que costuma ocorrer, com observação direta e vídeo gravação.

O trabalho de campo prolongado proporciona o acesso a várias outras dimensões da vida familiar que são do foro privado. Sendo o investigador o principal instrumento de recolha de dados, não posso selecionar o que vejo ou ouço em determinado momento, e

[22] Por lapso da edição, o texto de Almeida (1995) só foi publicado na íntegra na revista Quadrante vol 5, nº1, Jan/Jun de 1996.

não é exequível pausar a gravação áudio ou vídeo num determinado momento que poderia captar outras atividades de foro íntimo das famílias. Com esta preocupação em mente, assegurei aos intervenientes que a gravação vídeo iria estar focada exclusivamente no trabalho do jovem durante a atividade de resolução de problemas e, que quaisquer outras informações a que tivesse acesso, por este ou outro meio, que não fossem do âmbito da investigação, não seriam utilizadas nem para este nem para quaisquer outros fins. Garanti ainda a confidencialidade dos dados recolhidos para a investigação.

Este princípio ético prende-se com um outro, o da *garantia da confidencialidade e privacidade*: “Os participantes da investigação têm direito à privacidade, à discrição e anonimato” (SPCE, 2014, p. 8). De facto, a participação de cada jovem no estudo foi autorizada pelos respetivos encarregados de educação mediante o preenchimento de uma declaração (Anexo A) na qual podiam livremente escolher quais os tipos de dados que autorizavam recolher (captura de ecrãs, áudio e vídeo) e quais os usos que me permitiam fazer dessas informações (publicação de transcrições em artigos, brochuras e/ou monografias; divulgação de excertos do vídeo em conferências e seminários; publicação de resoluções de problemas). O anonimato de cada participante está expressamente garantido na referida declaração e é concretizado neste relatório, e noutros documentos publicados, através do uso de nomes fictícios.

Para além desses aspetos, introduzi ainda no documento de autorização a possibilidade de decisão sobre a ocultação do rosto de cada jovem neste trabalho e publicações associadas. Embora todos os encarregados de educação tenham renunciado voluntariamente a esse direito, optei por ocultar o rosto dos participantes neste relatório e em todas as publicações ou comunicações efetuadas em que utilizei estes dados. Na verdade, esta questão suscitou alguma controvérsia por parte de duas encarregadas de educação na medida em que pretendiam precisamente o contrário: do seu ponto de vista, a seleção das suas educandas para participar numa investigação desta natureza era motivo de alegria e orgulho para as famílias. Entre os motivos alegados pelas encarregadas de educação encontrava-se o facto de algumas das resoluções das jovens estarem já publicadas na página *web* do SUB14, contendo uma associação ao nome da jovem e à sua escola, e ainda pelo facto de consentirem que as suas educandas tenham uma identidade digital, nomeadamente, através de perfis em redes sociais. De certo modo, este facto sinaliza que estão conscientes das pegadas digitais das jovens e também da dificuldade em eliminar o risco associado a esse rasto digital.

Esta questão foi discutida por Patton (2002) com base em vários exemplos no campo das ciências sociais e, mais recentemente, por O'Reilly, Karim, Taylor e Dogra (2012) a partir de um estudo no campo da psicologia clínica que se debruçava sobre as visões de pais e crianças sobre o anonimato e o direito a serem reconhecidos. O anonimato consiste na remoção de qualquer traço ou característica que possa identificar os sujeitos participantes num estudo. Patton (2002) explicou que, embora o anonimato continue a ser uma prática comum na investigação em ciências sociais, há cada vez mais participantes que insistem em serem "detentores das suas histórias" (p. 411), quer isso dizer, que têm orgulho na sua identidade e insistem em usar o seu nome verdadeiro. O autor questionou então se, perante um caso desses, o investigador terá direito a impor a confidencialidade e assim contrariar os desejos dos participantes, ou ainda se a presunção de que os sujeitos não estão conscientes dos riscos a que se estão a expor não é uma atitude condescendente ou paternalista. Contudo alertou: nessa situação, os participantes não estão apenas a abdicar da sua privacidade, mas da de um conjunto de pessoas em seu redor.

No estudo que O'Reilly, Karim, Taylor e Dogra (2012) conduziram, foram identificadas tensões entre as perspetivas dos jovens e dos seus pais sobre a questão do anonimato. No entanto, uma das conclusões do estudo é a de que "a natureza protetora do anonimato é completamente adequada aos jovens participantes em investigações dado que é congruente com as suas preferências pessoais" (p. 221). Pelo contrário, os pais podem sentir que a identificação é, de algum modo, benéfica mas "tendem a reportar-se à sua própria identidade" (p. 221). Os autores salientaram ainda que a possibilidade de ocorrer uma 'divulgação dedutiva', isto é, a identidade acaba por ser deduzida de outras fontes, cria tensões ao investigador que também tem a missão de reconciliar as perspetivas dos jovens e dos seus pais. Segundo os autores, este facto reforça a necessidade de proteger aqueles participantes, precisamente através do anonimato.

Esta é, pois, uma tensão não resolvida no campo da ética em investigação em ciências sociais. Constato que, neste estudo, o reconhecimento dos jovens participantes iria também identificar as suas famílias e alguns amigos, as suas escolas e alguns colegas, e os seus professores de matemática. Apesar de facultarem dados pessoais no âmbito da sua participação no Campeonato SUB14 e de consentirem a sua divulgação *online*, entendo que nesta investigação devo manter, tanto quanto possível, o anonimato dos jovens e suas famílias, resguardando assim a sua privacidade.

Quanto à *divulgação da informação*, outro princípio constante em cartas éticas, "Os participantes têm direito a ser informados sobre os resultados da investigação e sobre a forma como esses resultados vão ser usados e divulgados, em conformidade com o que for acordado no âmbito do consentimento informado" (SPCE, 2014, p. 9). Este princípio foi também acautelado ao dar informação aos participantes e seus pais sobre os produtos que são de esperar em resultado desta investigação. Além disso, foi-lhes também concedida a possibilidade de decidir sobre o consentimento de publicação de transcrições de entrevistas, de excertos de vídeos ou fotografias e resoluções elaboradas pelos jovens em artigos científicos, em livros ou em conferências ou seminários (como está patente no modelo de declaração de autorização, Anexo A).

Saliento um outro princípio ético de particular importância, o da *desistência da participação*, segundo o qual "Os participantes têm sempre direito a manifestar dúvidas ou reservas relativamente à sua participação, com motivo ou sem motivo expresso" (SPCE, 2014, p. 9). Este direito foi dado a conhecer também no primeiro encontro presencial, na medida em que só então apresentei o estudo nas suas várias dimensões, incluindo a observação direta da atividade no ambiente doméstico. A encarregada de educação de uma participante, Jéssica, veio a usar deste direito solicitando a sua desvinculação do estudo aquando da aproximação da etapa final, precisamente a que envolvia a observação da atividade. Embora tentando perceber se de alguma forma poderia contornar o que motivava o pedido, a fim de que a jovem continuasse envolvida no estudo, aceitei o pedido de desistência. Contudo, certifiquei-me junto da encarregada de educação da jovem de que poderia utilizar os dados recolhidos até então para os fins e em conformidade com a sua declaração de autorização previamente assinada.

A relação com os participantes e seus familiares também se pautou pelo princípio do *benefício e do respeito pela sua integridade física e moral*, ou seja, que "os processos de investigação, bem como os seus resultados, deverão ser pensados e comunicados de forma a evitar qualquer situação que possa constituir ameaça para a integridade das pessoas e comunidades envolvidas" (SPCE, 2014, p. 10). Neste estudo tive particular atenção às exigências que a etapa de observação da atividade de resolução de problemas poderia acarretar para um jovem de 12-13 anos. A própria natureza da atividade, a resolução de um problema de matemática, é, por si só, um ato desafiante que cada indivíduo sente e enfrenta de forma diferente. Para além disso, a presença da investigadora, que além de ser professora de matemática mantém laços estreitos com a

Organização do SUB14, pode causar um nível indesejado de *stress* nos jovens. Assim, esta etapa seria tanto mais bem-sucedida quanto o jovem se sentisse mais confiante e confortável para expor abertamente os seus pensamentos, os dilemas com que se depara, as suas dúvidas ou indagações, sem sentir que está sob avaliação e com a garantia de que este trabalho e o seu desempenho não influenciaria os seus resultados a nível do SUB14.

Por último gostaria também de destacar uma preocupação com a relação que estabeleci com outros investigadores, muito em particular, devido ao facto de este trabalho ter sido desenvolvido no seio do Projeto Problem@Web. Aí desenvolvi vários trabalhos de colaboração com outros investigadores, embora alguns em torno de outros dados que não os deste estudo. A definição da autoria e coautoria teve sempre subjacente "critérios de liderança e participação efetiva na elaboração dos documentos" (Deliberação n.º 453/2016 de 15 de março do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa). Por exemplo, nas publicações em formato de monografia e livro de autor, resultantes da vertente relacionada com a Resolução de Problemas com Tecnologias, foi registada a informação de quais os capítulos que resultavam efetivamente de um trabalho de investigação mais específico desenvolvido no âmbito do doutoramento.

4.6 Os participantes

A seleção dos participantes para este estudo foi um processo moroso e com alguma complexidade, dado que envolveu uma sequência de etapas que tiveram na sua base um acompanhamento muito próximo do Campeonato SUB14 durante alguns meses.

Tal como noutros estudos de natureza qualitativa, os participantes nesta investigação seriam convidados a contribuir com as suas perspetivas pessoais e o seu conhecimento específico sobre variados aspetos da sua atividade de resolução de problemas com tecnologia. Neste estudo, os participantes deviam ser considerados 'peritos' na sua condição de concorrentes no SUB14, o que levaria a ter em conta a sua experiência na resolução de problemas de matemática com o uso das tecnologias da sua preferência, bem como a sua experiência de participação no campeonato, como um todo. Estes participantes são, assim, as principais fontes de informação desta pesquisa.

Assim, a escolha dos participantes deveria ser intencional para potenciar a obtenção de casos ricos e diversificados, que pudessem ser estudados em profundidade, e que permitissem esclarecer a questão norteadora da investigação (Cohen, Manion & Morrison, 2007; Patton, 2002; Stake, 2000). Como previa, os dados referentes a cada participante deveriam confluir na elaboração de *casos críticos* (Patton, 2002), ou seja, casos de elevada pertinência que possibilitassem ilustrar os aspetos mais relevantes do fenómeno em estudo, o mais exaustivamente possível. Deviam, pois, ser escolhidos de forma a garantir a obtenção de um máximo de informações importantes e ter o maior impacto possível no avanço do conhecimento sobre o fenómeno.

Naturalmente, a identificação de casos críticos parte do reconhecimento dos aspetos que os tornam críticos, isto é, das particularidades de cada caso que lhe conferirão unicidade ou especial relevância. Estes jovens participantes teriam que possuir conhecimento e experiência com o objeto de estudo (Creswell & Plano Clark, 2011), o que quer dizer que deviam conhecer bem o modo de funcionamento do campeonato e ter experiência na resolução dos problemas matemáticos com tecnologias. Para a obtenção de informação de qualidade, os participantes também teriam que estar disponíveis para colaborar nas várias dimensões do estudo, o que implica uma certa capacidade para comunicar com clareza as suas opiniões, as suas opções e preferências, ou refletir sobre os próprios processos de resolução dos problemas.

Com estas ideias presentes, optei por selecionar três jovens com experiência de participação nos campeonatos de resolução de problemas. O dispositivo de recolha de dados envolveu ainda os seus familiares que se prontificaram para abrir as portas de suas casas e me acolheram, por várias vezes, ao longo de um ano. Saliento também a importante colaboração por parte da coordenação da Equipa Organizadora do SUB14 que i) possibilitou o acesso às resoluções dos concorrentes (aos ficheiros submetidos e ao *feedback* enviado pela equipa de professores do SUB14); ii) estabeleceu uma ponte de comunicação com os próprios candidatos a participar no estudo e familiares; iii) facultou o acesso à final do SUB14; iv) ofereceu apoio técnico para gerir a disponibilização dos problemas experimentais *online* na página gerida pela Universidade do Algarve; e v) reenviou as resoluções recebidas no *e-mail* do SUB14, aquando da fase experimental.

A seguir, passo a descrever os procedimentos que precederam a seleção dos três participantes neste estudo bem como uma síntese de algumas características da sua atividade que me levaram a antevê-los como casos críticos e que são, posteriormente, discutidas e aprofundadas em cada caso.

4.6.1 Etapas na seleção dos participantes

A seleção dos participantes neste estudo foi precedida de uma recolha de informações junto da Organização dos campeonatos. Essa etapa prévia consistiu na recolha e organização de listas de participantes em edições anteriores, tanto no SUB14 como no SUB12, e ainda das resoluções *admiráveis* publicadas nas respetivas páginas.

A etapa seguinte consistiu no acompanhamento do desenrolar da competição ao longo de cerca de 3 meses, entre janeiro e março de 2012, o que permitiu criar um registo de potenciais participantes. Foram fatores de inclusão neste registo: a completude das soluções apresentadas (muitas delas selecionadas para publicação pela organização como resoluções *admiráveis*), as abordagens ou estratégias desenvolvidas para resolver os problemas propostos, o tipo de ferramenta tecnológica a que os jovens recorreram e o tipo de utilização que lhe deram. Esta informação foi coligida numa tabela ao longo da edição referida, à qual acrescentei ainda outras informações, nomeadamente, a localidade da escola de cada um desses jovens (como uma aproximação da sua residência), a indicação de ter participado ou não no Campeonato SUB12, ou de ter sido finalista ou não em edições anteriores dos campeonatos. A título de exemplo, as informações registadas relativamente a um potencial participante no estudo que integrou nesta listagem incluíram: utilização frequente do PowerPoint para resolver problemas sendo que em algumas ocasiões faz simulações (e.g., simula a distribuição de rebuçados, simula movimento de objetos ou pessoas), estuda numa escola situada na cidade de Loulé, apenas participou no SUB12 durante o seu 6.º ano de escolaridade e foi finalista nessa edição, participou no SUB14 durante o seu 7.º ano mas não foi apurado para a final.

Após a primeira quinzena desta edição, a tabela de concorrentes sinalizados contava com 21 jovens. Este número foi aumentando ao longo das quinzenas seguintes, atingindo um total de 67 candidatos a participantes no estudo, embora alguns deles também tenham ‘falhado’ problemas, quer porque não submeteram uma resposta, quer por não terem respondido com correção ou não terem justificado a sua resolução. Ao fim de cinco problemas, e eliminados os participantes com respostas incorretas ou incompletas, a lista continha 29 candidatos com características que lhes permitiam participar no estudo. Esta lista foi analisada tendo por base a consistência das produções de cada concorrente ao longo deste período, o que permitiu reduzi-la a um total de 16 jovens: 10 a concorrer individualmente e 6 a concorrer em duas equipas de três elementos. Após uma reflexão sobre a recolha e análise de dados referentes ao Caso 2 (Secção 4.3.1) do estudo prévio não me pareceu viável debruçar-me sobre equipas de participantes. Por um lado, aquela experiência deixou-me perceber que, embora o trabalho seja produzido em equipa, a colaboração pode não ser igualmente distribuída; por outro, como o fenómeno a estudar é a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias, teria que observar as interações entre os elementos do grupo a desenvolver as suas abordagens. Nesse caso, a análise dos dados exigiria uma lente teórica mais focalizada nas interações entre os jovens, provavelmente, contemplando a possibilidade de ocorrer a distância.

De entre os 10 elementos a concorrer individualmente, selecionei três. Esta última etapa da seleção incidiu sobre: o tipo de ferramenta digital que predominava nas suas resoluções, pelo que procurava jovens com diferentes tendências em termos dos programas que mais utilizavam; a expressividade espelhada nas suas produções, o que podia indiciar a sua capacidade de comunicação e otimizar as possibilidades de serem bons informantes no estudo; a sua experiência em edições anteriores nas competições, procurando jovens com diferentes percursos; e ainda a possível localidade de residência, pelo que procurei incluir jovens do Algarve e Alentejo.

4.6.2 Os participantes

Conforme referi, selecionei três jovens concorrentes no SUB14 para participantes neste estudo – de nomes fictícios Jéssica, Marco e Beatriz – cuja atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias apresento e discuto nos capítulos 7, 8 e 9 deste relatório. À data da seleção destes participantes, no decurso da quinzena 5 do campeonato, estava reunido um conjunto de informações que me permitiam traçar um perfil inicial da sua forma de abordar os problemas, tal como apresento sumariamente em seguida.

Jéssica residia no concelho de Santiago do Cacém onde frequentava o 8.º ano numa escola básica com ensino secundário. Participou no SUB14 no ano letivo anterior, tendo sido apurada para a Final. Costumava produzir as suas soluções no Word onde apresenta cálculos, relata procedimentos e justifica raciocínios, através de texto, imagens ou esquemas. Também recorria ao GeoGebra.

Marco estudava no 8.º ano, numa escola do concelho de Alcácer do Sal, e participava pela quarta vez nos campeonatos. Também já experienciou duas finais dos campeonatos: uma no seu 5.º ano e outra no seu 7º ano. Por norma, Marco submetia as suas respostas num formato livre de uma folha de cálculo. Conhecia algumas fórmulas e era capaz de construir gráficos e esquemas. Também enviou resoluções produzidas no GeoGebra.

Beatriz frequentava o 8.º ano numa escola do concelho de Albufeira. Iniciou a sua participação no 6.º ano e no 7º ano foi apurada para a Final do SUB12. Nesta nova edição do SUB14, respondeu corretamente aos primeiros 5 problemas, submetendo as suas soluções em formato PowerPoint. Neste programa, insere imagens, utiliza formas para construir esquemas, insere texto, e simula os problemas. Pode dizer-se que a sua 'imagem de marca' era a apresentação das suas resoluções através de *slides* de PowerPoint.

4.7 Recolha de dados

Nesta secção apresento e descrevo os métodos seguidos na recolha de dados, explicitando a diversidade de fontes a que recorri, o modo como os dados foram coligidos ao longo do tempo, quais os seus formatos, bem como as suas funções no desenrolar estudo.

4.7.1 Métodos de recolha de dados

Recolha documental

A recolha documental constituiu-se como uma etapa muito relevante do processo de obtenção de dados deste estudo, embora servisse dois propósitos distintos: por um lado, o de assistir na seleção dos jovens participantes no estudo e, por outro, o de fornecer evidências empíricas sobre as abordagens seguidas pelos jovens na resolução de problemas e um primeiro desvendar do eventual papel que a tecnologia desempenha na resolução dos problemas e na expressão do pensamento matemático.

A fase de seleção dos participantes, conforme explanado anteriormente, apoiou-se na recolha das resoluções produzidas por cada jovem no âmbito do SUB14 até ao momento da sua eleição como participante no estudo. Após a aceitação e autorização de participação nesta investigação, essa recolha e organização das resoluções prosseguiu com a recolha das resoluções que os participantes vieram a submeter aos restantes problemas propostos na edição de 2012 (janeiro a junho) do SUB14, bem como de toda a correspondência eletrónica trocada entre cada jovem e a organização da competição. O conjunto de documentos recolhidos e armazenados inclui os ficheiros submetidos pelos jovens (documentos de texto, folhas de cálculo, imagens, apresentações, digitalizações, ficheiros pdf). A correspondência eletrónica trocada permitiu identificar as soluções que foram melhoradas e ressubmetidas, assinalar os contactos e as relações que se foram estabelecendo entre os jovens e a Organização do campeonato e, na edição de 2012, registar as apreciações dos participantes relativamente ao gosto sentido por cada problema, ao grau de dificuldade e às ajudas a que recorreram.

Quivy e Campenhoudt (2008) alertaram para a necessidade de validação dos dados documentais recolhidos, nomeadamente, no que concerne à garantia da sua autenticidade e à credibilidade das fontes. Esta recomendação é particularmente importante na medida em que, não sendo possível comprovar se o processo de resolução apresentado nos ficheiros que os jovens submeteram durante a fase de apuramento do SUB14 corresponde ou reporta na íntegra tudo aquilo que foi efetivamente desenvolvido no decurso da obtenção da solução, a análise desses documentos seria complementada com as informações recolhidas por meio da realização de entrevistas focadas em documentos específicos e sobre os quais os jovens viriam a ser convidados a fazer uma retrospetiva do trabalho realizado e correspondentes circunstâncias.

Entrevistas

A entrevista é um método propício para obter "dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 134) a sua própria atividade de resolução de problemas com tecnologias. Nas pesquisas qualitativas consideram-se diferentes tipos de entrevistas, cuja distinção pode assentar no seu grau de estruturação (Bogdan & Biklen, 1994; Quivy & Campenhoudt, 2008). Neste estudo, além das conversas informais, que não considero propriamente entrevistas, foram realizadas entrevistas semiestruturadas e entrevistas em profundidade que, em certo sentido, podem comparar-se a entrevistas clínicas.

As *entrevistas semiestruturadas* foram realizadas aos três jovens e aos familiares que acompanham a sua participação no Campeonato, numa fase inicial do trabalho de campo. As entrevistas aos participantes visavam obter dados que permitissem caracterizar os aspetos gerais da sua atividade usual de resolução de problemas de matemática com tecnologias no âmbito do SUB14. As entrevistas aos encarregados de educação permitiram obter dados sobre a forma como percecionam a atividade usual de resolução de problemas que os seus educandos desenvolvem no mesmo âmbito. Foram colocadas questões que possibilitassem inferir sobre o que motiva os jovens a participar; que regras percecionam; se existem e quem são os outros intervenientes na atividade; que ferramentas utilizam com mais frequência, que razões estão na base dessa escolha, como aprenderam a usá-las e de que forma as utilizam. Esperava que estas entrevistas permitissem obter dados provenientes dos sujeitos que empreendem a atividade com regularidade e dos que, de forma mais próxima, a observam no seu contexto natural ou, mesmo, intervêm nela de alguma forma que importa também conhecer.

Estas entrevistas aos participantes e aos encarregados de educação foram apoiadas por protocolos (Anexo B e Anexo C, respetivamente) que incluem uma lista de tópicos e possíveis questões a abordar ao longo da conversa. Embora sendo flexíveis, cada um destes protocolos foi seguido em todas as entrevistas do mesmo tipo para assegurar uma certa consistência entre a estrutura das várias conversas mas, sobretudo, para me certificar da existência de uma certa consistência entre o tipo de informações recolhidas de cada entrevistado. Por outro lado, também pretendia incutir uma certa informalidade nestas primeiras entrevistas pelo que era expectável e ocorreram desvios às questões ou tópicos programados, no sentido em que se revelou importante explorar determinados aspetos trazidos à conversa pelos entrevistas e tinham potencial interesse para o estudo.

Ambas as entrevistas incluíram algumas questões que vão além do propósito deste estudo, em particular, as que estão mais relacionadas com a aprendizagem da matemática escolar do jovem ou o percurso escolar do encarregado de educação. Entendi incluir questões desta natureza no início destas entrevistas dado que podiam ajudar a desbloquear a conversa e, ainda, porque podiam vir a fornecer pistas que auxiliassem a compreensão do fenómeno. Por exemplo, no caso dos encarregados de educação, conhecer o seu historial relativamente à matemática escolar e ao uso de tecnologias podia ajudar a perceber o grau com que se envolvem na atividade do jovem participante.

Foram também realizadas *entrevistas em profundidade* aos três participantes neste estudo, cuja finalidade era pôr a descoberto os processos usuais de resolução de problemas com tecnologias, na perspetiva dos jovens, tendo por base resoluções de problemas específicos que eles criaram e submeteram ao campeonato. Estas entrevistas em profundidade tinham suporte, tal como as anteriores, num conjunto de questões previamente estabelecidas tendo em conta as soluções produzidas por cada participante

(Anexo D, Anexo E, Anexo F), mas pretendiam recolher informação detalhada sobre a forma de pensar dos jovens e sobre as suas ações durante a resolução de um determinado problema. Deste modo, foi também utilizada a técnica denominada por ‘retrospetiva incitada’[23] e que, neste estudo, consistiu em apresentar o enunciado do problema e a resolução submetida pelo jovem (e outros documentos associados, caso existissem) e em solicitar-lhe para explicar como pensou durante a construção daquela solução, como procedeu, que ferramentas utilizou e em que momentos, ou com quem interagiu durante o processo. Deste modo, o guião delineado era meramente indicativo dos aspetos a focar ao longo da conversa, pelo que as questões a colocar no decurso da entrevista foram definidas no momento, consoante o relatar de pensamentos ou das decisões tomadas pelo jovem. Esta tentativa de reconstituição das ações do jovem e do pensamento matemático que desenvolveu tem também as suas limitações. Tal como sugeriu Yinger (1986), não é possível inferir se o jovem está mesmo a recordar e a explicitar o que foi efetivamente feito ou se está apenas a responder ao estímulo que está a ser incitado com a apresentação dos documentos e as questões focadas em determinados aspetos.

Pretendia que os dados assim recolhidos pudessem contribuir para uma descrição o mais completa possível da atividade de cada um dos jovens, bem como dos processos de pensamento matemático desenvolvido durante a resolução e a expressão das soluções com tecnologias. Saliento ainda que estas entrevistas se constituíram também como momentos para investigadora e participantes se conhecerem melhor e desenvolverem laços de confiança, o que poderia favorecer a fase seguinte de recolha de dados e que se ergueu sobre a atividade de resolução de um problema, com observação e vídeo gravação, de forma a minimizar a possibilidade de criação de uma atmosfera tensa.

Estas entrevistas foram áudio gravadas recorrendo ao programa *Audacity*[24] que é um *software* de gravação e edição de áudio multicanal, grátis e de código livre. O uso deste programa permitiu obter o áudio das entrevistas e melhorar a sua qualidade, sempre que oportuno, a fim de obter uma transcrição o mais fiel possível das falas dos

[23] Embora seja bastante comum em estudos no campo da psicologia, esta técnica tem sido usada em pesquisas em Educação Matemática com foco no desenvolvimento profissional do professor. Nesse contexto, a retrospetiva incitada (*stimulated recall*) desenvolve-se a partir da reflexão dos professores que é estimulada pelo visionamento de gravações vídeos das suas próprias práticas (e.g., Powell, Francisco e Maher, 2003). Busse e Borromeo Ferri (2003) fazem uma revisão bastante elucidativa desta técnica e explicam como a utilizaram nos seus estudos.

[24] http://www.audacityteam.org/

entrevistados, permitindo-me ainda a gravação das mesmas faixas em diferentes formatos. Os documentos textuais produzidos pelos participantes no decurso da entrevista em profundidade foram recolhidos e digitalizados.

Observação em Problemas Experimentais

A observação é uma técnica de recolha de dados qualitativos que permite captar "os comportamentos no momento em que eles se produzem e em si mesmos, sem a mediação de um documento ou um testemunho" (Quivy & Campendhoudt, 2008, p. 196), isto é, o investigador pode ter acesso direto aos processos que está a estudar no local em que decorrem (Patton, 2002). A observação permite recolher dados sobre diferentes aspetos do contexto em que atividade decorre (Morrison, 1993), nomeadamente, sobre o cenário físico (e.g., objetos em redor e organização), o cenário humano (e.g., os intervenientes e seus papéis), ou as interações que podem decorrer.

Uma vez que pretendia caracterizar a atividade de resolução de problemas com tecnologias de cada participante, observei essa atividade e os seus processos no ambiente natural em que ocorreram. Como a observação da atividade de resolução de um problema proposto na fase de apuramento do SUB14 poderia causar um *stress* desnecessário e interferir no desempenho do jovem no campeonato, optei por montar um dispositivo que o simulasse e, assim, desencadeasse de forma intencional e deliberada uma atividade o mais semelhante possível àquela que os jovens normalmente desenvolvem.

O estudo prévio testou precisamente uma forma de aceder a esta atividade. Em conformidade, optei por criar um pequeno conjunto de Problemas Experimentais e disponibilizá-los na página *web* do SUB14 para os participantes resolverem durante o período de observação. Os Problemas Experimentais deveriam ter características muito semelhantes aos problemas habituais do SUB14: teriam que ser problemas de palavras em que o contexto está completamente explanado no enunciado e a sua formulação é explícita, as suas soluções seriam únicas ou exatas e a sua resolução envolveria o desenvolvimento de uma forma produtiva de pensar, combinando técnicas, algoritmos conhecidos. Inspirei-me em problemas colocados em Fases Finais anteriores do SUB14, pelo que o seu sigilo garantia que os participantes não contactaram com eles de antemão. Decidi publicar três Problemas Experimentais (Anexo I), distintos sobretudo ao nível dos conceitos matemáticos envolvidos, de forma a permitir que cada jovem selecionasse apenas um para resolver simulando, o mais próximo possível, os processos e as ações em que se envolve quando está a resolver um problema do SUB14. Pretendia, simultaneamente, explorar o que motiva essa seleção para assim aceder às suas primeiras impressões sobre os problemas, e minimizar o *stress* desta etapa o que amplia as possibilidades de a atividade efetivamente decorrer. A publicação dos problemas na página do SUB14 ficou a cargo da equipa que presta apoio técnico à Organização.

A observação desta atividade foi pouco estruturada (Cohen, Manion & Morrison, 2005) no sentido em que, à data da sua realização, o quadro de análise dos processos de resolução de problemas com tecnologias estava ainda numa fase muito inicial e pouco definida. Assim, esta observação procurou captar o máximo de informações relativas aos cenários físicos, humanos e interações, ações e gestos, sem qualquer decisão prévia sobre os seus significados, embora procurando captar ou aprofundar tudo o que possa ser relevante para compreender a atividade de resolução de problemas com tecnologias à luz das grandes linhas teóricas orientadoras, nomeadamente, (i) perspetivar a resolução de problemas enquanto desenvolvimento de formas produtivas de pensamento matemático, ii) considerar que resolver problemas e exprimir soluções são duas faces do mesmo fenómeno, e iii) assumir a interação de natureza simbiótica entre os jovens e as tecnologias que leva a considerar a unidade humanos-com-media.

Em conjugação com a observação da atividade, recorri também ao método comumente conhecido por 'pensar em voz alta', que tem sido usado por inúmeros investigadores no campo da resolução de problemas de matemática há várias décadas (e.g., Kilpatrick, 1968; Kantowski, 1977; Goos & Galbraith, 1996; Lester,1989) e que surge associado com a realização de entrevistas em profundidade. Este protocolo é aceite como uma forma de obter acesso aos processos de pensamento dos indivíduos (Pugalee, 2004), pelo que, neste estudo, consistiu em solicitar ao participante que, à medida que vai realizando esforços para resolver o problema, verbalize todos os seus pensamentos. Enquanto Lester (1989) alertava para o facto de alguns alunos sentirem que o falar alto durante a resolução de um problema não era natural e pareciam ficar perturbados, Pugalee (2004) apontava, com base em vários estudos anteriores, que parece não existir diferença nas etapas específicas seguidas quando se resolve uma tarefa em silêncio ou quando se verbaliza o que se pensa durante a resolução da tarefa.

A atividade de resolução de problemas de cada participante foi vídeo-gravada com recurso a uma câmara de vídeo, com suporte em tripé, suficientemente afastada para permitir um espaço de trabalho confortável ao jovem, mas com *zoom* ajustado de forma a permitir focar a totalidade do ambiente de trabalho, isto é, não só o jovem como a secretária ou mesa com o material de escrita e o computador. Em certos momentos, ampliei o *zoom* para focar o trabalho com papel e lápis, os ecrãs ou as interações com a tecnologia, por exemplo. Estes dados foram complementados com gravações vídeo dos ecrãs dos computadores dos participantes com recurso ao programa *CamStudio Recorder*[25] que, mediante autorização dos pais, foi instalado nos seus computadores. Este programa, que permite a vídeo-gravação de uma parte ou da totalidade do ecrã, foi escolhido por ser também de acesso e distribuição livre e ser de uso bastante simples. No final da experiência, transferi os ficheiros produzidos do computador dos participantes para um disco externo.

Bogdan e Biklen (1994) referiram que, após "cada observação, entrevista ou outra sessão de investigação, é típico que o investigador escreva . . . o que aconteceu" (p. 150). As notas de campo são, assim, um importante registo que complementa os outros métodos de recolha de dados pois nelas o investigador relata "ideias, estratégias, reflexões e palpites, bem como padrões que emergem" (p. 150). Embora, nesta fase do estudo, a atividade tenha sido gravada em formato vídeo e áudio, as notas de campo podem constituir-se como uma forma de registo de informações a que terei acesso e que não são captadas nesse áudio ou vídeo, nomeadamente, as que provêm das conversas informais com as famílias. Estas notas de campo foram registadas em formato áudio (mp3).

A Tabela 4.1 organiza os métodos de recolha de dados utilizados, bem como os formatos desses dados, e a utilidade que lhes foi dada para obter respostas a cada uma das três questões de investigação: Q1) Como se carateriza, enquanto sistema de atividade, a resolução de problemas de matemática de jovens participantes numa competição baseada na Internet?; Q2) como se (re)configura a resolução de problemas de matemática quando os jovens recorrem, de forma espontânea, ao uso de ferramentas tecnológicas?; e Q3) de que forma a capacidade de resolver problemas de matemática e exprimir as suas soluções pode ser entendida a partir da relação dos jovens com as tecnologias?

[25] http://camstudio.org/

Tabela 4.1. Métodos de recolha e dados que confluem em cada questão de investigação

<table>
<tr><th>Métodos / Formato dos dados</th><th colspan="3">Questões</th></tr>
<tr><td>Recolha documental
– Ficheiros com resoluções submetidas na fase de apuramento
– Correspondência eletrónica trocada com a equipa do SUB14</td><td rowspan="5">Q1</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="6">Q3</td></tr>
<tr><td>Contactos informais
– Notas de campo</td></tr>
<tr><td>Entrevistas semiestruturadas participantes
– Áudio-gravação dos diálogos
– Notas de campo</td></tr>
<tr><td>Entrevistas semiestruturadas pais
– Áudio-gravação dos diálogos
– Notas de campo</td></tr>
<tr><td>Entrevistas em profundidade / Retrospetiva incitada
– Documentos produzidos na reconstituição das soluções
– Áudio-gravação dos diálogos
– Notas de campo</td><td rowspan="2">Q2</td></tr>
<tr><td>Observação direta da atividade / Protocolo pensar em voz alta
– Documentos produzidos durante a atividade
– Resolução e ficheiros submetidos para o SUB14
– Vídeo-gravação da atividade
– Vídeo-gravação dos ecrãs do computador
– Notas de campo</td><td></td></tr>
</table>

4.7.2 Processo de recolha de dados

Nesta subsecção descrevo o processo de recolha de dados, na ordem pela qual decorreu, distinguindo entre quatro momentos cruciais e apresentando os métodos utilizados, os intervenientes, a duração e o local de recolha, bem como o propósito que subsistiu a cada um em termos da abordagem metodológica e das questões de investigação definidas. Uma síntese esquemática desta descrição pode ser encontrada na Figura 4.15.

Posteriormente à seleção dos jovens participantes, solicitei à equipa do SUB14 o envio de uma mensagem eletrónica com um convite para participar neste estudo e explicando sumariamente o que o motivava, pedindo ainda um contacto telefónico do encarregado de educação a fim de explicar com mais detalhes o âmbito e os propósitos da pesquisa. Após receção do *e-mail*, os jovens enviaram os contactos solicitados pelo que a primeira conversa com os encarregados de educação foi realizada telefonicamente. Nesse contacto, expliquei o principal objetivo do estudo, as fases que previsivelmente as compõem e os métodos de recolha de dados a usar. Mediante o acordo dos encarregados de educação, agendámos o primeiro encontro presencial.

O primeiro encontro – uma conversa e um café

Conforme agendei com cada encarregado de educação, o primeiro encontro decorreu num local público próximo das suas residências. Na presença dos jovens participantes, e de outros familiares próximos nos casos de Marco e Beatriz, expliquei o objetivo deste trabalho de investigação e em que consiste a recolha de dados, para obter o consentimento escrito dos responsáveis mediante o preenchimento e assinatura da declaração de autorização da participação de cada jovem no estudo. Este momento serviu ainda para trocarmos algumas impressões sobre o SUB14, a relação dos jovens com a matemática escolar e com as tecnologias, e para satisfazer alguma curiosidade inicial sobre o que motiva uma professora de matemática a fazer investigação.

Estas conversas decorreram entre abril e maio de 2012, consoante as disponibilidades acordadas, e tiveram a duração aproximada de 1h30. Para além de recolher as declarações de autorização de participação, criei notas de campo com impressões iniciais, preocupações expressas e outras informações trocadas sobre os participantes que me pareceram revelantes, em formato áudio (mp3). Agendei com os participantes e familiares a etapa seguinte da recolha de dados.

O segundo encontro – o relato da atividade

O encontro seguinte decorreu na residência de cada participante e contou com a realização das entrevistas semiestruturadas aos participantes e aos seus encarregados de educação, tendo por base os guiões delineados (Anexo B e Anexo C). Estas entrevistas foram realizadas com a presença dos pais e do participante no mesmo espaço, pelo que uns acabaram por intervir nas entrevistas dos outros, o que fez diminuir a formalidade da entrevista, passando a ser uma conversa entre os vários intervenientes. Houve momentos em que a conversa acabou por divergir do programado, consoante os tópicos ou preocupações levantadas pelos entrevistados, pelo que as questões gerais definidas no guião ajudaram a voltar aos assuntos programados. Estas entrevistas variaram entre 1h30 a 2h30, sendo que no caso de Marco a família recebeu-me com um lanche.

Num segundo momento deste encontro procedi à recolha de dados através da entrevista em profundidade a cada participante, focada na resolução de um ou mais problemas anteriormente submetidos pelo próprio ao SUB14. Utilizando a técnica da retrospetiva incitada, solicitei a cada jovem que procurasse recordar-se de como abordou determinado problema que escolhi previamente, mostrando a solução impressa e o ficheiro digital em que foi submetida. A partir de um guião inicialmente definido (Anexo D, Anexo E, Anexo F), coloquei questões focadas em determinados aspetos das soluções de forma a obter do participante uma descrição detalhada do processo de resolução que desenvolveu, do pensamento matemático envolvido, do papel da tecnologia utilizada e de outros possíveis intervenientes. Estas entrevistas foram áudio-gravadas e foram também recolhidos todos os documentos produzidos pelos participantes no decurso desta etapa, nomeadamente, registos em papel e lápis com reconstituições das soluções em análise.

O terceiro encontro – estreitar laços

Uma vez que os três participantes neste estudo foram apurados para a Fase Final do SUB14, proporcionou-se um terceiro encontro entre investigadora, cada participante e seus familiares mais próximos. O encontro decorreu na Universidade do Algarve, após a realização da prova final e enquanto o júri procedeu à classificação das provas. Para além das conversas informais com os pais, pude também conversar com cada participante sobre as soluções que desenvolveram para os problemas da Final. Apesar de este encontro não ter fornecido dados concretos para a compreensão da atividade de resolução de problemas com tecnologias, foi um momento relevante para a consecução deste estudo na medida em que serviu para estreitar laços com os intervenientes, que considero importantes para a etapa seguinte, e também para consolidar a legitimidade do papel da investigadora e do próprio estudo. Destes encontros foram produzidas notas de campo.

O quarto encontro – a observação da atividade

O quarto encontro decorreu em setembro de 2012 nas residências dos participantes Marco e Beatriz, já que a encarregada de educação de Jéssica solicitou a desistência do estudo nesta etapa, mas autorizou a utilização dos dados recolhidos para os fins a que se destinavam. Os jovens estavam desvinculados do SUB14 dado que tinham transitado para o 9.º ano de escolaridade. Cada um destes encontros teve entre 3h a 4h de duração.

Em cada caso, foi montado o dispositivo de recolha de dados (áudio e vídeo gravação e a gravação de ecrãs) e foram dadas algumas indicações aos participantes. Comecei por indicar o local da página do SUB14 onde se encontravam publicados três problemas designados por “Problemas Experimentais”, solicitando que escolhessem um desses problemas para resolver. Em seguida, pedi a cada participante que explicitasse os motivos que o/a levaram a selecionar um daqueles problemas. Posteriormente, e apesar de já o ter referido, voltei a pedir-lhes que tentassem resolver o problema da forma que mais se aproximasse à resolução de um dos problemas da competição.

> Investigadora: Ok, então se isto fosse para o campeonato como é que tu, o que é que farias a seguir? Imagina que tens que enviar a resolução, como é que farias? [Excerto da entrevista a Marco]

Reforcei a ideia de que o que me interessava era perceber como eles pensam e o que fazem para tentar resolver o problema, desligando esta experiência da necessidade de obtenção de uma resposta correta. Para isso, seria importante que verbalizassem tudo aquilo em que estivessem a pensar à medida que resolvem o problema. Ao longo da atividade, houve momentos de silêncio que quebravam o protocolo "pensar em voz alta", e que me levaram a intervir com questões do tipo "em que estás a pensar agora?", "estás a sentir alguma dificuldade?", "que caminho pensas seguir?". Perante uma dificuldade interpelei os jovens com questões do tipo "o que farias numa situação destas, se estivesses no SUB14?" ou "já te deparaste com uma dificuldade semelhante no SUB14?", a fim de ajudar ao desbloqueio. No final, solicitei-lhes que submetessem a sua solução ao SUB14 como habitualmente fizeram na fase de apuramento. Após o envio da solução, pedi-lhes ainda que recapitulassem a sua resolução, ou seja, que reconstruíssem o processo que seguiram. Para além das gravações áudio e vídeo da atividade dos participantes, e dos ficheiros com as gravações vídeo dos seus ecrãs de computador, registei também alguns aspetos mais marcantes da observação em notas de campo em formato mp3.

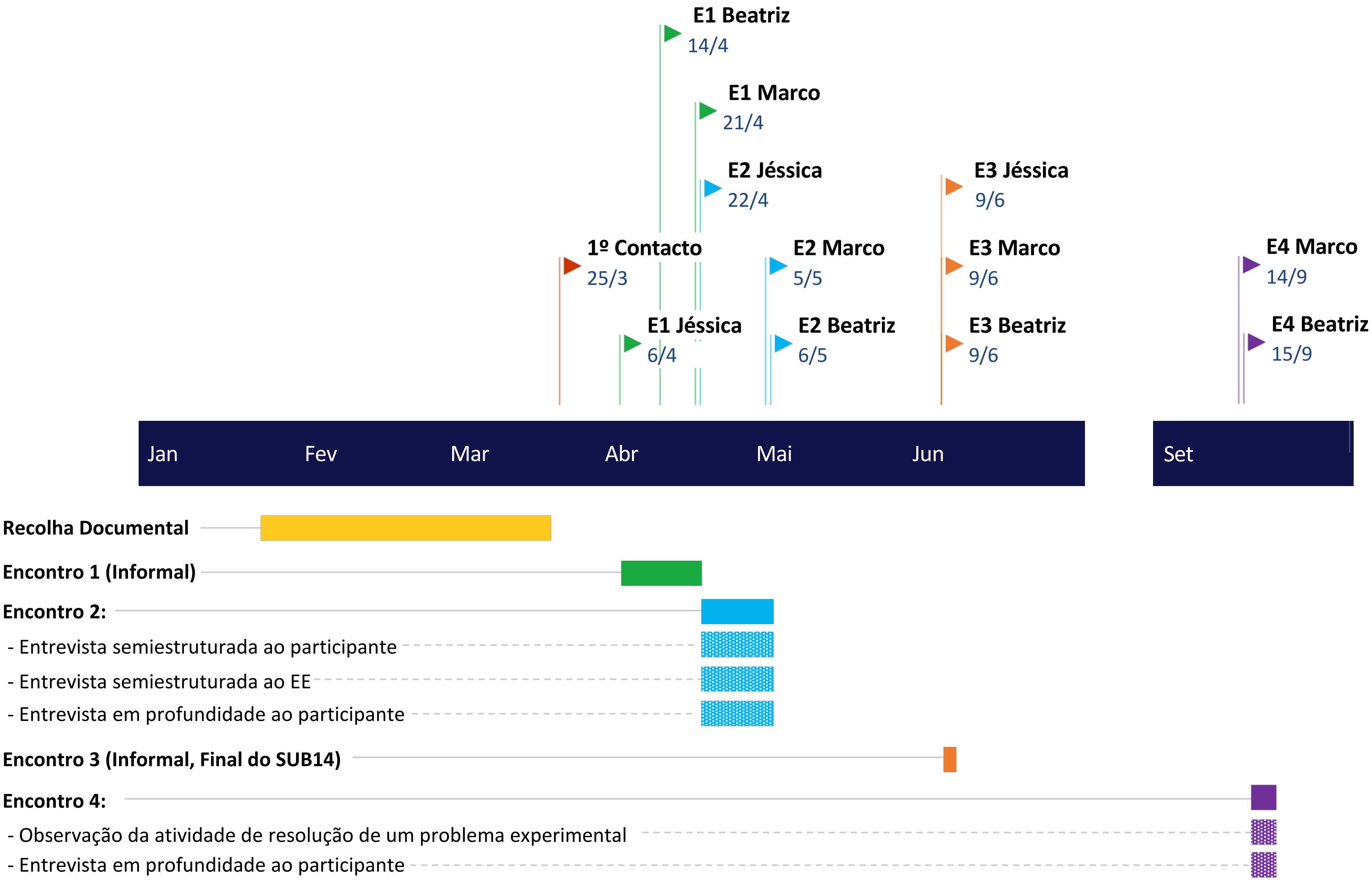


Figura 4.15. Esquema do processo de recolha de dados

4.8 Processo de análise de dados

"A análise de dados em investigação qualitativa tem sido algo parecido a uma misteriosa metamorfose. O investigador retira-se com os dados, aplica os seus poderes analíticos, e emerge com os 'resultados', qual borboleta" (Merriam, 1998, p. 156). A análise de dados qualitativos ocorre segundo um processo que é descritivo e intuitivo, mas em que se 'aprende ao fazer-se' (Brown, 2008). Nas próximas secções descrevo os processos seguidos na transformação dos dados coligidos em resultados, isto é, a forma como os dados foram tratados e convertidos em informações passíveis de proporcionar respostas às questões de investigação, de modo a permitir compreender a atividade de resolução de problemas com tecnologias desenvolvida no âmbito do campeonato extraescolar SUB14.

4.8.1 Organização e tratamento dos dados recolhidos

À medida que a recolha de dados foi decorrendo, os documentos físicos e os digitais foram armazenados em pastas digitais e, em seguida, foram importados para o programa NVivo e aí foram organizados e tratados. Criei um sistema de catalogação de pastas associadas a cada participante (Beatriz, Jéssica e Marco) e uma outra para armazenar as notas de campo (Figura 4.16). Criei ainda um sistema de subpastas referentes às resoluções submetidas pelos participantes nas edições 2010/2011 e 2011/2012 do SUB14 e trocas de correspondência eletrónica, bem como os dados recolhidos em cada um dos encontros (Encontro 1, Encontro 2, Encontro 3 e Encontro 4). A versão do programa que utilizei nas fases iniciais do trabalho de organização, tratamento e análise dos dados não permitia importar todos os tipos de ficheiros com dados de que dispunha, pelo que optei por criar imagens digitais das resoluções produzidas em folhas de cálculo ou em ambientes de geometria dinâmica. A análise que incidiu nessas resoluções foi feita com base nos documentos originais, armazenados em pastas exteriores ao NVivo.

Em seguida, procedi à transcrição de todos os ficheiros áudio das entrevistas referentes aos primeiros encontros e, mais tarde, à transcrição dos ficheiros de vídeo gravados aquando do último encontro em que decorreu a observação da resolução de um problema experimental. Em relação aos ficheiros de vídeo que contêm as gravações de ecrãs dos computadores de cada participante, optei por incluir também breves narrações do que estava a decorrer em associação com a transcrição das minhas falas e das do participante a resolver o problema. As notas de campo foram organizadas consoante o participante e o encontro a que dizem respeito; apesar de não terem sido transcritas na totalidade, foi feito uma síntese dos assuntos que abordei em determinado intervalo de tempo de forma a identificar facilmente aspetos gerais que pudessem ter utilidade.

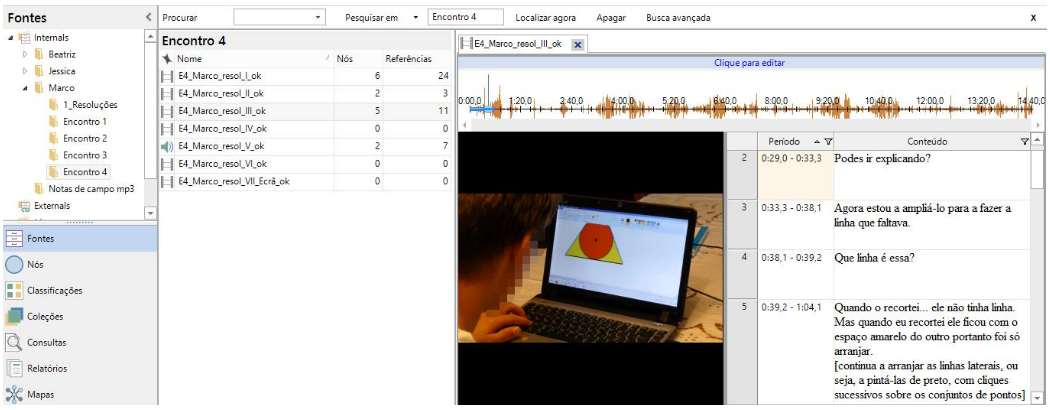


Figura 4.16. Sistema de catalogação de dados no NVivo

4.8.2 Análise dos dados

Ao longo do processo de análise dos dados assumi uma perspetiva interpretativa, em que tomei como ponto de partida elementos descritivos do fenómeno, provenientes das diversas fontes coligidas, para compor uma caracterização da atividade segundo uma visão panorâmica mas que é informada pelas noções teóricas do quadro conceptual.

Tal como previsto (Capítulo 3, Secção 3.5), a análise veio a desenrolar-se em três patamares, cada qual com foco: i) no sistema de atividade; ii) nos processos de resolução de problemas com tecnologias; e iii) na fluência tecno-matemática de cada um dos participantes. Na verdade, estes patamares e a sua correspondente associação com as questões de investigação e as noções que compõem o quadro conceptual só assumiram a presente formulação a partir do trabalho de análise em torno do caso de Jéssica.

O caso de Jéssica como balão de ensaio

Este caso foi o primeiro a ser dissecado e analisado tendo por base um referencial teórico em constante construção e que, por isso, teve diferentes componentes ao longo do tempo, e foi apresentando diferentes formatos. Contudo, e enquanto procurava uma forma de abordar e descrever os processos de resolução de problemas com tecnologias em que tanto os aspetos matemáticos como os aspetos tecnológicos fossem realçados, a espinha dorsal desta investigação manteve-se relativamente estável devido a um conjunto de noções teóricas que sempre a nortearam. Refiro-me especificamente à perspetiva que permite encarar estes indivíduos na sua simbiose com as ferramentas tecnológicas que preferem usar para abordar os problemas, a noção de humanos-com-media; à conceção de que resolver um problema e exprimir a sua solução são processos de matematização indissociáveis; e que a fluência tecno-matemática destes jovens-com-media, emergente da sua atividade de resolução-e-expressão de problemas, está associada à sua capacidade de percecionar as *affordances* de uma ferramenta que são úteis para desenvolver uma abordagem matemática eficaz na procura de uma solução.

Assim, este caso funcionou como um balão de ensaio que apoiou o desenvolvimento de parte do quadro de análise, mais concretamente, do modelo de resolução de problemas de matemática com tecnologias (RPMT). Procurei, deste modo, estabelecer um diálogo constante entre o quadro conceptual e os dados referentes à participante Jéssica que permitiram sintetizar o modelo que apresentei na Secção 3.3.3. Muito em particular, identifico dois momentos de grandes avanços: i) a partir da análise de dados que apresentei no congresso internacional CERME 9 surgiram algumas oportunidades para reformular o modelo, aglutinando uns processos ou dividindo outros (Jacinto & Carreira, 2015); e ii) a partir da escrita de um artigo e do processo de revisão a que foi sujeito alinharam-se os vários componentes do quadro teórico, clarificou-se o papel do modelo de RPMT bem como o do conceito de fluência tecno-matemática, e aprofundou-se a análise dos dados desta participante de forma a fazer emergir as relações entre os aspetos matemáticos e os tecnológicos nos seus processos de resolução-e-expressão dos problemas (Jacinto & Carreira, 2016a).

A estrutura dos casos

O processo de operacionalização do quadro conceptual foi sumariamente apresentado no capítulo anterior, no qual explicitei os conceitos chave que suportam a análise de dados em cada um dos três patamares definidos e de que forma se relacionam entre si. Pretendo agora clarificar os processos metodológicos que conduzem à estrutura que sustenta tanto o caso de Jéssica-com-ferramentas-de geometria, como os de Marco-com-ferramentas-de-visualização e Beatriz-com-ferramentas-de-expressividade.

Para cada caso, a atividade usual de resolução de problemas com tecnologias foi caracterizada com base na teia de noções que compõem um sistema de atividade, de acordo com a conceptualização de Engeström (1987). Neste patamar, a análise reportou-se aos dados recolhidos por via das entrevistas semiestruturadas aos participantes e seus encarregados de educação e pela via documental, como as resoluções submetidas ao SUB14 e as trocas de correspondência eletrónica. A análise incidiu especificamente sobre: i) as relações de cada jovem com a comunidade, ii) as regras de participação percecionadas; iii) o papel que a sua tecnologia de eleição desempenha; e iv) a divisão de trabalho entre os membros da comunidade. Estes aspetos guiaram a análise dos dados em busca de uma caracterização holística da resolução de problemas de matemática no âmbito do SUB14 enquanto sistema de atividade.

Em seguida, já no segundo patamar, debrucei-me na análise dos processos de resolução de problemas de matemática com tecnologias, recorrendo ao modelo RPMT sintetizado no quadro conceptual. A descrição e interpretação desses processos tem por base as resoluções produzidas e submetidas pelos participantes na fase de apuramento do SUB14, complementadas com dados recolhidos através das entrevistas em profundidade, com recurso à técnica da retrospetiva incitada, bem como os dados recolhidos durante a observação da atividade de resolução de um problema experimental. Em cada caso, a descrição foi organizada a partir de aspetos críticos de cada solução e a interpretação é guiada pelos processos do modelo RPMT. Esta análise permitiu uma primeira compreensão dos aspetos que caracterizam os processos usuais de resolução de problemas com tecnologias destes participantes, o que irá criou a oportunidade para discutir de que forma o recurso espontâneo a essas tecnologias reconfigura a sua própria atividade.

O terceiro patamar de análise, informado pelo conhecimento sintetizado nos patamares anteriores sobre a atividade e os processos envolvidos, pretendia conhecer a natureza da capacidade de resolver problemas e exprimir as suas soluções, muito concretamente, em termos da relação desenvolvida entre os participantes e as tecnologias que escolhem utilizar nessa atividade. A caracterização da fluência tecno-matemática de cada participante teve por base o conjunto global de dados recolhidos, e assentou na identificação dos aspetos que revelam o reconhecimento de *affordances* de uma dada tecnologia durante o desenvolvimento de modelos conceptuais para resolver-e-exprimir as soluções dos problemas matemáticos. Igualmente relevante para esta análise de dados foi a inclusão de aspetos específicos do pensamento matemático que eram trazidos à atividade por terem uma ligação estreita quer com a tipologia do problema, quer com a ferramenta tecnológica utilizada pelo que, no capítulo seguinte, além de fazer uma apresentação dos problemas resolvidos pelos participantes, incluo também algumas noções teóricas suplementares.

Cada uma destas etapas de análise de dados iniciou-se com uma leitura atenta dos vários tipos de documentos que as subsidiam. A leitura dos documentos que contêm soluções de problemas visou reconstituir os processos de resolução dos problemas a partir das explicações produzidas pelos participantes, em que procurei um posicionamento próximo do seu ponto de vista, identificando aspetos do pensamento matemático desenvolvido de forma explícita ou procurando compreender possíveis evidências que não se traduzem de forma explícita nas resoluções. Da mesma forma, a leitura da correspondência trocada permitiu compreender algumas dimensões da relação estabelecida entre os participantes e a organização do SUB14.

Bem mais intrincada foi a análise dos dados recolhidos através das várias entrevistas e da observação com o propósito de reconstituir a atividade, motivo que levou a optar pela utilização do *software* NVivo. O facto de ter procedido às transcrições das conversas e depoimentos nos vários encontros facilitou a incursão por estes dados. Na análise da atividade observada, a leitura das transcrições lado-a-lado com a janela de vídeo foi fundamental para melhor compreender as ações pois tenho por base o que o jovem diz e também o que faz. A partir daqui, tornou-se possível selecionar os trechos dos dados a codificar através da seleção de uma unidade mínima de texto e da aplicação da categoria a que dizia respeito. A codificação assentou num conjunto de 'nós' previamente definidos tendo em conta as categorias de análise.

Por exemplo, a criação de 'nós' correspondentes às designações dos processos que integram o modelo RPMT permitiu codificar segmentos de falas ou de descrições de ações ou gestos de cada participante, identificando processos e sequências de processos nas resoluções, nos depoimentos e reconstituições, e nos diálogos durante a observação. Esta codificação assentou no estabelecimento de uma correspondência entre a descrição de cada processo que compõe o modelo, sintetizada teoricamente, e o discurso ou as ações que constam dos dados.

A organização visual do esquema de codificação foi outra potencialidade considerada no NVivo, já que poderia abrir caminho para uma conjetura sobre a forma como estes processos se sucedem em cada atividade. Na Figura 4.17 apresento um excerto do trabalho realizado com o NVivo[26], que aqui diz respeito à codificação de trechos de

[26] Apesar de a organização, o tratamento e a análise terem sido executados no programa NVivo10, essa licença expirou e o software foi atualizado, pelo que esta imagem foi produzida com o NVivo11.

dados (transcrição de áudio e vídeo) que reportam evidências do processo ‘integrar’ desenvolvido por Marco a resolver um problema. Posteriormente, a comparação de trechos incluídos num mesmo nó nas várias atividades analisadas (do mesmo participante e entre participantes diferentes) permitiu perceber se é possível completar a descrição de cada processo com base nestas evidências.

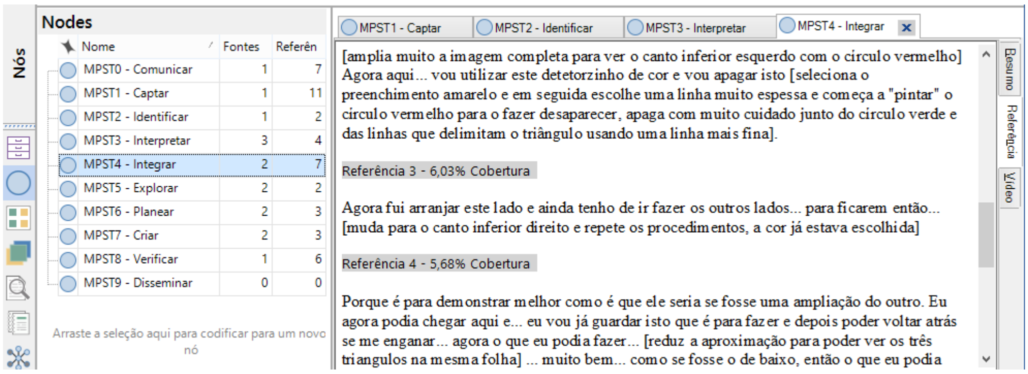


Figura 4.17. Excerto da codificação de dados no NVivo

Um outro aspeto que importa clarificar prende-se com a análise dos ficheiros produzidos com o ambiente de geometria dinâmica GeoGebra, dado que este programa inclui uma ferramenta de grande relevância na análise: o designado ‘Protocolo de Construção’. Esta ferramenta facultou o acesso à atividade que os participantes desenvolveram no GeoGebra durante a elaboração das construções, permitindo uma descrição passo-a-passo das suas interações com o programa. O Protocolo de Construção não permite captar outros processos cognitivos (e.g., conjeturas ou cálculos mentais) nem outros procedimentos que possam ter sido usados (e.g., papel-e-lápis ou outra tecnologia). Não obstante, possibilitou observar a ordem de construção dos objetos incluídos em cada solução, pelo que é sobre esses procedimentos e no reconhecimento da sua pertinência e adequação para a obtenção da solução de cada problema que se debruçam as análises que tiverem por base soluções elaboradas e submetidas no formato GeoGebra.

Concluindo, mantendo um posicionamento interpretativo sobre os dados empíricos e a sua análise, procurei elaborar um retrato compreensivo e globalizante da atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias, que decorre no contexto de uma competição *online* extraescolar, combinando as perspetivas dos sujeitos que nela são atores, com a análise das suas produções e da atividade observada, e ainda com a minha perspetiva sobre este fenómeno informada pelo quadro conceptual delineado.

5

Os Problemas Propostos

If I had an hour to solve a problem and my life depended on the solution,
I would spend the first 55 minutes determining the proper question to ask, for once I know
the proper question, I could solve the problem in less than five minutes.

(atribuído a Einstein[27])

Preâmbulo

A Resolução de Problemas é um campo de estudo bem circunscrito e que goza de uma certa autonomia em relação aos domínios matemáticos sobre os quais a Didática da Matemática se debruça habitualmente. Apesar de a investigação em resolução de problemas se poder focar num conjunto de processos ou nas capacidades que são consideradas transversais a esses domínios, cada problema encerra conhecimentos matemáticos específicos e, consequentemente, pode fazer emergir tipos de pensamento matemático igualmente específicos, que importa conhecer com algum detalhe. Com esta questão em mente, senti necessidade de incluir um capítulo autónomo em que não só destacasse os problemas matemáticos que foram resolvidos pelos participantes neste estudo, como me permitisse discutir alguns conceitos com foco em diferentes tipos de pensamento matemático catalisado por estes problemas, que não cabem naturalmente nem na revisão da literatura, nem na discussão que conduziu à construção do quadro conceptual.

Nas secções seguintes: i) explico de forma sucinta o processo de criação dos problemas colocados no Campeonato SUB14; ii) apresento com maior detalhe os

---

27 https://www.linkedin.com/pulse/20140609042202-59384553-3-things-about-problem-solving-which-albert-einstein-teaches-us.

problemas resolvidos com tecnologias pelos participantes neste estudo, embora as soluções produzidas sejam apenas abordadas em profundidade na secção de análise de dados, e incluo uma descrição de uma abordagem convencional a cada um desses problemas; e por fim iii) discuto alguns aspetos do pensamento matemático que está associado ao processo de resolução destes problemas, nomeadamente, a capacidade de *visualização*, o *pensamento geométrico* e sua relação com a utilização de ambientes de geometria dinâmica, e o *pensamento covariacional* também considerando o recurso a tecnologias. A expressão 'pensamento matemático' é utilizada com um sentido bastante amplo, em linha tanto com os argumentos de Stacey (2007) como com os que estão patentes em diversos documentos norteadores dos estudos PISA. O pensamento matemático que é usado na resolução de problemas inclui componentes como o raciocínio matemático, a modelação ou o estabelecimento de conexões entre conceitos (Stacey, 2007). Esta ideia vai ainda ao encontro do trabalho desenvolvido na década de 80 por Mason, Burton e Stacey (1982) em que os autores identificaram quatro processos característicos do pensamento matemático na resolução de problemas: a especialização (experimentar casos especiais), a generalização (procurar padrões e relações), a formulação de conjeturas (prever relações e resultados), e a persuasão (encontrar e comunicar razões que justificam algo). A existência destes traços nas soluções digitais dos participantes do SUB14 também suportam esta opção por discutir com alguma profundidade aspetos do pensamento matemático desenvolvido especificamente em cada tipo de problema.

5.1 Como surgem os problemas do SUB14

A manutenção da regularidade do lançamento de novos problemas quinzenais no SUB14 levou à criação de uma bolsa de potenciais problemas para serem disponibilizados na fase de apuramento. O apelo é lançado pela equipa responsável pelo Campeonato a um conjunto de colaboradores deste projeto e que é composta por professores de matemática do 2.º e do 3.º ciclos, e docentes universitários do Departamento de Matemática da FCT da Universidade do Algarve (de entre os quais, alguns são matemáticos e outros são educadores matemáticos).

O número de problemas colocado nesta fase do Campeonato, inicialmente 12, sofreu alterações ao longo das várias edições em virtude de ajustes aos calendários escolares e de solicitações por parte dos participantes e suas famílias, e também dos professores e das escolas que passaram a incluir a participação no SUB14 nos seus Planos Anuais de Atividades (sobretudo as escolas algarvias). Durante o período de recolha de dados para esta investigação, a fase de apuramento do SUB14 foi composta por 10 problemas, cada um lançado quinzenalmente entre Janeiro e Maio de cada ano.

A equipa envolvida na realização do SUB14 tem como uma das tarefas propor enunciados que possam ser resolvidos por alunos que frequentem quer o 7.º quer o 8.º ano de escolaridade, sem preocupação de estarem alinhados com a sequência programática da disciplina de matemática. Por exemplo, uma das preocupações costuma ser a de não incluir problemas em que seja necessário recorrer ao Teorema de Pitágoras pois não estaria ao alcance dos alunos de 7.º ano. De um modo geral, em termos dos conceitos matemáticos que poderão envolver, estes problemas podem ser de raciocínio lógico, ter carácter numérico ou algébrico ou ainda geométrico (Secção 1.3.2). Cada colaborador sugere um ou mais problemas e uma proposta para a sua resolução, de preferência, prevendo diferentes abordagens que os concorrentes poderão seguir. A equipa analisa então os vários problemas e seleciona os que o consenso ditar que são mais adequados, tendo por base ainda o grau de dificuldade e o momento da fase de apuramento em que serão lançados.

Na secção que se segue farei uma breve descrição de uma abordagem convencional a uma seleção de problemas propostos no SUB14 e aos Problemas Experimentais propostos aos participantes neste estudo. Cada um destes problemas foi resolvido pelos participantes com recurso a algum tipo de ferramenta tecnológica, pelo que as suas soluções serão incluídas adiante nos capítulos de dados para uma análise aprofundada mediante os conceitos teóricos debatidos e o modelo de Resolução de Problemas de Matemática com Tecnologias desenvolvido. Entendo ser oportuno registar uma possível abordagem a estes problemas dado que, nalguns casos, os problemas que os participantes resolveram são os mesmos, mas esta opção serve também o propósito de não sobrecarregar nem perder o foco nos capítulos de análise de dados.

Na última secção deste capítulo trarei à discussão mais algumas ferramentas teóricas que estão relacionadas com o tipo de pensamento matemático que cada problema pode desencadear. Esta discussão não foi incluída no quadro conceptual por ser, de certa forma secundária relativamente ao objeto de estudo. Todavia, creio que uma análise da atividade de resolução de problemas com tecnologias pode ser reforçada com os aspetos específicos do pensamento matemático subjacente aos conceitos ou capacidades que um problema em concreto encerra.

5.2 Os problemas propostos

5.2.1 Motivo decorativo

Este problema foi proposto na fase experimental deste estudo, conforme se explicou na secção da Metodologia. A situação problemática consiste em determinar o comprimento do raio de cada círculo menor, sabendo-se que o triângulo envolvente é equilátero e tem 12 cm de altura, e que todos os círculos são tangentes entre si, dois a dois, e ao triângulo. A solução pode ser obtida por vários processos, sendo que o recurso a noções de trigonometria é uma das possibilidades que estará fora do alcance imediato dos jovens participantes no SUB14 que frequentam o 7.º ou o 8.º ano de escolaridade.

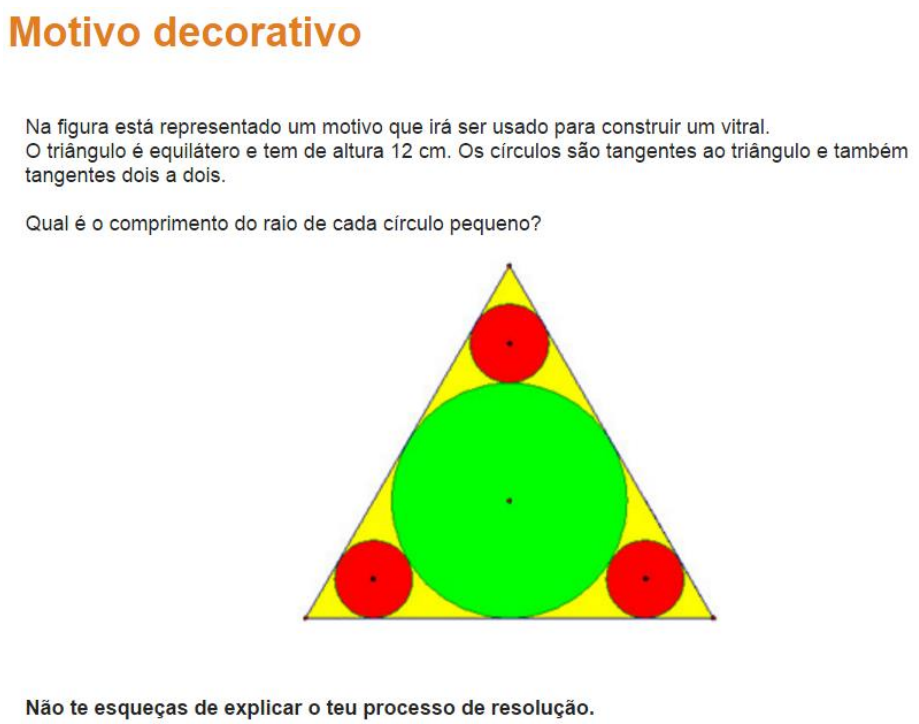


Figura 5.1. Enunciado do Problema Experimental 2, proposto em 2012/2013

Considere-se b como a medida da base do triângulo equilátero; x o raio do círculo verde (maior); e y o comprimento do segmento que une o vértice superior do triângulo equilátero ao ponto de tangência do círculo vermelho (menor) superior com o círculo verde. A área do triângulo equilátero é dada por $A_T = \frac{b\times 12}{2} \Leftrightarrow A_T = 6b$.

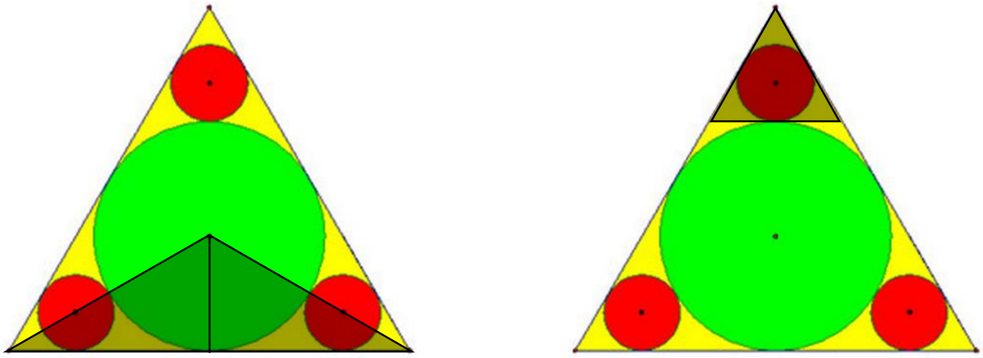


Figura 5.2 - Etapas da resolução do problema. À esquerda assinala-se um triângulo isósceles, à direita assinala-se um triângulo equilátero no topo.

Considere-se agora o triângulo isósceles representado na parte inferior do triângulo equilátero (Figura 5.2, à esquerda) cujas bases são coincidentes e cujo vértice superior coincide com o centro do círculo maior. Dado que este círculo está inscrito no triângulo, o seu centro corresponde ao baricentro do triângulo equilátero e, então, em relação à área do triângulo isósceles é possível afirmar que $A_t = \frac{A_T}{3} \Leftrightarrow \frac{b\times x}{2} = \frac{6\times b}{3}$, de onde se obtém que $x = 4$.

Portanto, como a altura do triângulo equilátero é $12\ cm$ e o diâmetro do círculo verde é $8\ cm$, é possível concluir que $y = 4\ cm$. Ao considerar a divisão do triângulo equilátero por uma linha paralela à base que passa pelo ponto de tangência dos círculos verde e vermelho superior (Figura 5.2, à direita), obtém-se outro triângulo equilátero. Este novo triângulo é semelhante ao maior pois ambos possuem três ângulos de igual amplitude (um ângulo é comum e os dois ângulos formados na base são iguais já que possuem lados paralelos). Desta forma é possível estabelecer uma proporção entre a altura de cada triângulo e o raio do círculo maior inscrito em cada triângulo: $\frac{12}{4} = \frac{4}{x}$. Daqui se obtém que o raio do círculo menor é $\frac{4}{3}\ cm$.

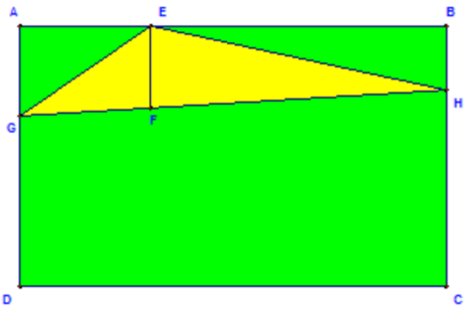
5.2.2 A marcação do canteiro

O problema “A marcação do canteiro” foi proposto na edição de 2011 e refere-se à variação da forma triangular de um canteiro de flores e ao efeito que essa variação produz, eventualmente, na área desse triângulo (Figura 5.3).

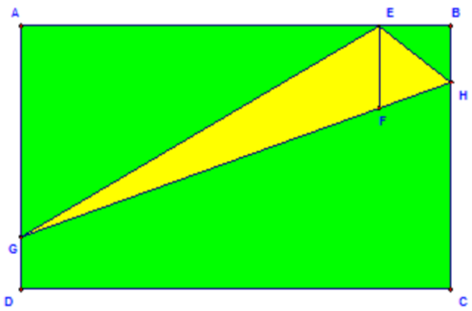
Uma possível abordagem inicia-se com o reconhecimento de que a vara, isto é, o segmento EF, divide o canteiro triangular em dois triângulos menores, EFH e EFG. A vara corresponderá à base de cada um desses triângulos. Seja h_1 a altura do triângulo EFG e h_2 a altura do triângulo EFH. A área do canteiro triangular é dada pela soma das áreas dos dois triângulos menores, ou seja, $A_{EGH} = A_{EFG} + A_{EFH}$, o que é equivalente a considerar que $A_{EGH} = \frac{\overline{EF}\times h_1}{2} + \frac{\overline{EF}\times h_2}{2}$. Dado que $\overline{EF} = 2$, $A_{EGH} = \frac{2\times h_1}{2} + \frac{2\times h_2}{2}$, de onde resulta que $A_{EGH} = h_1 + h_2$, ou seja, a área do canteiro triangular é invariante e coincide com o comprimento do lado AB do jardim retangular.

A marcação do canteiro

A Rosa explicou ao seu jardineiro que queria colocar uma zona de flores triangular no seu jardim de relva rectangular. E acrescentou que a área do triângulo ficaria ao critério do jardineiro. O bom do empregado pegou numa vara de 2 metros, estendeu-a perpendicularmente a um dos bordos do jardim, num ponto ao acaso (E). Depois, com um fio, traçou uma linha que passava pela extremidade da vara (F) e que unia os dois lados opostos do rectângulo, obtendo o triângulo amarelo [EGH]



No dia seguinte, a Rosa olhou para o triângulo e não gostou, mudou a mesma vara para outro ponto ao acaso da borda do jardim e traçou outra linha que passava pela extremidade da vara e unia os dois lados opostos do rectângulo (obtendo outro triângulo amarelo [EGH]).



Quando lá chegou, o jardineiro protestou, dizendo que a área para as flores tinha diminuído. Mas a Rosa garantiu-lhe que não. Quem tem razão e porquê?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 5.3. Enunciado do problema 'A marcação do canteiro'

Esta situação pode ser recriada com um programa de geometria dinâmica, como o GeoGebra. A Figura 5.4 apresenta uma captura de tela com a abordagem seguida por dois concorrentes no SUB14, tal como descrito em Jacinto e Carreira (2013). Após a construção do retângulo que representa o jardim e do triângulo maior que representa o canteiro com flores, é possível construir os dois triângulos que resultam da divisão do canteiro triangular pela vara (na figura, este segmento está contido na reta FG). Em seguida, o GeoGebra permite determinar a área de cada um destes três triângulos. Ao simular o deslocamento da vara para outra posição, através do arrastamento do ponto F, é possível verificar que enquanto os valores da área dos triângulos menores se vão alterando, a área do triângulo correspondente ao canteiro mantém-se invariante. Daqui se infere que a área do canteiro não se altera, apesar de a sua forma poder sofrer variações, nestas condições.

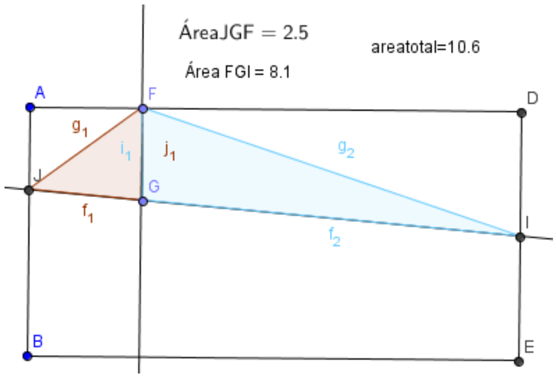
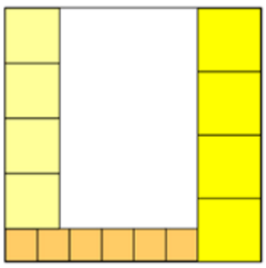


Figura 5.4. Construção em GeoGebra submetida ao SUB14 (Jacinto & Carreira, 2013)

5.2.3 Um quadrado dividido

O problema "Um quadrado dividido" também fez parte da fase de apuramento da edição 2011 do SUB14 (Figura 5.5). A partir das características da figura incluída no enunciado e da medida da área do retângulo branco ao centro, o desafio consiste em determinar a área do quadrado maior que envolve toda a construção.

Um quadrado dividido



Na figura está representado um quadrado que foi dividido em 14 quadrados representados a amarelo, de dimensões diferentes e inteiras, e 1 rectângulo representado a branco, também de dimensões inteiras. O rectângulo branco tem 30464 cm^2 de área.
Qual é a área do quadrado grande?

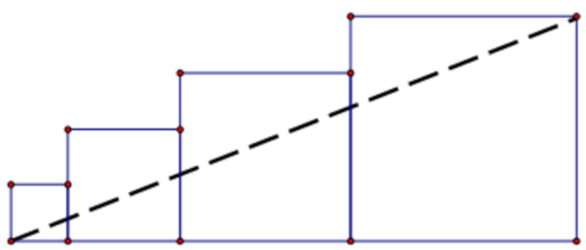
Figura 5.5. Enunciado do Problema 9 lançado na edição 2010/2011

Uma abordagem possível é procurar estabelecer relações de proporção entre os vários tipos de quadrados coloridos. Seja a o comprimento do lado do maior quadrado amarelo, b o comprimento do quadrado amarelo médio, e c o comprimento do quadrado menor amarelo. Convém salientar que a, b, e c são inteiros. Dado que a figura envolvente é também um quadrado, $4a$ é igual a $6c + a$ e ambos são iguais a $b + c$. Deste modo, resolvendo $4a = 6c + a$ e $4a = 4b + c$, obtém-se que $b = 1.75c$. Neste momento, sabe-se que a área do retângulo branco é $30\,464\ cm^2$, sabe-se ainda que o seu comprimentos é $7c$ e que a sua largura é $4{,}25c$. Ao resolver $30\ 464 = 7c \times 4.25c$ resulta que $c = 32cm$. Assim, resta determinar a área do quadrado grande, a que corresponde o valor $A = 6\ 5536cm^2$.

5.2.4 Unidos e cortados

O problema 'Unidos e cortados' foi lançado na quinzena 5 da edição de 2012 do SUB14. O desafio consiste em determinar a área do polígono que fica acima da linha de corte representada a tracejado, numa sequência de 8 quadrados adjacentes cujos comprimentos dos lados são conhecidos (Figura 5.6).

Unidos e cortados



Considera uma sequência de quadrados de lados 1, 2, 3, 4,... centímetros, dispostos de modo a ficarem unidos uns aos outros, como ilustra a figura. Depois de juntos, cortam-se todos os quadrados segundo uma linha que parte do vértice inferior esquerdo do quadrado menor até ao vértice superior direito do quadrado maior. Qual é a área que fica acima da linha de corte se a sequência tiver 8 quadrados?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 5.6. Problema 6 da fase de apuramento do SUB14 (edição 2012)

Uma possível abordagem passa por determinar a área total da figura composta por 8 quadrados naquelas condições e retirar a área do triângulo cuja base coincide com os lados inferiores de todos os quadrados e com altura a coincidir com o lado do quadrado maior. Desta forma, $A_{total} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$, ou seja, $A_{total} =$

$204cm^2$. Ao calcular a área do triângulo, $A_{triângulo} = \frac{(1+2+3+4+5+6+7+8) \times 8}{2}$, obtém-se que $A_{triângulo} = 144\ cm^2$. Assim, a área acima da linha de corte é dada pela subtração entre estes valores, ou seja, $A = 60cm^2$.

5.2.5 Uma troca de bolas

O problema 'Uma troca de bolas' também foi proposto na fase experimental deste estudo. Consiste em determinar o comprimento de uma rua, conhecendo-se a relação entre as velocidades de dois jovens que a percorrem até se encontrarem e a distância que resta percorrer a um deles no trajeto de regresso a casa (Figura 5.7).

Uma troca de bolas

O Afonso e o Bernardo vivem em extremos opostos da mesma rua. O Afonso tinha uma bola que o Bernardo lhe emprestou e o Bernardo tinha uma bola que o Afonso lhe emprestou.
Ambos saíram, ao mesmo tempo, das respetivas casas, para trocarem de bolas. A velocidade do Bernardo foi o dobro da velocidade do Afonso até se encontrarem na rua.
Logo que trocaram as bolas, voltaram para as suas casas mas desta vez a velocidade do Afonso foi o dobro da velocidade do Bernardo.

Quando o Afonso chegou a casa, ainda o Bernardo se encontrava a 120 metros da sua.
Qual é o comprimento da rua?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 5.7. Enunciado do Problema Experimental 3 (2012/2013)

Para o percurso de ida, considere-se $v_{A1}= \frac{d_{A1}}{\Delta t_1}$ como a velocidade do Afonso, isto é, a distância por ele percorrida num dado intervalo de tempo; $v_{B1}= \frac{d_{B1}}{\Delta t_1}$ como a velocidade do Bernardo, ou seja, a distância que percorreu no mesmo intervalo de tempo; e ainda $d_{A1} + d_{B1} = d$, ou seja, o comprimento da rua coincide com a soma das distâncias percorridas pelo Afonso e pelo Bernardo. Como $v_{B1} = 2 \times v_{A1}$ é possível concluir que $\frac{d_{B1}}{\Delta t_1} = 2 \times \frac{d_{A1}}{\Delta t_1} \Leftrightarrow d_{B1} = 2 \times d_{A1}$. Dado que $d_{A1} + d_{B1} = d$, então $d_{A1} + 2d_{A1} = d \Leftrightarrow 3d_{A1} = d \Leftrightarrow d_{A1} = \frac{1}{3}d$.

Para o percurso de volta a casa, tem-se que $v_{A2} = 2 \times v_{B2}$, ou seja, $\frac{d_{A2}}{\Delta t_2} = 2 \times \frac{d_{B2}}{\Delta t_2}$ pelo que $d_{B2} = \frac{1}{2} d_{A2}$. Sabe-se ainda que

$$d = d_{A2} + (d_{B2} + 120) \Leftrightarrow d = d_{A2} + \frac{1}{2} d_{A2} + 120.$$

Como o Afonso chegou a casa, percorreu exatamente a mesma distância do que no percurso de ida, ou seja, $d_{A1} = d_{A2}$, portanto:

$$d = d_{A2} + \frac{1}{2} d_{A2} + 120 \Leftrightarrow d = d_{A1} + \frac{1}{2} d_{A1} + 120$$

Dado que o Afonso percorreu $\frac{1}{3}$ da distância total, tem-se que:

$$d = d_{A1} + \frac{1}{2} d_{A1} + 120 \Leftrightarrow d = \frac{1}{3} d + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} d + 120$$

$$\Leftrightarrow d - \frac{1}{3} d - \frac{1}{6} d = 120 \Leftrightarrow \frac{3}{6} d = 120 \Leftrightarrow d = 240$$

Assim, a distância total percorrida pelos jovens em cada um dos percursos é de 240 metros, a que corresponde o comprimento da rua.

5.3 *Toolkit*: adicionando um novo conjunto de ferramentas teóricas

5.3.1 Visualização na resolução de problemas com tecnologias

Com frequência, resolver um problema de matemática requer o recurso a um diagrama, um desenho ou uma ilustração (Lavy, 2007; Pitta-Pantazi, Sophocleous & Christou, 2013; Presmeg, 1986), dado que estas representações suportam a visualização de conceitos que estão subjacentes ao contexto (Zimmermann & Cunningham, 1991). Esta é também uma constatação muito presente nas produções dos jovens participantes no SUB14 cujas soluções incluem, normalmente, uma grande variedade de *inscrições*, tal como designado por Presmeg (2006). A visualização é aqui considerada como a capacidade para construir imagens de noções matemáticas, quer seja mentalmente, utilizando papel e lápis ou ferramentas tecnológicas, e o seu uso eficiente como uma forma matemática de pensar e de conhecer (Hershkowitz, 2014; Presmeg, 1986; Zimmermann & Cunningham 1991).

A investigação tem mostrado que a visualização e a capacidade de resolução de problemas estão fortemente relacionadas, sobretudo quando se trata de desenvolver abordagens a problemas não-rotineiros (Wheatley, Brown & Solano, 1994). Para além de sustentar as etapas iniciais relacionadas com a compreensão da situação ou com a organização das noções matemáticas incorporadas nas figuras ou nos enunciados, a visualização também apoia a transição de um pensamento contextual para um tipo de pensamento abstrato (Lavy, 2007), transição essa que pode ser interpretada como um processo de matematização. Num estudo desenvolvido por Presmeg (1986), a autora propôs problemas matemáticos a alunos do ensino secundário que pudessem ser resolvidos quer através de estratégias visuais, quer por estratégias não-visuais. Concentrou-se depois nos estudantes que designou por visualizadores, isto é, aqueles que preferiam utilizar os métodos visuais sempre que uma escolha estivesse disponível. Vários outros estudos (e.g., Pitta-Pantazi, Sophocleous & Christou, 2013; Rösken & Rolka, 2006) procuraram compreender as características dos visualizadores, por oposição às dos verbalizadores, que preferem métodos analíticos para resolver problemas de matemática. Por exemplo, Kozhevnikov, Hegarty e Mayer (2002) concluíram que os visualizadores com elevadas capacidades espaciais são bem-sucedidos na resolução de problemas dado que as suas preferências os impelem a fazer inscrições sistemáticas das relações existentes entre os objetos matemáticos.

Apesar de não pretender discutir esta categorização em profundidade, é oportuno considerar a distinção entre os *visualizadores espaciais*, ou seja, aqueles estudantes com grande capacidade para processar informação que diz respeito às relações espaciais e para manipular imagens espaciais complexas; e os *visualizadores de objetos*, isto é, aqueles com maior aptidão para lidar com as propriedades visuais e pictóricas dos objetos matemáticos (Blazhenkova & Kozhevnikov, 2010). Os visualizadores espaciais recorrem com frequência a imagens espaciais flexíveis, manipulam imagens dinâmicas, têm sucesso em tarefas que requerem a transformação mental de objetos, e são capazes de analisar um objeto parte por parte, o que lhes confere capacidade para manipular imagens espaciais e assim envolver-se numa diversidade de transformações (Kozhevnikov, Kosslyn & Shephard, 2005).

Monaghan e Clement (2000) estudaram as vantagens da produção de imagens mentais durante a resolução de problemas de movimento relativo aquando da utilização de aplicações computacionais especialmente desenhadas para fomentar a atividade de ‘prever-observar-explicar’. Os investigadores compararam um grupo de alunos que teve acesso às ferramentas computacionais, ou seja, o tratamento com as simulações animadas, com outro grupo que apenas teve acesso a um tratamento com dados numéricos e gráficos estáticos. Dessa comparação concluíram que o primeiro grupo tinha desenvolvido imagens mentais das situações que incluíam autoprojeções, em que o estudante descrevia a situação como se estivesse a participar nela, movimentos com as mãos que visam caracterizar a situação, ou descrições verbais relacionadas com a velocidade ou a posição dos objetos em análise. Os dados referentes ao grupo de tratamento numérico mostraram que aqueles jovens construíram e usaram algoritmos mecânicos que continham falhas, o que contrastou fortemente com a construção de imagens mentais pelo outro grupo de estudantes realizadas a partir da exploração das animações. Para além de constatarem que o uso de dados numéricos tende a potenciar abordagens baseadas em algoritmos mecânicos para resolver os problemas de movimento relativo, os autores concluíram ainda que o uso de animações visuais promove o desenvolvimento de estratégias com recurso à visualização mesmo quando os problemas a serem resolvidos já não estão acompanhados pelas animações computorizadas.

Villarreal (2000), ao estudar os aspetos do pensamento matemático desenvolvido em presença de tecnologias digitais, identificou dois tipos de abordagens a que os alunos recorriam: uma abordagem visual e outra algébrica. Apesar de a investigadora ter caracterizado cada uma destas abordagens separadamente, ambas podem ser usadas pela mesma pessoa, ou seja, o que faz emergir cada uma delas tanto pode ser o tipo de tecnologia a que recorre ou a atividade concreta em que se envolve, isto é, o tipo de problema. De um modo geral, a abordagem visual era caracterizada pelo uso de informação gráfica para resolver questões que podiam ser resolvidas algebricamente, pela dificuldade em interpretar algebricamente soluções gráficas, por não haver necessidade de começar por um trabalho algébrico quando se requer uma solução gráfica e pela facilidade em formular conjeturas e refutações ou dar explicações com recurso a informação gráfica.

Presmeg (2006) sublinhou a necessidade de produzir mais investigação com foco na visualização em educação matemática e, especificamente, de uma maior compreensão sobre as *affordances* das tecnologias digitais que transformam o pensamento matemático e a aprendizagem da matemática. Na verdade, existem diversos ambientes digitais que potenciam ou estimulam a visualização de certas propriedades matemáticas durante a construção de figuras e a sua transformação, permitindo uma reflexão sobre elas assim como a sua utilização para comunicar. Arcavi e Hadas (2000) defendiam que o dinamismo inerente às ferramentas digitais pode influenciar o "hábito de transformar (quer mentalmente quer por meio de uma ferramenta) um caso particular, com o fim de estudar variações, sugerir invariantes visualmente, e possivelmente providenciar a base intuitiva para justificações formais de conjeturas e proposições" (p. 26). Assim, as características de um visualizador podem influenciar a sua escolha de uma ferramenta digital, tal como o reconhecimento das suas *affordances* mais relevantes para desenvolver métodos ou abordagens visuais no decurso da resolução de um dado problema.

Numa revisão alargada da literatura produzida sobre visualização no final dos anos 90, Borba e Villarreal (2005) sintetizam os motivos pelos quais esta deve ser considerada na aprendizagem da matemática. Entre outros, parecem-me particularmente interessantes os seguintes: porque constitui um caminho alternativo para aceder ao conhecimento matemático; porque é parte fundamental da atividade matemática e uma forma de resolver problemas; e porque o uso de tecnologias para ensinar e aprender matemática requer a compreensão de processos visuais. Mais focados no papel dos *media*, e nas capacidades de visualização que potenciam, os autores referem:

> Os *media* usados para comunicar, representar e produzir ideias matemáticas condicionam o tipo de matemática que é feita e o tipo de pensamento que é desenvolvido nesse processo. Ao mesmo tempo, os processos de visualização alcançam uma nova dimensão se considerarmos o ambiente de aprendizagem computacional como um coletivo pensante especial, onde estudantes, professor/investigador, *media* e conteúdos matemáticos residem juntos (Borba & Villarreal, 2005, p. 96, grifo meu).

Querem pois dizer que o papel da visualização no desenvolvimento de pensamento matemático vai muito além da perceção superficial que está relacionada com o 'mostrar uma imagem', sobretudo quando os media são considerados parte integrante do coletivo que produz esse pensamento: o *ser-humano-com-media*. Por outro lado, os autores também alertam para o facto de a conceção predominante do que é a matemática e do que é fazer matemática (muito assente no formalismo, no analítico, na solução exata) remete para *media* muito comuns e habituais na aprendizagem da matemática: a oralidade e a escrita. Esta perceção tem, inclusive, condicionado o tipo de tecnologias que são normalmente aceites na produção de conhecimento matemático (e.g., a calculadora gráfica, a folha de cálculo, os ambientes de geometria dinâmica são alguns dos exemplos mais tradicionais), o que se traduz na pouca relevância dada a outras ferramentas, especialmente às que se prestam a apoiar atividades de visualização ou experimentais e que, por isso, estão menos providas de *affordances* para a formalização matemática. Aliás, quando é reconhecida como parte importante dos processos de aprendizagem, a visualização é entendida como catapulta para processos mais formais e relevantes. Pelo contrário, Borba e Villarreal asseveram:

> No caso da visualização, o que nós vemos é sempre moldado pelas tecnologias da inteligência que fazem parte de um dado coletivo de humanos-com-media e o que é visto molda a nossa cognição (Borba & Villarreal, 2005, p. 99).

Neste sentido, compreender a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias no contexto do SUB14 requer olhar para os jovens-com-media enquanto desenvolvem formas produtivas de pensar visualmente com media – o que pode incluir ferramentas digitais, mas também o papel e o lápis e a expressão escrita – que espoletam, sustentam ou ampliam o pensamento matemático visual.

5.3.2 Pensamento geométrico e a utilização de programas de geometria dinâmica

Os Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD) trouxeram um novo ímpeto à propalada introdução de tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem da matemática, em grande parte devido às suas potencialidades, consideradas tão promissoras, na aprendizagem de conceitos de geometria (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strasser, 2006; Watson, Jones, & Pratt, 2013). Com efeito, qualquer um dos problemas anteriores que envolvem noções geométricas poderia ser abordado com recurso a um destes ambientes dinâmicos não só com o intuito de obter construções idênticas às apresentadas e manipulá-las, como também para fazer medições ou cálculos.

Amplamente estudado em contextos de sala de aula, o desenvolvimento do pensamento geométrico caracteriza-se através de aspetos espaciais, que dizem respeito ao pensamento espacial e à visualização, e por aspetos que se relacionam com a capacidade de raciocinar com conceitos teóricos do campo da geometria, onde também se inclui o raciocínio dedutivo (Watson, Jones & Pratt, 2013). Na perspetiva de Battista (2007), o raciocínio espacial "providencia não só um '*input'* para o raciocínio geométrico formal, como as ferramentas cognitivas cruciais para a análise geométrica formal" (p. 844). Por 'raciocínio espacial' Battista refere-se à "capacidade para 'ver', inspecionar, e refletir sobre objetos, imagens, relações e transformações espaciais" (p. 843). Watson et al. (2013) também clarificam que o "raciocínio espacial é uma forma de atividade mental que torna possível a criação de imagens espaciais e potencia que estas sejam manipuladas no decurso da resolução de problemas práticos e teóricos na matemática” (p. 96). Estes autores dão grande ênfase a duas atividades principais que decorrem aquando do desenvolvimento de uma abordagem a problemas geométricos que requerem esta capacidade: *criar* e *manipular*.

A produção e a exploração de figuras são duas das principais *affordances* dos ambientes de geometria dinâmica, hoje mais poderosos do que nunca, que permitem a rápida combinação e conexão entre objetos geométricos, algébricos e a medição. Estes ambientes permitem a construção de imagens, que se podem relacionar intimamente com as figuras correspondentes devido ao conjunto de regras teóricas de geometria embutidas no AGD. Por outro lado, impulsionam a manipulação dessas figuras pelo que se torna difícil para o utilizador não responder aos inúmeros convites para a ação com a ferramenta: arrastar, testar, conjeturar ou verificar.

Na realidade, os ambientes de geometria dinâmica servem um duplo propósito: enquanto ajudam a que as ideias e os conceitos geométricos ganhem vida ao providenciar uma significação contextualizada, também podem guiar os estudantes numa viagem que parte de ideias informais para noções geométricas formais. O primeiro propósito é bem descrito por Leung (2008) quando se refere às características principais dos AGD que os torna tão apelativos para a sala de aula já que “tornam visualmente explícito o dinamismo que é implícito ao pensar sobre conceitos matemáticos geométricos” (p. 135). No mesmo sentido, a investigação tem mostrado que os programas de geometria dinâmica são úteis na visualização de conceitos geométricos e na compreensão de regras, mas também para fazer conjeturas e generalizações, e para encontrar relações entre conceitos (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Jones, 2000). Os programas de geometria dinâmica também parecem desempenhar um papel relevante quando se torna necessário desenvolver uma abordagem pela modelação de uma situação geométrica. Estimula um movimento que parte de um pensamento informal e dependente do contexto para um tipo de pensamento mais formal que resulta no desenvolvimento de modelos conceptuais. Vários são os estudos que têm mostrado que, quando se resolve um problema recorrendo a um AGD, os estudantes percecionam e fazem uso de um conjunto de *affordances* de modo a modelar a situação: empreendem uma construção, o que revela a maneira como estão a interpretar o problema e a vislumbrar algumas das ideias matemáticas subjacentes; e exploram e investigam propriedades que podem levar a transformações ao nível dos seus processos de raciocínio, ou seja, do seu raciocínio geométrico (Holzl, 2001; Iranzo & Fortuny, 2011; Jones, 2000; Mousoulides, 2011). Por exemplo, o estudo relatado por Chen e Herbst (2013), cujo objetivo era compreender como é que a interação com diagramas influencia a capacidade dos alunos para apreciar a razoabilidade de uma conjetura, elegeu os diagramas como "recursos chave no raciocínio geométrico dos alunos" (p. 285). Referem ainda que "diferentes tipos de interações com diagramas pode envolver os alunos em formas particulares de pensamento" (p. 286).

A manipulação de objetos geométricos num AGD, cujas regras assentam nos princípios da geometria Euclidiana, parece fundamental para revelar o "dinamismo implícito" mencionado por Leung (2008). O arrastamento é uma das *affordances* mais estudadas destes ambientes dinâmicos e, atualmente, entende-se que inspira a formulação de conjeturas e, portanto, pode ativar o pensamento geométrico (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Leung, 2008). Esta atividade de formulação de conjeturas é desencadeada pela observação e perceção de propriedades de uma certa figura que permanece invariante sob arrastamento, e culmina com o estabelecer de conexões com os conceitos geométricos teóricos. No entanto, procurar padrões e invariantes, que tem sido considerada "uma atividade essencial no pensamento matemático" (Leung, Baccaglini-Frank, & Mariotti, 2013, p. 440) e mesmo a própria "essência dos ambientes de geometria dinâmica" (Laborde, 2005, p. 22), exige uma combinação entre a observação empírica e as ideias teóricas que pode estimular a necessidade de uma prova das propriedades geométricas emergentes. Relativamente à atividade de provar, deve esperar-se a produção de uma "sequência de afirmações que justificam logicamente a conclusão como uma consequência das 'premissas'" (Battista, 2007, p. 853). Todavia, tem sido reportado que a fácil e rápida produção de uma grande quantidade de verificações que os AGD permitem pode induzir os estudantes a sentirem-se satisfeitos perante "argumentos quase-empíricos" (Watson, Jones, & Pratt, 2013; Holzl, 2001), especialmente quando as conjeturas a carecer de prova surgem a partir de atividades de medição.

Jones (2000) também parte do pressuposto da existência de um movimento do conhecimento informal para as noções e relações geométricas formais. O autor reporta um estudo onde analisou as interpretações e explicações de alunos sobre as propriedades geométricas de figuras construídas com um AGD. Os resultados da sua investigação apontam para uma mudança nos padrões de pensamento dos alunos que se foram desenvolvendo desde "expressões imprecisas, do dia-a-dia, através do raciocínio mediado pelo ambiente do programa, para explicações matemáticas da situação geométrica" (p. 80). Dado que a unidade de ensino construída para apoiar o trabalho de sala de aula tinha um *design* que favorecia a matematização progressiva, o estudo mostrou que diferentes estudantes foram capazes de matematizar progressivamente por meio do AGD.

Com o propósito de analisar um conjunto de resoluções de problemas de matemática com o GeoGebra, no âmbito do projeto Problem@Web, Carreira, Jones, Amado, Jacinto e Nobre (2016) sintetizaram um conjunto de possibilidades de ação com esta ferramenta (Tabela 5.1) enquanto 'ambiente exploratório'. Os autores observaram uma diversidade nas formas de pensar dos vários participantes e nos seus modos de ação com o GeoGebra para resolver um mesmo problema, associando essas diferenças com a natureza dinâmica das representações matemáticas potenciada pelo programa. Concluíram ainda que, independentemente do seu nível de matematização, a utilização do GeoGebra capacita os jovens participantes durante a atividade de resolução de problemas pois são capazes de reconhecer um conjunto alargado de affordances que lhes permite obter, de forma eficiente, a solução do problema.

Tabela 5.1. Quadro síntese de affordances do GeoGebra (Carreira et al., 2016)

Affordances	*Exemplos*
Construções imediatas	Marcar um ponto. Desenhar um segmento.
Medição	Comprimento. Perímetro. Área.
Construções referenciais	Construir uma reta perpendicular a um segmento. Construir uma circunferência com raio de 2cm.
Definir propriedades dos objetos	Negrito. Tracejado. Alteração de cor. Esconder um objeto. Definir arredondamento de unidades. Usar rótulos.
Construções usando parâmetros ou variáveis	Usar um seletor para fazer variar o comprimento de um segmento.
Arrastar e explorar	Arrastar um ponto e explorar propriedades geométricas.

Este conjunto de resultados é consistente com o pressuposto de que a maleabilidade de um AGD permite que os estudantes resolvam problemas de geometria, independentemente das suas capacidades de matematização. Considerando ideias teóricas já apresentadas e discutidas no quadro conceptual, é possível conjeturar que diferentes jovens-com-AGD podem produzir diferentes matematizações quando se envolvem na resolução de problemas de geometria. Tais diferenças podem estar relacionadas com as suas capacidades individuais de pensamento geométrico, sendo que a perceção das ações potenciadas pelos programas também desempenha um papel importante nesse processo.

Com isto bem presente, o meu argumento é o de que os ambientes de geometria dinâmica permitem que cada estudante, num determinado nível de matematização, se possa envolver numa atividade própria, construir abordagens específicas e alcançar conclusões diversas, enquanto resolve efetivamente o problema dado.

5.3.3 Pensamento covariacional

O SUB14 propõe também problemas que envolvem a variação simultânea de variáveis, embora com menos frequência do que outros, como os problemas numéricos ou os geométricos. Nestes problemas, que normalmente envolvem relações entre variáveis como o tempo e a distância, "verificou-se que os alunos raramente se aproximam das resoluções algébricas" e, ao invés, acabam por encontrar "formas de resolução-e-expressão muito centradas em representações visuais, em que predominam esquemas, diagramas, imagens, setas, linhas, ícones, etc., correspondendo a uma maneira de 'reproduzir' a natureza dinâmica da situação – a variação ao longo do tempo" (Carreira, Amado, Ferreira, Jacinto, Nobre & Amaral, 2013, p. 59).

Lidar com problemas que envolvem a variação de um deslocamento ao longo do tempo (problemas de movimento), e que têm subjacente a noção de covariação entre duas variáveis, envolve a capacidade de traduzir o dinamismo implícito na situação através de um modelo que, em alguns casos, se resume a representações estáticas, de que é exemplo o tratamento algébrico incluído na Secção 5.2.5. Esta capacidade envolve um tipo de pensamento designado por 'pensamento covariacional' e que diz respeito às atividades cognitivas envolvidas em coordenar duas quantidades que variam simultaneamente enquanto se analisa as formas em que cada uma muda em relação à outra (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002; Confrey & Smith, 1991; Saldanha & Thompson, 1998). Por exemplo, numa tabela, o pensamento covariacional surge ao coordenar a variação nos dados de, pelo menos, duas colunas; num gráfico, envolve coordenar alterações no valor da ordenada à medida que a abcissa varia; numa função, implica compreender de que forma as variáveis dependente e independente se comportam.

O pensamento covariacional tem recebido muita atenção por parte dos investigadores no campo da didática da matemática, pois é um tipo de pensamento envolvido no desenvolvimento de conceitos como os de variável, função, taxa de variação ou derivada. Carlson, Jacobs, Coe, Larsen e Hsu (2002) desenvolveram um quadro teórico com vista à compreensão do pensamento covariacional de estudantes envolvidos na análise de quantidades que variavam em modelos de eventos dinâmicos. O modelo que desenvolveram compreende cinco ações mentais e cinco níveis de pensamento covariacional que foram consolidadas para classificar os comportamentos dos alunos enquanto lidavam com tarefas sobre funções dinâmicas que requeriam o desenvolvimento de um pensamento covariacional. Este modelo abrange os seguintes níveis: 1) a coordenação de variáveis; 2) a direção da variação; 3) a coordenação da quantidade da variação nas duas variáveis; 4) taxa média de variação ao longo de incrementos uniformes; e 5) taxa de variação instantânea. Entre outros resultados, os autores salientam que a maioria dos alunos apenas demonstra ser capaz de efetuar as ações mentais que se referem aos níveis 1 e 2, pelo que o que se apresentou com mais dificuldades para alunos de 10º ano foi o movimento flexível entre as ações 3, 4 e 5.

Ainda de acordo com Carlson et al. (2002), uma vez que a noção de covariação leva à construção de imagens dinâmicas de fenómenos em movimento, isto é, carregam um significado metafórico sobre a variação simultânea de variáveis, o pensamento covariacional encerra uma forte ligação com a visualização e o desenvolvimento de imagens mentais. Este foi, precisamente, um dos aspetos observados no seu estudo: os alunos visados procuravam 'simular' a situação dinâmica ao encenar a situação problemática recorrendo a objetos, ao próprio corpo e a gestos. Tal como afirmam Carreira et al. (2016), o pensamento covariacional "encerra uma conexão consistente com a criação de imagens mentais dinâmicas, o raciocínio metafórico, a simulação física e referentes corporais (Carreira et al, 2016, p. 176).

Um outro estudo, desenvolvido por Blanton e Kaput (2011), debruçou-se sobre crianças mais jovens, ao nível do primeiro ciclo, e mostra que também elas são capazes de desenvolver um pensamento covariacional, sobretudo quando os problemas colocados são contextualizados e quando o padrão numérico revela uma proporcionalidade direta em que as variáveis são discretas. Com base nesta investigação, ancorada num projeto desenvolvido ao longo de cinco anos, Blanton e Kaput sugerem uma reformulação no currículo que deve passar a incluir esta noção de covariação, indo para além do estudo de padrões recursivos. Propõem ainda estratégias para os professores transformarem os seus recursos habituais para que os conteúdos aritméticos possam eles próprios servir de trampolim para a construção de padrões, para a formulação de conjeturas e para a justificação da existência de relações de covariação entre quantidades (Blanton & Kaput, 2011).

Falcade, Laborde e Mariotti (2007) desenvolveram experiências de ensino em Itália e França, com alunos do 10.º ano, partindo do pressuposto de que a compreensão do conceito de função está ancorada na compreensão da noção de covariação. Para além deste, outro pressuposto foi o de que é importante que o início deste trabalho decorra num ambiente que possibilite experimentar uma dependência funcional que não esteja apenas baseada num contexto numérico, pelo que optaram por promover o trabalho com um AGD. Para além de incorporar esse tipo de dependência, o AGD integra a dependência funcional entre variáveis geométricas pelo que permite pensar sobre as ligações existentes entre elas. Outras *affordances* destes ambientes incluem a possibilidade de representar o movimento: uma vez obtida uma construção geométrica é possível arrastar determinado objeto e estudar a sua trajetória – que pode ser entendida como dois conjuntos de pontos, sendo que o domínio e o contradomínio se tornam visíveis. Ao analisar as produções dos alunos, concluíram que estes se apropriaram do conceito de variabilidade como movimento. A noção de covariação parece ter surgido da combinação entre a observação e a ação, as quais resultaram da "coordenação entre olhos e mãos e estão incorporadas no movimento condicional dos pontos do ecrã" (p. 331).

5.4 Síntese

Neste capítulo sumariei o modo de elaboração dos problemas propostos no SUB14, apresentei com detalhe uma seleção de problemas que os participantes neste estudo resolveram, quer durante as fases de apuramento do campeonato quer na fase experimental do estudo, tendo discutido ainda os aspetos do pensamento matemático específicos de cada problema que podem ser ativados durante o desenvolvimento de abordagens que conduzam à solução dos problemas.

De um modo geral, destaca-se uma certa diversidade ao nível dos problemas propostos em termos do tópico matemático presente em cada situação e, naturalmente, do tipo de pensamento matemático que pode estar envolvido. Esta variedade leva a que a análise da resolução destes problemas de matemática tenha, necessariamente, que lidar com o campo matemático próprio de cada problema e, portanto, pode beneficiar do contributo de ferramentas teóricas mais específicas, relacionadas com o tipo de abordagem que cada problema pode suscitar. Na verdade, os problemas propostos no SUB14 possibilitam fazer várias conexões entre temas ou processos matemáticos o que pode levar os participantes a desenvolver modelos das situações problemáticas, componentes fundamentais da resolução de problemas (Stacey, 2007).

O modelo de resolução de problemas de matemática com tecnologias (RPMT) desenvolvido neste trabalho (Capítulo 3, Secção 3.3), embora genérico, não ignora a existência e o desenvolvimento de diferentes tipos de pensamento matemático durante essa atividade pelo que, para além das heurísticas gerais de resolução de problemas, é importante trazer à tona os aspetos específicos do conhecimento matemático que emerge em cada problema (e.g., geometria, álgebra, etc.). Portanto, o modelo geral pode ser complementado com uma análise mais aprofundada dos aspetos que fazem com que seja possível reconhecer a adequação de uma dada ferramenta digital ou, ainda, de uma determinada *affordance* dessa mesma ferramenta. Mais concretamente, estou a referir-me ao pensamento matemático a montante da fluência tecno-matemática necessária à resolução de um dado problema com tecnologia. Recorrer ao 'pensamento visual', ao 'pensamento covariacional', ou ao 'pensamento geométrico'[28], atividade subjacente à vertente matemática do modelo RPMT, induz o reconhecimento das possibilidades de ação com uma dada ferramenta tecnológica – a outra vertente do modelo.

Qual caixa de ferramentas, este *toolkit* engloba um conjunto de conceitos teóricos que considero úteis e importantes para a análise que pretendo fazer adiante, precisamente por estarem relacionados com a natureza dos problemas do Campeonato resolvidos com tecnologias pelos participantes. Apesar de estes aspetos do pensamento matemático não ocuparem um lugar central nessa análise, razão pela qual não foram incluídos no quadro conceptual, considero que são imprescindíveis para poder explicar com profundidade não só a natureza da atividade de resolução de problemas com tecnologias, como da fluência tecno-matemática que a sustenta.

[28] Os tipos de pensamento matemático discutidos neste trabalho dizem respeito aos problemas resolvidos pelos participantes que foram selecionados para a análise de dados. No entanto, o Campeonato propõe problemas de outra natureza, pelo que se poderia igualmente considerar outros aspetos do pensamento matemático, como por exemplo, o pensamento analítico ou o pensamento lógico.

6

Jéssica -com-Ferramentas-de-Geometria

Preâmbulo

Neste primeiro capítulo de análise de dados pretendo apresentar o caso de Jéssica, uma jovem que resolve-e-exprime os problemas de geometria do SUB14 com recurso a um ambiente de geometria dinâmica. Devo sublinhar entretanto que este caso alimentou um propósito bastante concreto e, em consequência disso, seguiu um desenvolvimento diferente dos que apresentarei posteriormente. Por isso, serve este preâmbulo para detalhar o que o distingue dos restantes bem como os motivos que me levaram a incluir este caso na secção de análise de dados deste relatório da investigação.

Conforme explicitei no capítulo dedicado à Metodologia de Investigação (Capítulo 4, Secção 4.8.2), este caso funcionou como um balão de ensaio que auxiliou o desenvolvimento de uma parte fundamental do quadro de análise: o modelo de resolução de problemas de matemática com tecnologias (RPMT). Deste modo, apresentarei de seguida a versão refinada de um caso que foi sendo desenvolvido, foi apresentado e discutido em várias instâncias, enquanto o quadro de análise foi também sofrendo alterações para incorporar aspetos que iam emergindo destas análises.

Deste modo, o caso de Jéssica tem dimensões e características diferentes dos restantes dois casos. Muito embora não tenha sido possível observar a jovem no seu ambiente doméstico em atividade de resolução de problemas, à semelhança dos outros dois participantes, os dados que já haviam sido recolhidos permitiam traçar um perfil bastante completo dos elementos envolvidos no seu sistema de atividade. Foi ainda possível completar este perfil mediante a análise das soluções produzidas por Jéssica com o GeoGebra devido ao facto deste programa possuir uma ferramenta que regista a sequência pela qual os objetos são construídos, pelo que a considerei como uma boa aproximação das ações de Jéssica neste ambiente digital.

Os capítulos seguintes reportam os casos de Marco-com-ferramentas-de-visualização e de Beatriz-com-ferramentas-expressivas, ilustrando os aspetos específicos da sua atividade no âmbito do SUB14, dos seus processos de resolução de problemas com tecnologias, e da natureza da sua fluência tecno-matemática, complementando os dados recolhidos pelas mesmas vias que os de Jéssica com a observação, nos seus lares, da sua atividade enquanto resolvem-e-exprimem um problema de matemática mediante o uso de ferramentas tecnológicas.

Eles aprendem tudo sozinhos, também!

(Mãe da Jéssica)

Jéssica: Dados de identificação

Figura 6.1. Dados de Identificação de Jéssica

Jéssica é uma jovem de 13 anos que participou em duas edições do SUB14, durante o seu 7.º e o seu 8.º ano de escolaridade. Sempre se mostrou muito empenhada na competição, à semelhança do que faz em todas as atividades escolares e extraescolares em que se costuma envolver.

Na Escola, Jéssica está sempre atenta nas aulas e é cumpridora dos seus deveres. Não se assume como uma fã das tecnologias, mas reconhece que têm as suas vantagens pelo que sabe usá-las com a destreza necessária. O que não sabe, aprende *online*. Apesar de parecer um pouco tímida, toca um instrumento musical e faz teatro num grupo local.

Para além destas atividades, tem como passatempo ver jogos de *snooker* na televisão mas, como passam a horas tardias, Jéssica grava-os para poder vê-los depois noutra altura mais apropriada, normalmente ao fim de semana.

A mãe, com orgulho, faz notar que ela sempre foi uma rapariga muito responsável e muito independente, por contraste com a irmã mais velha embora esta se encontre a estudar medicina. O ser uma "excelente aluna" é atribuído ao facto de ser trabalhadora:

> Mãe: Eu acho que a Jéssica é uma excelente aluna. Trabalhadora, é! Não tem nada de preguiça, não é preguiçosa como a mãe [risos] . . . eu não tenho que me preocupar se ela estudou ou se vai estudar, ou se ela tem teste e não se preocupou que tem teste. Não, ela é responsável, sabe que se tem teste ou tem os trabalhos de casa para fazer, ela faz sem que eu esteja a dizer-lhe "faz ou vai fazer". Eu nunca a mandei estudar.

Não obstante, Jéssica não aprecia o trabalho em equipa. Na primeira edição do Campeonato começou a participar na segunda quinzena resolvendo os problemas em grupo com outros dois colegas da sua turma. A experiência não correu bem e Jéssica optou por pedir a dissolução do grupo, passando a participar individualmente (Figura 6.2). Um dos colegas ainda resolveu, também individualmente, o problema da quinzena seguinte mas acabou por desistir.

Resposta:
O meu nome é [redacted] e tenho a camisola [redacted]. Eu fazia parte de uma equipa, com o [redacted], camisola [redacted] e o [redacted], camisola [redacted]. Quero perguntar se é possível desfazer a equipa e cada um continuar a participar individualmente. Portanto, aqui está anexada a minha resposta ao problema 3.

Figura 6.2. Excerto do e-mail enviado por Jéssica à comissão organizadora a pedir a dissolução da equipa

Ao longo das duas edições, a ferramenta mais usada por Jéssica foi o editor de texto Word onde inseriu e formatou texto e tabelas, apresentou cálculos ou expressões algébricas com recurso a editores de equações. Por diversas vezes inseriu nesses ficheiros Word elementos criados com outras ferramentas, nomeadamente, esquemas elaborados com o editor de imagens (Paint) e figuras construídas com o GeoGebra. Submeteu ainda resoluções noutros tipos de ficheiros: formato de imagem (bmp), onde criou uma tabela e acrescentou uma descrição textual do processo de obtenção da solução; e dois ficheiros elaborados em GeoGebra contendo construções e explicações detalhadas das soluções (análise detalhada nas secções 6.2 e 6.3).

Na última edição em que Jéssica participou, o formulário de submissão de cada solução solicitava algumas informações de índole obrigatória relacionadas com: i) a ajuda recebida durante a resolução, ii) o gosto pelo problema, e iii) o grau de dificuldade do problema. De acordo com as respostas submetidas por Jéssica, neste segundo ano de participação apenas contou com a ajuda de familiares para responder a um dos problemas do campeonato (o problema #7) e gostou "muito" de 6 dos problemas propostos. Nos últimos quatro problemas foi ainda solicitada uma apreciação do seu grau de dificuldade sendo que Jéssica considerou o problema #8 como "difícil".

A jovem também foi apurada para as duas Finais do SUB14. Na primeira vez, em 2011, a professora da Jéssica acompanhou-a ao Algarve, o que fez com que a relação entre ambas se estreitasse. Na última edição dos Campeonatos, em junho de 2012, foi a mãe que a acompanhou à Final na Universidade do Algarve. Para além de se mostrar muito satisfeita com o seu segundo apuramento para uma Final, mostrou-se também muito esperançosa de que esta seria a sua oportunidade para pisar o palco na atribuição de prémios. Tal não veio a acontecer, o que a deixou, e à sua mãe, bastante tristes.

6.1 A atividade de resolução de problemas com tecnologias

Deste 'primeiro encontro' com a Jéssica, é possível perceber alguns dos traços que compõem a sua atividade de resolução de problemas de matemática, nomeadamente, o facto de que existem algumas ferramentas tecnológicas que ela utiliza com mais frequência para obter as soluções que submete ao Campeonato de Matemática SUB14 – o Word e o GeoGebra – e que essa atividade é acompanhada com relativa proximidade pela mãe e por uma professora de matemática, embora apenas no 7.º ano (Figura 6.3).

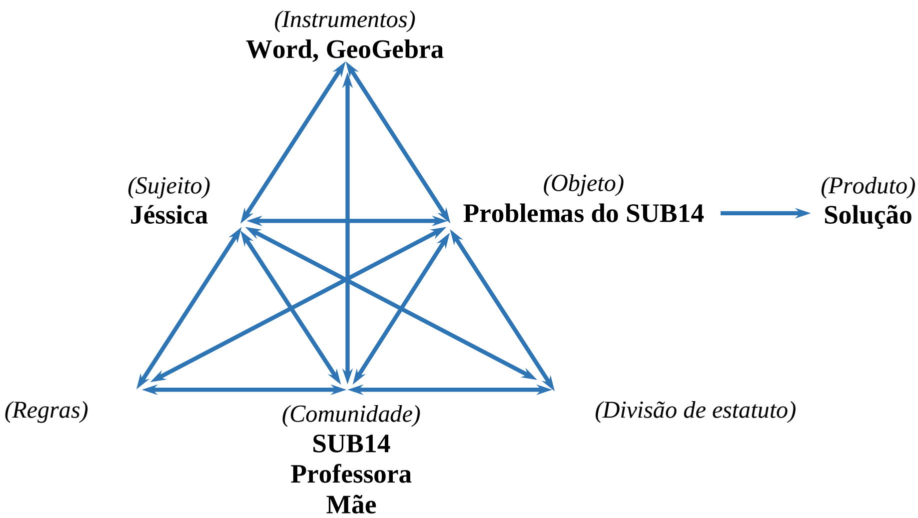


Figura 6.3. Primeiro esboço da atividade de Jéssica no contexto do SUB14

6.1.1 As relações com a comunidade na atividade de Jéssica

Da comunidade que Jéssica integra, fazem parte a organização do Campeonato SUB14, a sua professora de matemática durante o seu 7.º ano de escolaridade, e a sua mãe. É possível considerar ainda que Jéssica manteve algumas relações com outros participantes com que trabalhou em grupo, sobretudo no início do seu percurso. Todavia, o grupo foi rapidamente dissolvido e os restantes colegas acabaram por desistir da participação no SUB14. Para além disso, Jéssica também contactou com outros concorrentes aquando das Finais em que participou, mas como o fenómeno que me encontro a estudar se reporta à fase de apuramento, não irei considerar essas interações como relevantes para descrever a sua atividade.

De entre os elementos da organização, Jéssica comunica com mais frequência, via correio eletrónico, com o elemento responsável por rececionar as suas resoluções e providenciar *feedback*[29]. Poucas foram as vezes em que teve que reformular as suas soluções, mas este contacto estabeleceu-se sempre com elevada cordialidade e relativo distanciamento, com alguma formalidade até. "A resposta está anexada" foi a frase mais comum nos *e-mails* enviados por Jéssica.

Tal como Jéssica refere, durante o 7.º ano, a sua professora de matemática seguiu com alguma proximidade a sua participação no SUB14, mostrando-se disponível para que Jéssica a consultasse sempre que sentisse demasiadas dificuldades. A professora costumava ajudá-la, fornecendo pistas ou colocando "questões para pensar", como a jovem explica, mas nunca lhe fornecendo a resposta diretamente. Por vezes, essa comunicação entre elas também decorreu através do *e-mail*, sendo que a professora lhe chegou a oferecer "dicas" sobre formas de abordar os problemas. As aulas de matemática desta professora foram também uma fonte de inspiração para Jéssica, sobretudo no que diz respeito à utilização do GeoGebra.

A mãe de Jéssica, que acompanha todas as outras atividades da filha, também se faz presente no Campeonato. O seu envolvimento na atividade de resolução dos problemas nas fases de apuramento foi muito reduzido, tendo colaborado apenas na resolução do problema #7, facto que a própria explica estar relacionado com o pouco à

[29] A organização do Campeonato é composta por vários professores de Matemática, cada um dos quais tem a seu cargo verificar e responder aos *e-mails* de uma parcela dos participantes. Cada um dos membros da organização responde sempre em nome do Campeonato e não em nome pessoal, razão pela qual os participantes não sabem quem é especificamente a pessoa que responde.

vontade que sente com a matemática e à sua falta de conhecimentos na área. No entanto, sempre apoiou a filha e, inclusive, acompanhou-a à fase Final da última edição em a jovem participou.

Por algumas vezes, a Jéssica sentiu necessidade de se informar na Internet sobre conceitos matemáticos, de forma a poder usá-los na resolução dos problemas. A propósito de um problema em que decidiu utilizar a noção de proporcionalidade inversa, acabou mesmo por escrever um 'alerta' à organização do SUB14, referindo a dificuldade excessiva que o problema traria aos demais concorrentes, pois a noção matemática envolvida (proporcionalidade inversa) não era lecionada no 7.º nem no 8.º ano de escolaridade (Figura 6.4).

> Resposta:
> Anexei a resposta. Para responder ao problema, utilizei a proporcionalidade inversa. Sendo uma matéria que nunca dei na minha aprendizagem escolar, devo confessar que necessitei de me informar na Internet sobre o assunto. Apenas digo isto para alertar a equipa do SUB14 que poderão estar a colocar problemas com temas que não estão ao nível do conhecimento dos alunos.
>
> Quando me enviaram o mail a indicar que a minha resposta ao problema 6 estava correcta, perguntaram-me se usava frequentemente o programa 'GeoGebra'. Bom, a professora [redacted], que é minha professora de matemática, costuma utilizar muito o GeoGebra no decorrer das aulas. Foi ela que nos incentivou a usar o programa, que me tem ajudado bastante a entender melhor a matemática e também a geometria.

Figura 6.4. Excerto do e-mail que acompanhou a resolução do Problema #7 da edição 2010/2011

É também de notar que as relações entre os membros desta comunidade são mediadas pelos artefactos tecnológicos de que dispõem para comunicar e são fundamentais para que a atividade de resolução de problemas da Jéssica seja frutífera. Poder-se-ia quase considerar que esta comunidade não tem fronteiras físicas, já que, no extremo, a Jéssica pode interagir com o mundo através da Internet para obter algum tipo de ajuda para encontrar as soluções destes problemas de matemática, embora ela tenha assumido que tal só aconteceu esporadicamente.

6.1.2 As regras de participação na atividade de Jéssica

A participação de Jéssica na competição SUB14 é exemplar. As suas respostas são submetidas dentro do prazo, nunca se atrasando, são apresentadas com recurso a uma linguagem clara e cuidada. Jéssica costuma descrever os seus processos de resolução de forma completa e apresenta justificações matemáticas adequadas. Todas estas características da sua atividade refletem as regras de participação na comunidade mais abrangente – o Campeonato de Matemática SUB14.

Por um lado, é o próprio regulamento do Campeonato que estabelece balizas, permite e até incentiva determinados 'comportamentos'. Em primeiro lugar, é tornado explícito, nas regras de participação, que os participantes podem recorrer a qualquer estratégia de resolução e tal facto é valorizado através da publicação no *website* do SUB14 de uma amostra de respostas – as 'resoluções admiráveis' – com o intuito de ilustrar vários processos de abordar e resolver cada problema. O Campeonato também admite uma diversidade de formatos de respostas digitais e incentiva a criatividade dos concorrentes, mas exige explicações detalhadas dos processos de resolução. Por fim, também se permite e incentiva que, durante esta fase de apuramento, os participantes possam recorrer a familiares, professores, amigos ou à própria organização para poder ultrapassar eventuais dificuldades, ou encontrar abordagens para obter as soluções dos problemas.

Jéssica absorve estas regras e incorpora-as naquilo que são as suas conceções, as suas preferências ou hábitos de 'fazer matemática' e também de 'resolver problemas de matemática'. Esta combinação leva-a a recorrer com frequência ao editor de texto Word para escrever as suas explicações e organizar esquemas ou figuras que tornem mais explícito o seu raciocínio. Outro exemplo é o facto de Jéssica recorrer ao GeoGebra quando surgem problemas que envolvem noções de Geometria, o que indica que a natureza matemática do problema tem reflexo na escolha das ferramentas que utiliza. Todavia, esta valorização do GeoGebra também decorre da abertura do Campeonato a toda e qualquer ferramenta tecnológica, ficando a sua escolha a cargo do participante. Como detalharei adiante, esta opção decorre ainda da experiência de sala de aula de Jéssica pois confere ao GeoGebra legitimidade enquanto uma ferramenta matemática e, como tal, representa um instrumento aceite pela comunidade.

As explicações de Jéssica são pormenorizadas, precisas, combinam texto, expressões algébricas e cálculo, sempre que oportuno, pelo que se nota uma grande preocupação em produzir afirmações matematicamente corretas. Uma ilustração desta preocupação de Jéssica com a correção da linguagem, bem como com o rigor e o detalhe das suas explicações, pode ser encontrado na Figura 6.5 que contém a solução submetida ao problema 'Pintores e mais Pintores' (Anexo G). Esta interpretação das regras de participação no SUB14 está muito marcada pela matemática escolar: pelas suas representações (identificar constante de proporcionalidade a partir de uma tabela que relaciona duas variáveis), pelas suas regras (cálculo), e pela sua linguagem (‘formular a hipótese’, definição de conceitos).

Resolução do problema 7 do SUB14
“Pintores e mais pintores”

Nos primeiros 10 dias da obra, 8 pintores estiveram a pintar um hotel, e fizeram $\frac{10}{34}$ do trabalho.

10 dias depois de o trabalho ter começado, 24 pintores juntaram-se aos outros 8, formando uma equipa de 32 trabalhadores. $8 + 24 = 32$

Para resolver o problema, tive que formular a hipótese de que existiram sempre 32 pintores ao longo de toda a obra. Para isso, tive que fazer uma tabela com a relação entre o número de pintores e os dias que demoraram a concluir o trabalho. Descobri que era necessário utilizar a proporcionalidade inversa para poder completar a tabela.

nº de pintores	8	32
dias que demoram	34	x

$k = 8 \times 34 = 272$

$\chi = \frac{k}{32} = \frac{272}{32} = 8{,}5$

K é a constante de proporcionalidade inversa, ou seja, o produto das duas variáveis (o número de pintores e os dias que demoram a fazer a obra).

Se existissem sempre 32 pintores ao longo de toda a obra, eles demorariam 8,5 dias (8 dias e 12 horas) a pintar o hotel.

Mas o problema indica que 8 pintores já tinham feito $\frac{10}{34}$ do trabalho, e os 32 pintores só tinham que fazer $\frac{24}{34}$ do trabalho, visto que: $1 - \frac{10}{34} = \frac{34}{34} - \frac{10}{34} = \frac{24}{34}$

Portanto, para responder à pergunta do enunciado, precisamos apenas de saber quanto é $\frac{24}{34}$ de 8,5.

$$\frac{24}{34} \times 8{,}5 = \frac{204}{34} = 6$$

Passados 10 dias de a obra ter começado, os 32 pintores concluíram o trabalho em 6 dias.

Figura 6.5. Resolução do problema #7, edição 2011/2012

É essa a sua interpretação das regras: mostrar como pensou e tudo o que fez, utilizando uma linguagem matemática com muito rigor e o mais formal possível. Esta necessidade de formalização dos processos seguidos tem o objetivo de tornar a sua solução rigorosa do ponto de vista matemático tendo em conta aquilo que ela julga que é suposto que a sua solução contenha. Afinal, a sua resposta vai ser avaliada por professores de matemática num Campeonato organizado pelo Departamento de Matemática da Universidade do Algarve.

6.1.3 O papel dos instrumentos, com ênfase no GeoGebra, na atividade de Jéssica

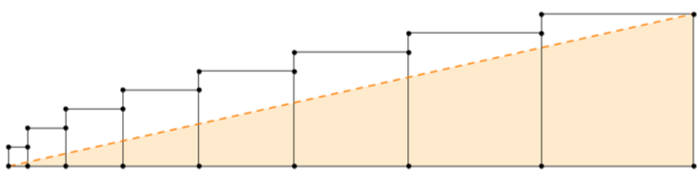
Embora não seja habitual resolver problemas do género dos problemas do SUB14 nas aulas, nem utilizar tecnologias para além da calculadora ou dos CDs que acompanham os manuais, Jéssica desenvolveu um gosto particular por resolver problemas desafiadores, bem como pelo uso de algumas ferramentas digitais, tais como o GeoGebra. O seu interesse por este ambiente de geometria dinâmica brotou das suas experiências na disciplina de matemática durante o 7.º ano, uma vez que a sua professora utilizava este programa com bastante regularidade em sala de aula para ilustrar conteúdos geométricos, tal como Jéssica refere por *e-email* (Figura 6.4).

> Jéssica: Como já disse usamos muito as tecnologias. Nós temos o quadro de… de caneta, e depois temos o quadro interativo. E utilizamos muito. Quando estivemos a dar geometria e isometrias utilizámos muito o GeoGebra.
>
> Investigadora: Quando dizes “utilizam”, é a professora que faz?
>
> Jéssica: Exatamente. E nós vemos.

Esta utilização frequente nas aulas motivou Jéssica a fazer o *download* do programa, a instalá-lo e a explorá-lo em sua casa, de forma autónoma. A jovem aprecia resolver problemas de geometria com o GeoGebra pois, tal como começa por afirmar, este programa permite-lhe melhorar o arranjo gráfico das suas soluções. No entanto, quando questionada sobre resoluções anteriores que submeteu ao campeonato e, mais concretamente, sobre a solução que desenvolveu com o GeoGebra para o problema ‘Unidos e Cortados’ (Figura 6.6), explica:

> J: Eu acho que fui direitinha ao GeoGebra. Sabia que era qualquer coisa de geometria, pronto! (…) vi que formava um triângulo, que isto formava um triângulo e que, pondo assim de uma maneira muito simples, era só fazer a área toda disto tudo e tirar a área do triângulo, que era fácil: base vezes altura sobre dois. E depois assim… «Ah, boa! Geometria! Vou por isto tudo direitinho!» [e aponta com orgulho para as suas construções em GeoGebra].

Ao cortarmos a figura pelo segmento de reta laranja, verificamos que a parte abaixo da linha é um triângulo retângulo, como mostra a figura seguinte:



A altura desse triângulo (que designei de triângulo A) é 8 centímetros, pois é a medida do lado do quadrado 8. A base do mesmo triângulo mede 36 centímetros, porque é a soma dos lados dos 8 quadrados.

Figura 6.6. Excerto da resolução do problema Unidos e Cortados, enviada por Jéssica

Os seus instrumentos de trabalho são, por norma, o computador (embora raramente imprima o enunciado), um bloco de notas, muitas canetas coloridas e uma calculadora. Jéssica descreve a sua abordagem a um novo problema da seguinte forma:

> J: Aaa… normalmente é sempre: primeiro bloco de notas e caneta, depois o Word e depois vou sempre a… vou sempre ao GeoGebra ou a outro programa para adicionar ao Word, para ficar assim um trabalho mais completo.
>
> I: Mas… só vais quando já resolveste?
>
> J: Sim, mas… também depende. Se o GeoGebra ou outro programa me ajudar a perceber melhor o problema, então vou primeiro a esse programa e depois é que apresento no Word.
>
> I: Ok, então também usas enquanto ainda não chegaste à solução…
>
> J: Sim, por exemplo, num dos quadrados, que é esse [Unidos e Cortados,] eu fui primeiro ao GeoGebra para perceber bem como é que aquilo era, e depois é que descobri 'Ah, aquilo faz um triângulo e depois é só tirar a área do triângulo'. Aí tive que ir primeiro ao GeoGebra para perceber melhor.

A forma como organiza os materiais e como utiliza as ferramentas aquando desta atividade sugere que a resolução e a comunicação da resposta levam Jéssica a procurar um programa em que ela possa fazer uso de uma linguagem mais formal para documentar ou mostrar o que construiu e/ou descobriu com o GeoGebra.

6.1.4 A divisão de estatuto na atividade de Jéssica

As relações que Jéssica estabelece com os restantes membros da comunidade evidenciam a existência e o reconhecimento de diferentes estatutos que acabam por marcar a sua atividade de resolução de problemas com tecnologias.

O teor das explicações que Jéssica incorpora nas suas resoluções revela que a jovem tem presente que o reportar dos seus processos não tem apenas a finalidade de se convencer a si própria de que estão corretas, mas visa sobretudo convencer um 'outro'. Esse 'outro' é alguém com características distintas das suas: é um dos *professores de matemática* que *integra a organização do SUB14* ou seja, alguém que domina os preceitos de 'fazer' e 'escrever' matemática, com todo o rigor que lhe está associado, mas é também alguém que tem o 'poder' para validar (ou não) a sua resposta pelo que pode garantir (ou não) a continuidade da sua participação no Campeonato. Assim, Jéssica reconhece autoridade académica aos membros da organização, em particular, à pessoa com quem troca correspondência eletrónica ao longo da fase de apuramento.

Apesar de as suas soluções conterem explicações bastante pormenorizadas, Jéssica é mais comedida nos textos dos *e-mails* que as acompanham. No entanto, a jovem faz-se ouvir junto da organização sempre que considera que deve fazer algum alerta oportuno. Para além da situação em que alertou a equipa sobre o eventual grau de dificuldade de um problema (Figura 6.4), Jéssica também reportou incorreções que detetou na publicação de listas de participantes que são divulgadas periodicamente com os resultados referentes a cada quinzena (Figura 6.7). Jéssica tem, portanto, uma voz junto da organização do Campeonato.

Resposta:
A resposta está anexada.
Queria só deixar aqui um recado à equipa do SUB14. Nas resoluções apresentadas ao problema 1, presentes no site, estão dois erros. Eu, [redacted], e o aluno [redacted], frequentamos a Escola Secundária [redacted], em [redacted] (ao contrário do que está escrito nas resoluções, que indica que frequentamos a ES/3 [redacted]).

Figura 6.7. Excerto do *e-mail* que acompanhou a resolução do Problema #3 da edição 2011/2012

A atividade de Jéssica é também fortemente marcada pela relação que manteve com a sua professora de matemática, durante o seu 7.º ano de escolaridade, e que coincidiu com a sua primeira experiência no SUB14. A professora não só a incentivou a concorrer, como acompanhou a sua participação ao longo desse ano letivo, ajudando a esclarecer dúvidas, fornecendo pistas e, inclusive, levando-a à Final na Universidade do Algarve. A professora foi uma aliada da Jéssica, nesta etapa.

Por fim, e embora Jéssica tenha utilizado com mais frequência o editor de texto Word para compor as suas soluções, o GeoGebra parece ter adquirido um estatuto de relevo na sua atividade de resolução de problemas de matemática. Quer isso decorra da abertura das regras de participação (que permitem e incentivam a utilização de qualquer ferramenta tecnológica), quer da experiência de sala de aula proporcionada pela sua professora, Jéssica confia no GeoGebra como uma ferramenta válida para resolver os problemas do SUB14.

6.1.5 A atividade usual de resolução de problemas com tecnologias no caso de Jéssica: uma síntese

Nas secções anteriores debrucei-me sobre os aspetos basilares que marcam a atividade de resolução de problemas com tecnologias, de Jéssica, no âmbito do SUB14, considerando que essa atividade é norteada pelo conjunto de regras estabelecidas entre os vários membros da comunidade em que a jovem se insere, reconhecendo ainda os diferentes papéis dos vários atores e das ferramentas de trabalho usadas na produção das soluções digitais dos problemas do Campeonato.

A atividade de Jéssica é motivada pela resolução de um problema que, sendo colocado no âmbito do SUB14, tem características diferentes e requer a mobilização de conhecimentos matemáticos distintos dos problemas que encontra em sala de aula. Nessa atividade, Jéssica mostra ser uma jovem com bastante sentido de responsabilidade, mas também muito versátil nas abordagens que desenvolve, com gosto por aprender e por mostrar que sabe. Responde sempre dentro do prazo; nas soluções que produz utiliza uma linguagem cuidada, rigorosa, dando preferência a aspetos formais característicos da matemática e valorizando o GeoGebra como ferramenta para conceber e apresentar algumas soluções de problemas. Interage com a equipa do SUB14, a quem reconhece autoridade académica, e junto de quem se faz ouvir, quando pensa ser oportuno. A professora assume um papel de aliada de Jéssica pois colabora, dando pistas ou dicas que ajudem a desbloquear alguma dificuldade, acompanhando-a à Final do SUB14, ou mesmo estimulando o gosto pelo GeoGebra que a jovem passa a ver como uma ferramenta de confiança para resolver problemas que envolvem conceitos geométricos. A mãe de Jéssica, embora não contribua de forma explícita na resolução dos problemas, acompanha de perto a participação da filha e também a acompanhou à segunda presença numa Final. Esta resolução de problemas de matemática é mediada por um conjunto alargado de ferramentas, algumas tecnológicas e outras digitais: o bloco de notas, canetas coloridas, a calculadora, o computador com aceso à Internet e programas como o Paint, o Word ou o GeoGebra, e ainda uma sintaxe específica – a linguagem matemática. Deste modo, considero que o produto que resulta desta atividade se pode qualificar como uma solução tecno-matemática.

Tendo mapeado os aspetos, os intervenientes e as características fundamentais do sistema de atividade que Jéssica integra (esquematizados na Figura 6.8), começa a emergir um esqueleto daquilo que aparenta ser a sua *abordagem usual* enquanto resolve problemas de matemática com tecnologia, isto é, enquanto faz uso de conhecimentos matemáticos e conhecimentos sobre as ferramentas que escolhe usar, em particular o GeoGebra, para desenvolver essas abordagens e expressar as suas conclusões.

A atividade de resolução de problemas de Jéssica começa, normalmente, fora do computador embora ela admita que as ferramentas digitais lhe permitem abordagens poderosas aos problemas. A sua perceção é a de que o GeoGebra assume dois papéis nesta atividade: possibilita a introdução de uma ilustração na sua explicação pormenorizada dos processos, o que está relacionado com o *exprimir* da solução, mas também estende e promove a compreensão dos objetos e conceitos geométricos envolvidos, o que está relacionado com o *resolver* o problema.

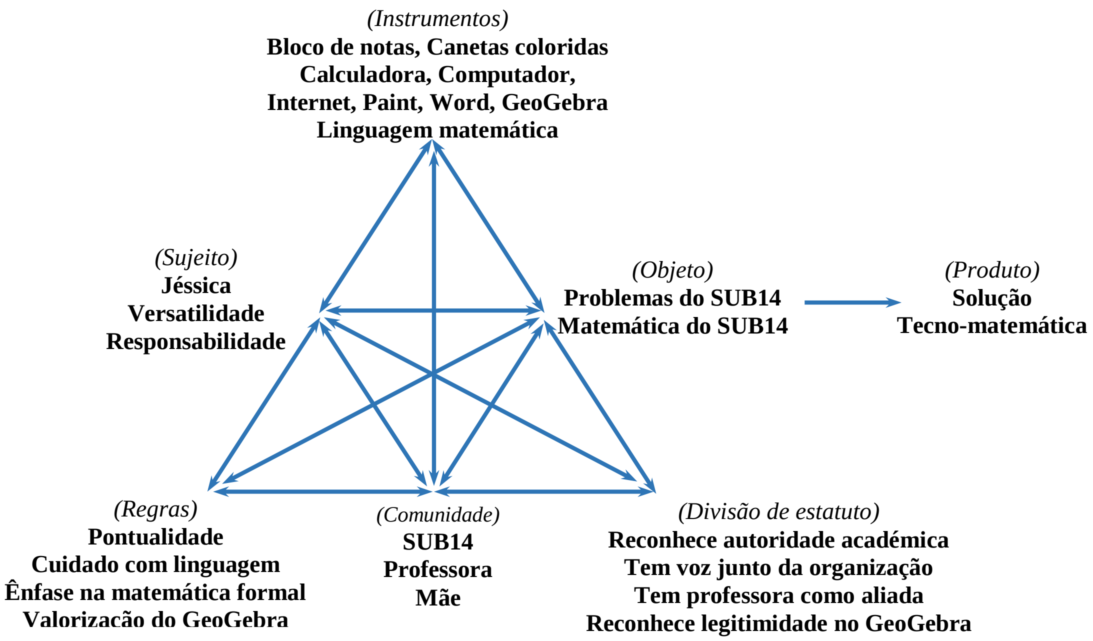


Figura 6.8. Atividade de Jéssica-com-ferramentas-de-geometria no contexto do SUB14

Nas suas abordagens usuais, Jéssica começa por fazer uma leitura rápida do problema procurando informações que lhe indiquem, quase de forma automática, o tópico matemático a que o problema diz respeito. Quando percebe que o problema se refere a noções geométricas, identifica, de imediato, o GeoGebra como o recurso digital apropriado para abordar o problema (*captar*). De seguida, a jovem faz uma primeira tentativa de compreender o que o problema envolve, ao identificar um repertório matemático e um repertório tecnológico – divide a área e identifica um triângulo (no caso do problema ‘Unidos e Cortados’, Figura 6.6), e apercebendo-se que o GeoGebra lhe permite construir figuras (*identificar*). Para além disso, a sua escolha parece baseada no reconhecimento de que o GeoGebra permite a precisão necessária para lidar com conteúdos de geometria, ou seja, sente-se capaz de executar e compreender determinadas ações neste contexto – determinar áreas de figuras planas ou subtrair a área de um triângulo (*interpretar*). Em seguida, Jéssica explora as possibilidades de ação que advêm da combinação de diferentes recursos materiais (e.g., o bloco de notas, as canetas coloridas, a calculadora, o GeoGebra, o editor de texto ou de imagens, o e-mail) e também recursos matemáticos (e.g., áreas, fórmulas, propriedades de figuras) no âmbito de uma abordagem exploratória (*integrar*). Tal como explica, por vezes, Jéssica pede ajuda à professora de matemática ou faz pesquisas no Google sobre um tópico relacionado com os problemas (*comunicar*).

Após este esboço dos processos de resolução de problemas com o GeoGebra que Jéssica desenvolve, e com o intuito de os retratar da forma mais completa possível, nas próximas secções apresento os passos seguidos pela jovem enquanto recorre a este programa para resolver e exprimir as suas soluções de problemas de geometria. A análise estará focada no topo do sistema de atividade (Figura 6.8) e será efetuada a partir da identificação dos processos de resolução de problemas de matemática com tecnologia (de acordo com o modelo RPMT).

6.2 Resolver-e-exprimir o problema ‘A marcação do canteiro’

O problema ‘A marcação do canteiro’ refere-se à modificação da forma triangular de um canteiro de flores e ao efeito que essa alteração eventualmente provoca na sua área (ver Capítulo 5, Secção 5.2.2). Um caminho possível para a solução fica a descoberto assim que se percebe que a vara, representada por $[EF]$, é o segmento que divide o triângulo EGH em dois triângulos mais pequenos, e pode ser considerada como a base de cada um desses triângulos (Figura 6.9).

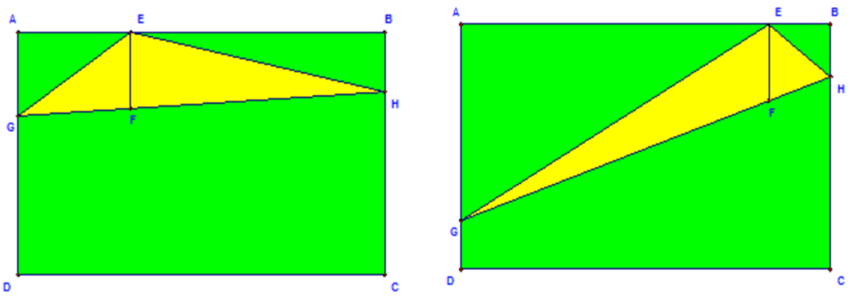
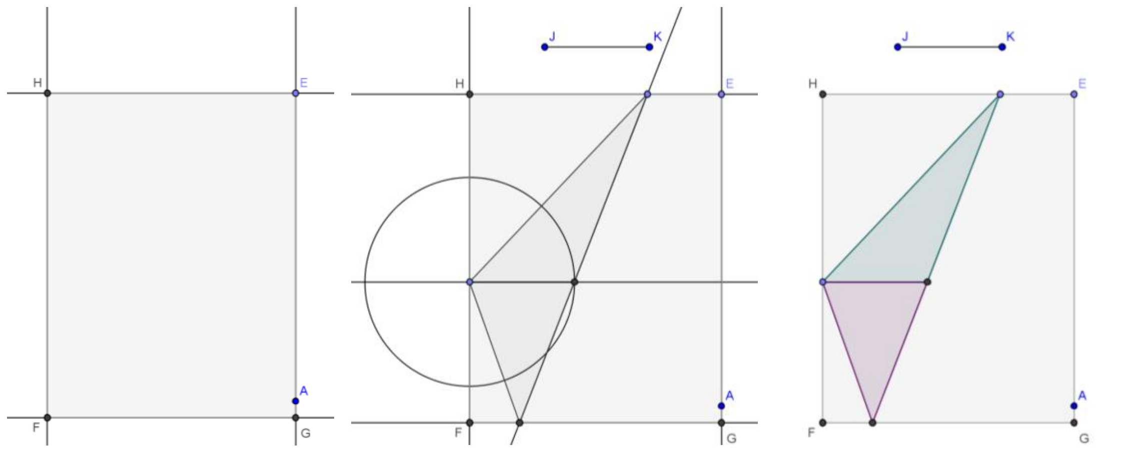


Figura 6.9. Figuras que acompanham o enunciado do problema ‘A marcação do canteiro’

Jéssica desenvolveu uma solução para este problema de geometria utilizando o GeoGebra e simulando a construção do jardim de relva retangular e do canteiro de flores triangular (Figura 6.10). A seguir, apresento os aspetos críticos da solução da Jéssica com base na análise do protocolo de construção e do texto escrito que submeteu ao SUB14 juntamente com o ficheiro GeoGebra.



(a) Construção do jardim retangular

(b) Construção do canteiro triangular

(c) Construção final

Figura 6.10. Três etapas da construção

6.2.1 Percebendo a natureza dinâmica da situação

Tanto a construção como a explicação apresentadas por Jéssica revelam uma abordagem ancorada no reconhecimento da natureza dinâmica desta situação. Na verdade, o enunciado fornece uma pista relativamente à influência da posição da vara no formato do canteiro triangular. A Jéssica também parece ter-se apercebido de que podia alcançar uma conclusão acerca do comportamento da área ao incorporar esse aspeto dinâmico na sua construção (*captar*). Ao decidir construir as figuras geométricas com o GeoGebra, revela perceber a utilidade de imprimir esta natureza dinâmica na construção e de simular uma experiência com uma ‘vara virtual’ que introduziu num ‘canteiro virtual’ (*identificar*).

De facto, a jovem sabe que o GeoGebra possibilita construções precisas e rigorosas do relvado retangular e do canteiro triangular. Mais importante ainda, o GeoGebra favorece uma compreensão clara da matemática envolvida no problema: permite simular a alteração da posição da vara por arrastamento, o que resulta numa transformação do formato do canteiro triangular sendo que, de imediato, também exibe as áreas dos polígonos na folha algébrica[30]. Portanto, o GeoGebra tem as características que são necessárias para simular dinamicamente a situação pelo que a manipulação das figuras fará gerar conjeturas sobre a solução e a sua prova (*interpretar*).

6.2.2 Construindo com o GeoGebra

Dando início à construção, Jéssica recorre a retas perpendiculares e às suas interseções para construir o jardim retangular, mantendo dois pontos móveis visíveis até ao final da construção, de forma a poder modificar as dimensões desta figura: o vértice superior direito, E, e um ponto no lado direito do retângulo, A (Figura 6.10a). Em seguida constrói um segmento exterior à figura, simulando um seletor, cujo comprimento é transportado para a construção geométrica utilizando uma circunferência para estabelecer o comprimento da vara. Este segmento exterior, $[JK]$, é um objeto geométrico novo que não é mencionado no enunciado do problema. Assim, Jéssica não só consegue alterar a posição da vara como também pode controlar o seu comprimento, possibilitando o aparecimento de uma abordagem exploratória da situação (*integrar*).

Passa então a completar a construção do triângulo utilizando as ferramentas do GeoGebra para criar pontos, linhas retas, segmentos e, por fim, um polígono – o canteiro triangular (Figura 6.10b). Em seguida, Jéssica decide construir dois triângulos menores e colori-los com cores diferentes (Figura 6.10c), o que indica que se terá apercebido de que a área do canteiro não se altera quando a vara é sujeita a arrastamento, possivelmente analisando a folha algébrica onde o GeoGebra exibe de forma automática a área de todos os polígonos construídos. Apesar de o protocolo de construção não registar qualquer tipo de manipulação, o dinamismo intencionalmente incorporado e a inclusão dos triângulos menores, em conjunto com a explicação escrita, sugerem que a análise do efeito do arrastamento de alguns objetos foi crucial para o reconhecimento de que a vara é um lado comum aos dois triângulos, portanto influenciando a construção de um modelo conceptual mais claro sobre a invariância da área do canteiro de flores (*explorar*).

[30] Por norma, no GeoGebra, a geometria e a álgebra coexistem lado-a-lado. À medida que se constroem entes geométricos na Folha Gráfica, as suas coordenadas e todas as outras condições que decorrem de relações entre eles vão sendo apresentadas na Folha Algébrica.

6.2.3 Matematizando a situação

O passo seguinte consiste em encontrar uma forma para explicar matematicamente o porquê de a área do canteiro ser invariante. Ao percecionar que a vara corresponde à base de cada um dos dois triângulos pequenos, Jéssica precisa de analisar as duas áreas de forma a compreender o comportamento da área do canteiro (*planear*). Assim, Jéssica recorreu à construção dinâmica como um novo objeto matemático para desenvolver um modelo conceptual da invariância da área, mas abandonou depois a atividade de construção geométrica para se envolver numa perspetiva analítica da situação em que usa a fórmula da área de um triângulo.

Efetivamente, a jovem constata que a soma das alturas dos dois triângulos mais pequenos coincide com a medida do comprimento do retângulo – uma nova compreensão matemática, potenciada pelo GeoGebra. Deste modo, Jéssica cria uma nova forma de olhar para e compreender a invariância da área (*criar*).

6.2.4 Explicando e exprimindo a solução

A construção é tão fundamental para a solução como a explicação e os cálculos: são criados enquanto a Jéssica explora a figura e utiliza manipulação simbólica para demonstrar matematicamente a invariância da área (Figura 6.11). A sua solução compreende a construção tecno-matemática e os resultados matemáticos, isto é, através da manipulação algébrica das áreas ela oferece uma prova da sua conjetura (*verificar*) no âmbito da sua atividade de resolver-e-exprimir o problema. Jéssica submete a construção geométrica e a explicação escrita, o que indica que procura responder ao apelo que consta nas regras de participação no sentido de ser necessário apresentar uma justificação clara do raciocínio bem como uma descrição detalhada dos processos seguidos (*disseminar*).

> Resposta:
> O triângulo amarelo (zona de flores) está dividido em dois triângulos pela vara de 2 metros que o jardineiro colocou. Sabemos que a base desses dois triângulos mede 2 metros _ o comprimento da vara.
>
> Para medir a área de um triângulo, fazemos a seguinte conta: altura x base / 2
>
> Para medir a área desses dois triângulos, será então: altura x 2 / 2. Ora, está claro que 2 / 2 = 1, portanto, a área desses dois triângulos é igual à sua altura.
>
> Podemos afirmar que a soma das alturas dos dois triângulos é igual ao comprimento do rectângulo (jardim de relva). Portanto, a área da zona das flores é igual ao comprimento do jardim de relva rectângular.
>
> Se o comprimento do rectângulo (jardim de relva) não muda, então a área do triângulo (zona de flores) também se mantém. Por outras palavras, a Rosa tem razão.

Figura 6.11. Explicação escrita enviada pela Jéssica por *e-mail*

É ainda de sublinhar que nem todos os objetos construídos estão efetivamente visíveis no ficheiro. Em dado momento da atividade, que não é possível especificar dado que o protocolo de construção não o regista, a jovem ‘limpa’ as construções recorrendo à ferramenta ‘Propriedades dos Objetos’ para esconder alguns elementos geométricos que foram usados como suporte de outros; por exemplo, as retas sobre as quais assentam segmentos, ou as circunferências que foram apenas usadas para fixar o comprimento de um segmento. Jéssica sabe que estas construções auxiliares são essenciais e não podem ser eliminadas apesar de já terem servido o seu propósito. Logo, ela percebe um duplo propósito nesta *possibilidade para a ação*: por um lado, esconder um objeto reduz o número de entidades visíveis e foca a atenção naquelas que são realmente necessárias; por outro lado, limpar a construção torna-a mais elegante, simples e compreensível para aqueles que vão apreciá-la. Assim, a ferramenta ‘Propriedades dos Objetos’ é um recurso usado para resolver, mas é também um importante recurso para exprimir a solução.

6.2.5 Sinopse dos processos de resolver-e-exprimir o problema ‘A marcação do canteiro’

A Figura 6.12 resume de forma esquemática os aspetos do trabalho de Jéssica durante os vários processos de resolução-e-expressão do problema ‘A marcação do canteiro’. Dado que a análise foi efetuada tendo por base o ficheiro em formato GeoGebra e o texto escrito que o acompanhou, considero que os processos decorreram na íntegra no ambiente digital, não havendo evidências de a jovem ter comunicado com outros de relevo durante essa sua atividade, pelo que o processo de comunicação não é incluído no esquema.

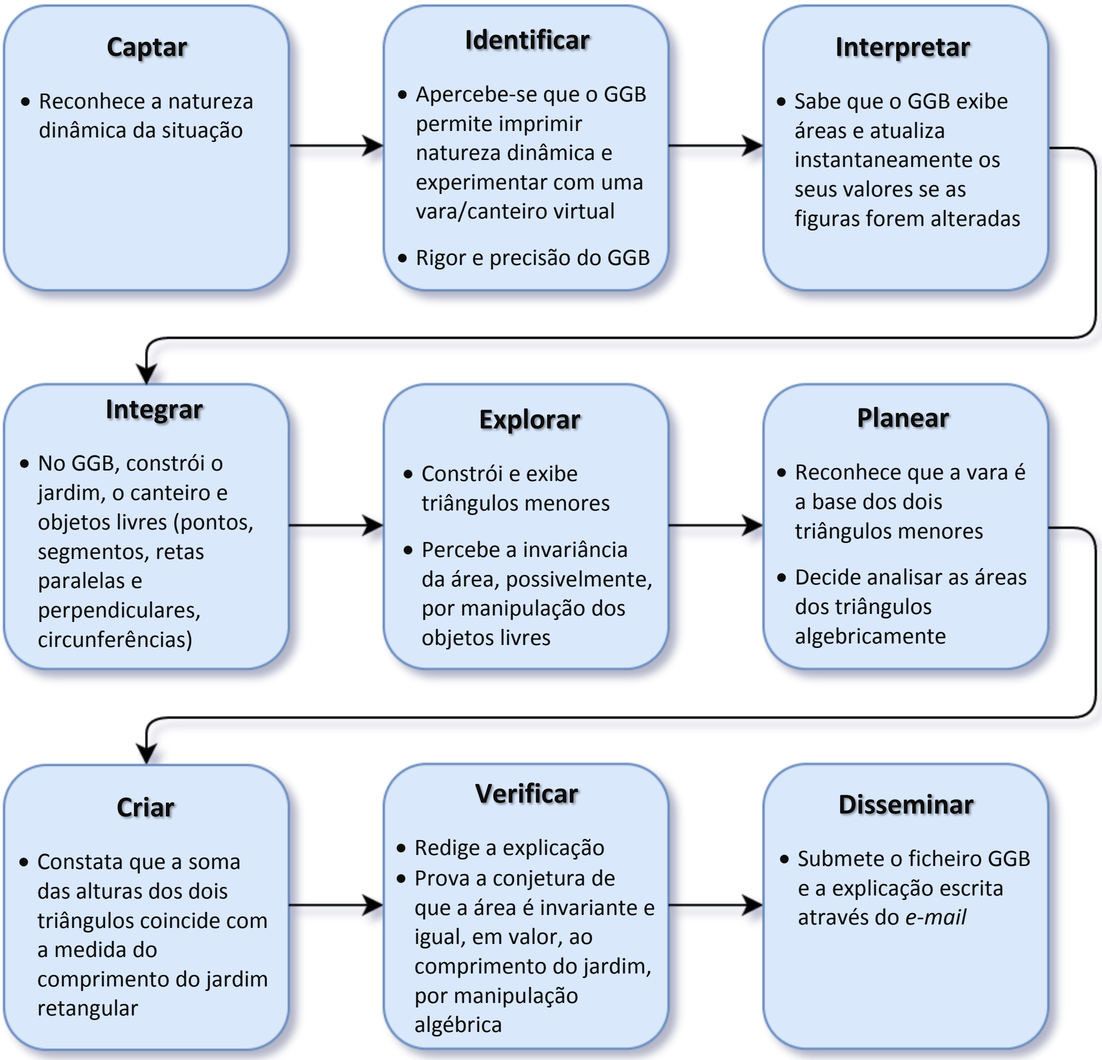


Figura 6.12. Processos de Jéssica-com-ferramentas-de-geometria a resolver-e-exprimir o problema 'A marcação do canteiro'

6.3 Resolver-e-exprimir o problema 'Um quadrado dividido'

O problema 'Um quadrado dividido' requeria a determinação da área de um quadrado presente numa configuração composta por quadrados de várias dimensões (ver Capítulo 5, Secção 5.2.3). Uma abordagem matemática convencional a este problema seria relacionar os comprimentos de cada tipo de quadrado usando um sistema linear de equações e resolvendo uma equação quadrática para encontrar a área pedida.

O ficheiro enviado por Jéssica contém a construção geométrica da figura dada, bem como uma descrição dos processos seguidos, incluindo a determinação da área (Figura 6.17). O facto de Jéssica ter decidido fazer uma construção revela que abordou o problema fazendo uma primeira leitura das condições e apercebendo-se que, de algum modo, teria que determinar a área ocupada pelos 14 quadrados amarelos para obter a solução (*captar*). É esta a génese da ideia subjacente ao modelo conceptual da situação. Além disso, ela sabe como usar o GeoGebra com um propósito matemático dado que já o utilizou antes na competição e já viu a sua professora utilizá-lo para ensinar noções geométricas. Deste modo, a Jéssica tem acesso material e conceptual ao GeoGebra pois sabe que este programa permite construções rigorosas de figuras geométricas que irão contribuir para a obtenção da solução (*identificar*). Isto quer dizer que a jovem é capaz de construir uma composição similar à dada no enunciado, ao recorrer aos seus conhecimentos de geometria euclidiana e trabalhando com o conhecimento matemático embutido no GeoGebra. Na verdade, ela parece usar o GeoGebra como um emulador de ferramentas euclidianas: utiliza ferramentas para criar retas paralelas ou perpendiculares, a ferramenta para criar circunferências é usada como um compasso para definir comprimentos. Sabe como construir um quadrado utilizando régua e compasso, como dividir um segmento em duas partes iguais, que são *affordances* muito importantes do GeoGebra para obter esta construção (*interpretar*).

Na subsecção seguinte apresento os aspetos críticos desta solução que Jéssica desenvolveu, considerando a sua subdivisão em três microproblemas: primeiro, a construção dos quadrados à direita; em seguida, a dos quadrados inferiores; e, por fim, a construção dos quadrados à esquerda.

6.3.1 A construção inicial e a sequência de construções a seguir

Como apenas existe uma relação explícita no enunciado – o lado do quadrado colorido maior é ¼ do lado do quadrado inicial – este facto parece determinar a sequência de ações que Jéssica irá desempenhar. Começa por criar o quadrado inicial que suporta toda a construção (Figura 6.13), inscrevendo-o numa circunferência (usando dois diâmetros perpendiculares) com um raio de comprimento variável e dependente do segmento CD (o que lhe permite manipular a figura no seu todo). Encontra os vértices do quadrado inicial e utiliza a ferramenta ‘Polígono’ para construir o quadrado envolvente. Fazendo uso de outras ferramentas do GeoGebra, divide o lado direito do quadrado em quatro partes iguais ao encontrar pontos médios de forma recursiva.

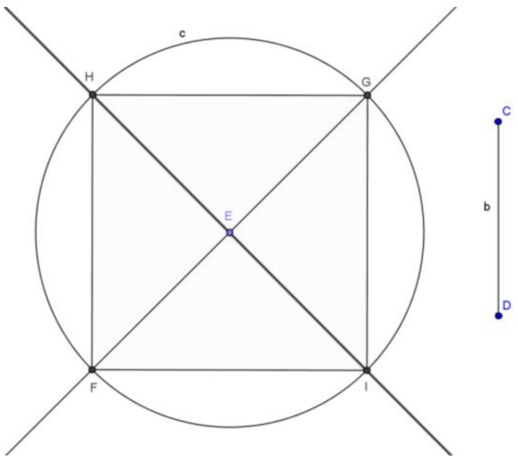


Figura 6.13. Construção do quadrado inicial

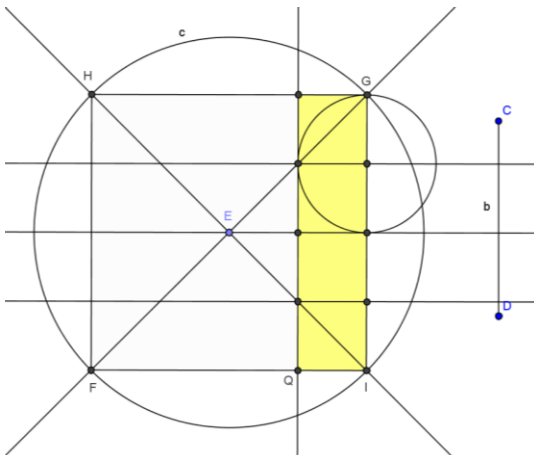


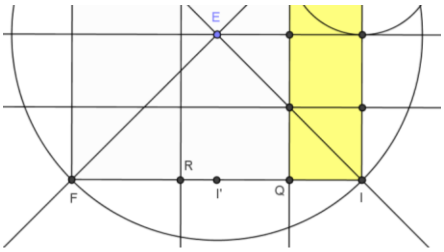
Figura 6.14. Construção dos quadrados maiores.

Utilizando o ‘compasso’, retas perpendiculares e paralelas, identifica os vértices dos quatro quadrados coloridos à direita e completa a construção destes polígonos ao colori-los de amarelo (*integrar*). Isto significa que Jéssica não só tem presente as propriedades geométricas de um quadrado (lados de comprimento igual e ângulos retos), como também conhece a linguagem implícita da ferramenta que escolheu usar: o GeoGebra só reconhece uma figura geométrica como um polígono, permitindo a determinação da sua área por exemplo, se o seu interior estiver incluído. Neste momento, para além de já conseguir visualizar os quatro quadrados amarelos (Figura 6.14), Jéssica também os consegue utilizar para dar continuidade à construção dos restantes quadrados dado que pode contar com o rigor da construção que o GeoGebra proporciona (*explorar*).

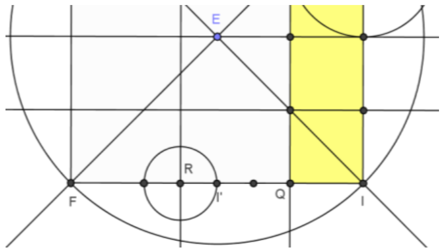
6.3.2 Continuando a construção

Este ‘microproblema’ requer a divisão de um segmento de reta em seis partes iguais, o que não é um procedimento matemático trivial. Como está patente na Figura 6.15a, Jéssica usa a ferramenta das transformações geométricas para construir uma reflexão do vértice inferior direito do quadrado amarelo, I, em torno do vértice esquerdo do mesmo quadrado, Q, obtendo assim uma forma de dividir o segmento que irá conter os seis quadrados menores em seis partes (*integrar*). Isto revela a sua compreensão da construção e das relações que abarca: enquanto quatro quadrados amarelos ocupam um lado do quadrado inicial e um desses quadrados já se encontra representado no lado inferior da construção, o restante segmento FQ só poderá conter outros três desses quadrados amarelos (*explorar*). Portanto, se três quadrados amarelos justapostos ocupam o mesmo comprimento do que seis quadradinhos azuis, facilmente se depreende que a relação entre os comprimentos dos seus lados é de 2:1.

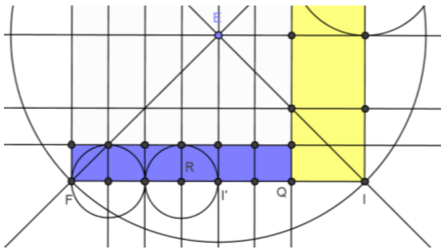
Ao usar pontos médios e circunferências (Figura 6.15b), Jéssica obtém a divisão do segmento inferior do quadrado inicial em seis partes iguais. Continua a usar retas paralelas e perpendiculares e a ferramenta de construção de polígonos para construir efetivamente os quadrados inferiores, que são os de menores dimensões (Figura 6.15c).



(a) Reflexão do vértice do quadrado amarelo



(b) Divisão do segmento em seis partes



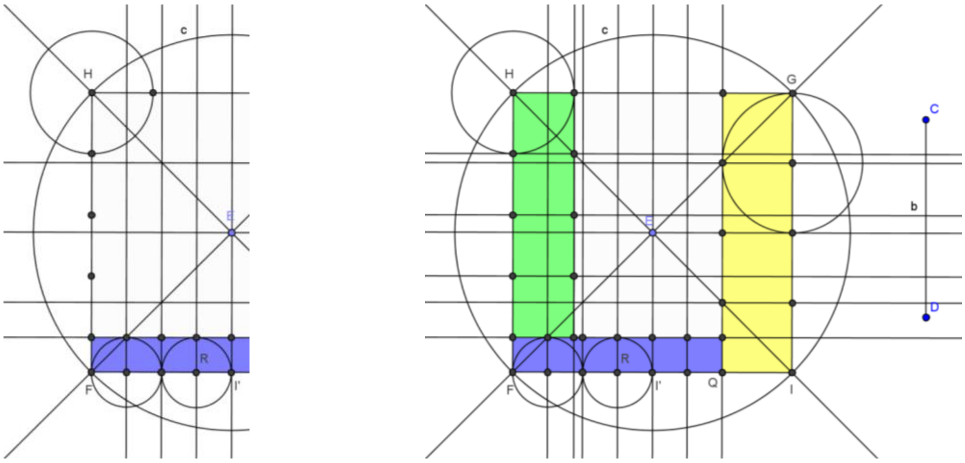
(c) Construção dos quadrados inferiores azuis

Figura 6.15. Três etapas da construção dos quadrados menores

6.3.3 Concluindo a construção

Em seguida, Jéssica tem que dividir o segmento sobrante à esquerda em quatro partes iguais (Figura 6.16a) e fá-lo através da determinação de pontos médios: primeiro o ponto médio do segmento e, depois da sua divisão em dois novos segmentos, determinando o ponto médio de cada um eles. Utilizando, uma vez mais, a ferramenta 'Circunferência' como um compasso para fixar um comprimento específico, traçando retas perpendiculares e paralelas e os seus pontos de interseção (*integrar*), Jéssica constrói os quadrados médios à esquerda (Figura 6.16b).

O protocolo de construção mostra então que Jéssica pintou o retângulo interior de vermelho e reconstruiu alguns segmentos. Esta última ação significa que ela decidiu esconder alguns objetos geométricos que estariam a sobrecarregar a construção, tal como retas ou circunferências, mas que foram úteis para a construção de outros e, como tal, não poderiam ser eliminados.



(a) Divisão do segmento à esquerda em quartos

(b) Construção dos quadrados verdes à esquerda

Figura 6.16. Construção dos quadrados médios

Ao passo que uma análise do enunciado não torna óbvia uma forma de obter uma construção idêntica no GeoGebra, imaginar um caminho para a construção é uma parte fundamental do processo de exploração que resulta numa compreensão tecno-matemática, crucial para resolver o problema: à medida que a figura é criada, as relações entre os lados dos vários quadrados vão surgindo. Novamente se observa que o GeoGebra não só faculta uma construção rigorosa de uma figura geométrica mas, mais importante, põe a descoberto as proporções entre aqueles objetos geométricos. Está, pois, a transformar o que era invisível e estava escondido ‘dentro’ da figura apresentada no enunciado, em ideias visíveis e usáveis no desenvolvimento de uma abordagem para resolver-e-exprimir o problema (*explorar*).

6.3.4 Identificando as proporções relativas

A etapa seguinte consiste em realçar alguns aspetos do seu trabalho, o que Jéssica consegue ao acrescentar quadradinhos ao longo do exterior do lado direito do quadrado inicial e dois quadradinhos abaixo, e ainda algumas circunferências cujos centros dividem o lado do quadrado menor em quatro partes (Figura 6.17). Estes itens enfatizam a perceção visual das relações existentes entre os comprimentos dos lados das várias figuras geométricas, algo que não é possível deduzir com rigor apenas através da observação ou análise da imagem apresentada no enunciado. Aliás, a análise da conjetura que Jéssica foi amadurecendo, permitiu-lhe um afastamento da construção geométrica e uma incursão numa abordagem algébrica (*planear*).

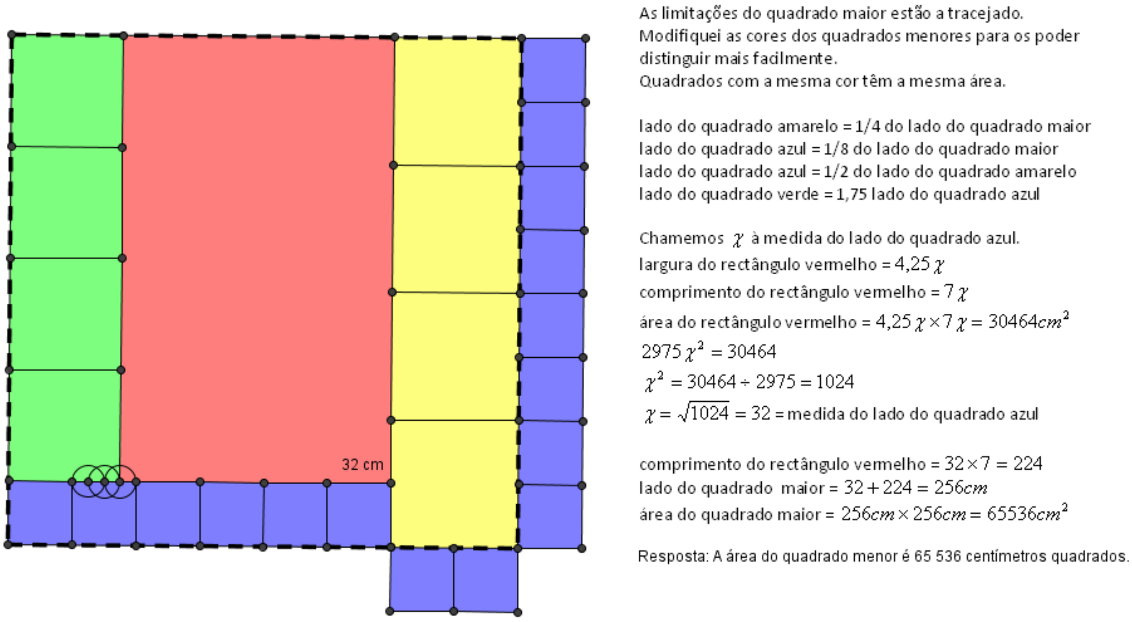


Figura 6.17. Fotografia da solução submetida pela Jéssica em GeoGebra

6.3.5 Trazendo cálculo algébrico a partir das proporções

Ao lado direito da construção (Figura 6.17) Jéssica acrescentou um texto que serve como uma 'legenda' que guia na interpretação dos seus processos e tem o propósito de tornar mais explícita a forma como desenvolveu o seu plano.

Começa por explicar o significado dos entes geométricos que acrescentou e da formatação que usou. Regista depois as relações entre os comprimentos dos lados dos quadrados, que ela encontrou durante a atividade de construção. Em seguida, define como incógnita o comprimento do lado do quadrado menor e, usando as relações previamente encontradas, formula uma equação que lhe irá permitir chegar ao valor dessa incógnita. Com esse valor encontra o lado do quadrado maior bem como a sua área, obtendo assim a resposta ao problema. Deste modo, Jéssica desenvolve e implementa a sua abordagem ao conferir um aspeto matemático (define variáveis e relações entre elas, escreve e resolve uma equação de 2.º grau incompleta, determina áreas) ao modelo conceptual que desenvolveu para a situação (*criar*).

6.3.6 Explicando e exprimindo a solução

A referida legenda não só apresenta a justificação para a solução alcançada, como também exibe os processos de resolução-e-expressão através da combinação de recursos tecnológicos e matemáticos (*verificar*). A descrição textual incluída ao lado da construção é uma evidência do processo de expressão no sentido em que, para além de documentar todos os procedimentos, ajuda a compreender o porquê de existirem outras construções exteriores ao quadrado inicial e de como foram úteis durante o processo de resolução. Todavia, estes ‘aspetos de formatação’, tais como a alteração de cores para realçar conjuntos específicos de quadrados ou usar diferentes tipos de limites, como o tracejado, e que podem estar associados à ‘expressão’ da solução, na verdade têm um significado matemático no sentido em que são extremamente relevantes para a construção da solução. Tanto o seu propósito como o seu significado estão relacionados com a compreensão que Jéssica desenvolve acerca da situação e com o delinear de um plano para obter a solução, pelo que não visam somente relatar aquilo que foi feito.

A *disseminação* ocorre quando a Jéssica submete o ficheiro GeoGebra como resposta ao problema colocado pelo SUB14. Dado que esta análise se centra no ficheiro GeoGebra submetido e no protocolo de construção subjacente, não existem evidências de Jéssica ter comunicado com outros de relevo durante a atividade de resolução-e-expressão deste problema.

6.3.7 Sinopse dos processos de resolver-e-exprimir o problema ‘Um quadrado dividido’

Na Figura 6.18 apresento uma esquematização da sequência de processos que foram desenvolvidos por Jéssica para resolver-e-exprimir este problema. Relativamente a cada um dos processos foram identificados os aspetos críticos que permitiram a codificação, embora de forma condensada. À semelhança da anterior, esta solução também não foi objeto de observação presencial, pelo que a síntese diz respeito à análise do ficheiro submetido por Jéssica complementada com a análise das várias etapas do seu trabalho registadas no protocolo de construção. Não existem evidências de Jéssica ter comunicado com outros de relevo durante a sua atividade, pelo que o processo de comunicação não é incluído no esquema.

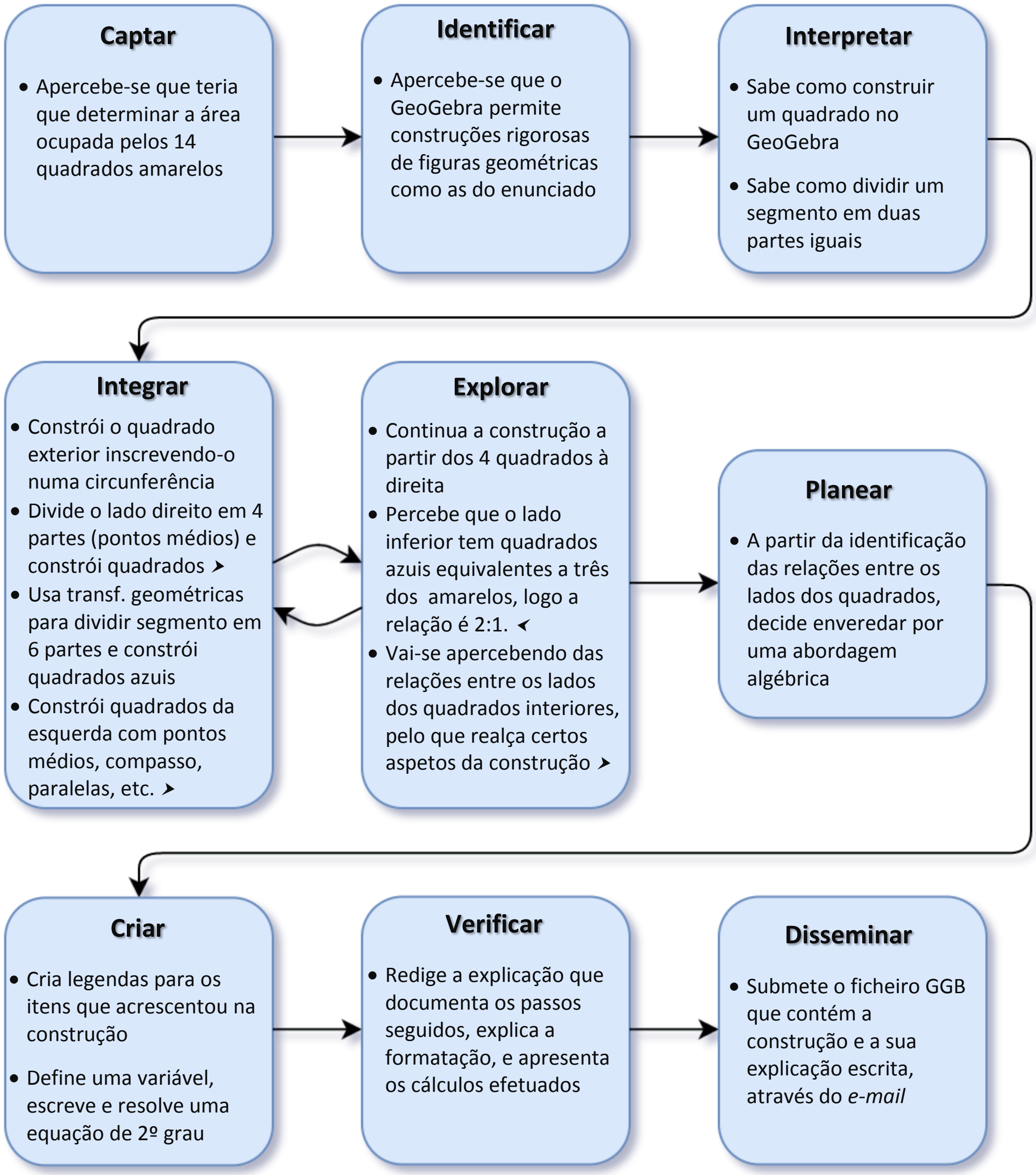


Figura 6.18. Processos de Jéssica-com-ferramentas-de-geometria a resolver-e-exprimir o problema 'Um quadrado dividido'

6.4 Discussão e síntese de resultados

Ao longo deste capítulo procurei ilustrar as diversas facetas da atividade de resolução de problemas com ferramentas de geometria levada a cabo por Jéssica nas fases de apuramento do campeonato SUB14. Este caso, tal como já foi explicitado, surge de uma estreita articulação entre o desenvolvimento do quadro conceptual e a análise dos dados recolhidos que dizem respeito a esta participante, despontando aqui uma ideia de organização coerente que será transposta para os restantes casos, não impedindo naturalmente as adequações que se sentirem necessárias.

A atividade de resolução de problemas de Jéssica demarca-se, em primeiro lugar, pelas suas características pessoais que transparecem nas suas produções e das suas interações com os elementos do seu sistema de atividade: o seu grande sentido de responsabilidade; o cumprimento escrupuloso de prazos e demais regras; ou o uso de uma linguagem cuidada, rigorosa que articula texto com aspetos mais formais da matemática recorrendo com frequência à notação algébrica. Jéssica faz uso de uma diversidade de ferramentas para resolver e exprimir os problemas, mas é no GeoGebra que identifica as *affordances* apropriadas para desenvolver as suas abordagens a problemas que envolvam noções de geometria.

Apesar da aparente indiferença que Jéssica demonstra relativamente ao papel que as tecnologias desempenham na sua atividade de resolução de problemas, a jovem gosta de mostrar que conhece a linguagem própria da era digital e que é capaz de usar uma multiplicidade de ferramentas, aprendizagens motivadas na Escola mas que decorreram sobretudo à sua conta, muito para além da sala de aula. A jovem reconhece e responde a uma grande diversidade de convites para a ação com o GeoGebra e é a partir dessa utilização, em simultâneo com o recurso a conceitos matemáticos, que vai aprofundando a compreensão das situações e deslindando um caminho para a sua resolução. Assim, este caso ilustra a complexidade da simbiose que Borba e Villarreal (2005) descrevem a partir da metáfora 'humanos-com-media'. Dado que o foco da análise recaiu sobre as resoluções produzidas com o GeoGebra, estamos perante uma entidade que se pode denominar 'Jéssica-com-ferramentas-de-geometria' no sentido em que se observou que a construção de um modelo conceptual de cada solução decorre de uma estreita articulação entre o conhecimento matemático da jovem, sobretudo geométrico mas também algébrico e analítico, e o conhecimento das ferramentas usadas, nomeadamente, do GeoGebra.

Embora a atividade de Jéssica a resolver problemas não tenha sido alvo de observação direta, as soluções analisadas contêm indícios de que resolver o problema e exprimir a solução não são ações disjuntas e de que a jovem nem sempre as executa de forma intencional em momentos distintos. Por exemplo, em ambas as soluções, Jéssica opta por 'limpar' as suas construções ao esconder alguns elementos geométricos que serviram de suporte à construção e cuja visibilidade já não é necessária, embora não possam ser eliminados. Esta opção não só facilita o desenvolvimento da sua abordagem como já permite ir conferindo um aspeto mais limpo e mais elegante, tornando a solução mais compreensível. Para além disso, a construção de novos objetos que não são mencionados no enunciado – o segmento de reta que simula um seletor, no primeiro problema, ou as construções exteriores e a formatação, no segundo problema – contribui de forma decisiva para encontrar a solução mas também se tornam numa parte fundamental de cada solução pois permitem reconstruir um roteiro (Lesh & Doerr, 2013) das abordagens de Jéssica. Deste modo, as construções e as explicações de Jéssica-com-ferramentas-de-geometria parecem ser elementos fundamentais para resolver-e-exprimir estes problemas.

6.4.1 Evidências de pensamento geométrico na atividade de Jéssica

Durante a resolução dos problemas, o GeoGebra é usado por Jéssica para construir figuras e para aprofundar a sua compreensão das situações. Como não há evidências de ter recorrido ao GeoGebra para fazer medições, este começa por assumir um papel de ferramenta-para-construir mais do que uma ferramenta-para-medir. Cada solução só é considerada completa após a inclusão de justificações detalhadas nas quais Jéssica explica o seu raciocínio e salienta então os cálculos que, do seu ponto de vista, são necessários, ou seja, os que visam 'demonstrar' a veracidade das suas descobertas.

A elevada fluência de Jéssica-com-ferramentas-de-geometria revela-se na forma como responde aos convites para agir com o GeoGebra, isto porque começa por percecionar uma certa relevância e até conveniência no uso de um ambiente de geometria dinâmica para representar as situações descritas. Para além de efetuar construções imediatas (pontos, segmentos, linhas retas), Jéssica também reconhece a necessidade de usar construções referenciais (tais como linhas paralelas e perpendiculares, ou fixar um dado comprimento com recurso ao compasso e transportá-lo para novos objetos), de alterar algumas propriedades de objetos (escondendo alguns, alterando cores, usando o tracejado) e, inclusive, elaborando construções usando parâmetros (como o segmento que simula um seletor). A perceção deste conjunto variado de *affordances* visa realizar ações no GeoGebra que lhe permitam obter figuras 'robustas', isto é, figuras cujas propriedades geométricas que foram intencionalmente incorporadas permanecem inalteradas após a manipulação de certos elementos que as compõem.

Outra evidência do seu pensamento geométrico pode encontrar-se na primeira solução analisada em que Jéssica parece antever que a reprodução das imagens e ideias estáticas apresentadas no enunciado possam ser transformadas em imagens e ideias dinâmicas, oferecendo uma maior liberdade na sua manipulação. À semelhança do que Leung (2008) descreve, é a partir destas imagens e ideias que se constroem e desenvolvem modelos conceptuais que partem de ideias informais mas passam a incorporar noções geométricas formais. Na verdade, num primeiro momento, a invariância da área do triângulo poderá não ser óbvia, mas a representação da situação no GeoGebra desencadeia o aparecimento de um modelo conceptual que compreende, simultaneamente, a perceção da vara como a base partilhada entre os dois triângulos interiores menores e o cálculo das áreas correspondentes. Daqui dá-se o desenvolvimento de um modelo conceptual para resolver o problema, pelo que a construção executada com o GeoGebra induziu a obtenção de uma prova daquela solução.

É ainda de destacar que a partir da construção e da visualização de modelos geométricos, Jéssica elabora conjeturas e faz generalizações combinando observações com conhecimentos formais para justificar ou elaborar uma prova. É o caso da primeira solução em que a construção respeita as condições do enunciado mas o uso de um segmento para simular um seletor, a existência de um ponto móvel que permite regular as dimensões do jardim e a ausência de medições ou cálculos, sinalizam a intencionalidade da jovem em formalizar e generalizar. O mesmo acontece na segunda solução, quando a elaboração das construções dos vários tipos de quadrados permite que Jéssica encontre relações entre os vários objetos, que eventualmente suscitam uma abordagem algébrica assente na resolução de uma equação do 2.º grau. O GeoGebra não só permitiu a visualização de transformações e de relações geométricas como fez surgir conjeturas e generalizações, tal como Baccaglini-Frank e Mariotti (2010) já salientaram.

Por fim, a manipulação da variável ‘altura’ de cada triângulo menor resultante da alteração da posição da vara, numa solução, e a definição de uma variável com base na constatação de comprimentos relativos e escrita de uma equação, na outra, sugerem atividades de matematização vertical. É a capacidade de desenvolver pensamento geométrico durante a realização de construções com o GeoGebra e a análise dos objetos geométricos que permite a Jéssica passar de um ‘modelo de’ cada situação, ancorado em cada contexto, a um ‘modelo para’ explicar cada solução de um ponto de vista matemático – o que Jones (2000) denominou por matematização progressiva.

6.4.2 Resolver-e-exprimir problemas de matemática com tecnologia

A primeira abordagem de Jéssica a cada um dos problemas do SUB14 consiste em procurar apropriar-se do tópico matemático a que cada situação se refere e que, nos casos analisados anteriormente, diz respeito a conceitos, regras ou procedimentos relacionados com geometria (*captar*). Esta tentativa inicial para apreender aquilo que está em jogo em cada problema leva-a a aperceber-se de uma associação entre a geometria e o GeoGebra e, mais adiante, entre o seu repertório matemático e o seu repertório tecnológico (*identificar*). Além disso, a escolha que Jéssica faz depende da sua capacidade para perceber as *affordances* da tecnologia digital para ponderar uma abordagem matemática à solução, ou seja, para interpretar o significado tecno-matemático veiculado por essa abordagem (*interpretar*).

Tanto o relato produzido por Jéssica, ao recordar os seus processos de resolução de problemas da competição, como a análise dos protocolos de construção sugerem que o alcançar de uma compreensão plena do problema e a decisão sobre as ações a tomar para resolvê-lo têm a sua génese nos processos iniciais da sua atividade, mas não se limitam a essas etapas. Enquanto trabalha em cada problema, Jéssica pode *comunicar* com outras pessoas relevantes, tais como a professora de matemática ou a organização da competição, ou ainda pesquisar informações na Internet, tal como a própria relata. Apesar de este processo ter sido considerado na análise, é oportuno reiterar que a comunicação não emergiu nos dados relativos às soluções produzidas com o GeoGebra, apresentadas e analisadas anteriormente.

Em seguida, Jéssica conjuga diferentes recursos tecnológicos (ferramentas euclidianas do GeoGebra, propriedades dos objetos, objetos dependentes, modo de arrastamento) e recursos matemáticos (conhecimentos de geometria plana, que permitem construir figuras, manipular construções dinâmicas e operar sobre elas) que ela integra desenvolvendo uma abordagem exploratória da situação (*integrar*). Então, examina cada situação ao executar as construções que desencadeiam a análise de conjeturas e o esboço de um caminho que poderá conduzir à solução (*explorar*). A partir deste processo exploratório, Jéssica sintetiza as ideias chave que se tornam parte do plano que a levará à solução (*planear*). Ao recombinar os recursos tecno-matemáticos, a jovem gera novos objetos de conhecimento, tais como estratégias, representações, modelos conceptuais (*criar*), e envolve-se na explanação e justificação da solução – o que compreende o processo de *verificação*. Por fim, Jéssica reporta os processos seguidos, isso é, a sua atividade de resolução de problemas mediada por tecnologias, tendo como destinatários os organizadores do campeonato SUB14. Esta *disseminação* do seu trabalho inclui a submissão dos ficheiros elaborados em GeoGebra bem como uma explicação detalhada e clara dos seus processos de resolução-e-expressão de cada problema.

O modelo proposto interliga os processos de resolução de um problema matemático com os de resolução de uma tarefa digital, o que requer a combinação de conhecimento matemático e conhecimento tecnológico. A eficácia desta combinação para resolver os problemas matemáticos reside na perceção das *affordances* das ferramentas selecionadas e na capacidade da jovem para resolver-e-exprimir cada problema.

6.4.3 Evidências de Fluência Tecno-matemática de Jéssica

O caso de Jéssica-com-ferramentas-de-geometria oferece evidências de como uma ferramenta digital fomenta uma abordagem tecno-matemática para encontrar uma solução e exprimi-la, ilustrando assim algumas facetas da complexidade da simbiose a que Borba e Villarreal (2006) se referem.

A fluência tecno-matemática de Jéssica emerge à medida que se revelam os vários processos de resolução-e-expressão, desde o *captar* até à *disseminação* da solução, o que sustenta o argumento de que este tipo de sofisticação no uso de ferramentas digitais permeia as várias etapas do processo de resolução de problemas e não unicamente a fase que diz respeito ao relatar desse processo.

Esta participante reconhece e responde a uma vasta gama de possibilidades de ação (*affordances*), que a levam a identificar o GeoGebra como uma ferramenta utilizável e útil para criar uma solução tecno-matemática. A perceção daquilo que é capaz de fazer, quando potenciada pelo GeoGebra (e.g., construções imediatas ou referenciais, definição de propriedades, construções com parâmetros), exemplifica quão fluente ela mostra ser no uso desta ferramenta, como o seu pensamento geométrico flui através de e é moldado pelo GeoGebra, e como ela se expressa por meio de um *dialeto* tecno-matemático (Crockett, Jukes, & Churches, 2012; Papert & Resnick, 1995).

Para além disso, Jéssica reconhece o papel relevante que as construções geométricas desempenham na conceção de um possível caminho para a solução. Este caso mostra que o papel inicialmente atribuído ao GeoGebra – o de ferramenta-para-construir

– rapidamente se transforma quando passa a assumir um papel de ferramenta-para-criar a solução: no primeiro exemplo, a construção robusta aliada à variação dinâmica dos objetos conduz a uma perspetiva mais ampla do problema proposto, estendendo várias das suas condições iniciais e permitindo uma generalização; já no segundo problema, é a atividade de construção que permite uma apropriação das relações entre os comprimentos dos lados dos vários quadrados. Assim, a atividade de construção desencadeia ideias matemáticas poderosas que Jéssica utiliza para reformular ou criar novas formas de conhecimento (Barron, Martin, & Roberts, 2007). Jéssica usa o GeoGebra de forma tão eficiente que as construções fazem emergir as estruturas conceptuais subjacentes ao processo de obtenção e apresentação da solução. Elas tornam-se parte do raciocínio, do processo e da própria solução.

É ainda manifesto que Jéssica estabelece uma conexão dialética entre o seu conhecimento relativo a noções geométricas e o conhecimento matemático embutido no GeoGebra. É através desta relação simbiótica (Borba & Villarreal, 2005) entre o uso de conceitos matemáticos e das representações digitais produzidas com o computador, na sua maioria visuais, que a jovem alcança níveis mais profundos de compreensão dos problemas e cria procedimentos para obter as soluções.

À luz da teoria discutida, o reconhecimento das possibilidades de ação com uma ferramenta, o GeoGebra, e a articulação com as suas aptidões pessoais constituem a origem da fluência tecno-matemática de Jéssica. A evidência da fluência tecno-matemática emerge dos processos de resolver-e-exprimir problemas com tecnologia e pode ser caracterizada pela capacidade em combinar dois tipos de conhecimentos e capacidades – matemáticos e tecnológicos – que estão constantemente a ser interligados para desenvolver um pensamento tecno-matemático, ou seja, novas formas de conhecer e compreender, bem como a sua efetiva comunicação fazendo uso de um discurso tecno-matemático.

Em suma, a fluência tecno-matemática de Jéssica evidencia-se pela utilização simultânea de conhecimentos matemáticos e tecnológicos para efetuar construções robustas, percecionar como estas podem conduzir às soluções, para formular conjeturas sobre as soluções idealizadas e ensaiar provas matemáticas. Os modelos conceptuais desenvolvidos afastam-se da visualização de casos particulares e aproximam-se do mundo da abstração, revelando traços de uma matematização vertical. Nas suas soluções, as construções começam por encerrar um ‘modelo de’, dado que inicialmente exibem casos particulares, mas são já pensadas de forma a desencadearem o tratamento algébrico e se transformarem em ‘modelos para’, num caso um modelo para provar a invariância da área de uma figura e, no outro, num modelo para determinar a área pedida. A fluência tecno-matemática manifesta-se na utilização do GeoGebra e de conhecimentos matemáticos para encontrar a solução e fazer prova da sua veracidade.

7

Marco -com-Ferramentas-de-Visualização

Uma das primeiras preocupações que eu tive em relação ao Marco foi tentar ensiná-lo a dactilografar!

(Pai de Marco)

Marco: Dados de identificação

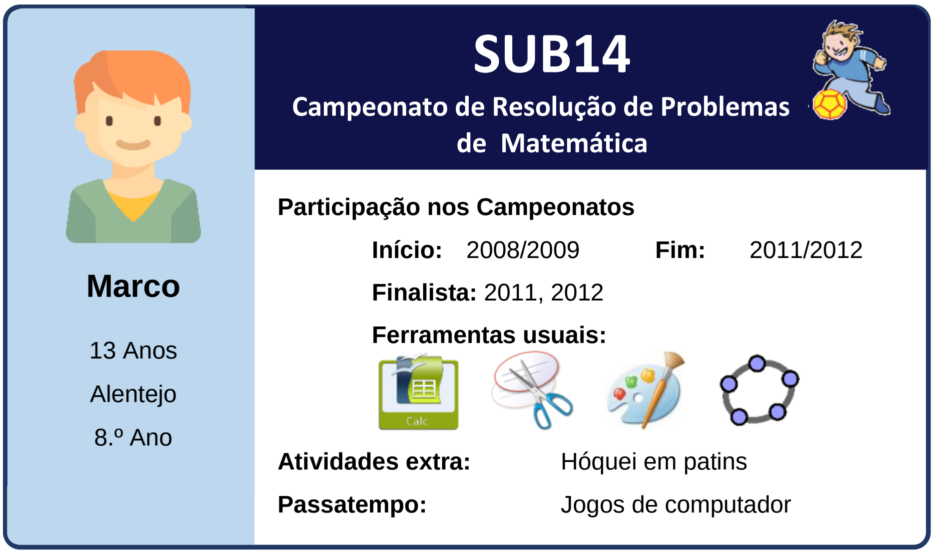


Figura 7.1. Dados de Identificação de Marco

Marco é um jovem de 13 anos que participou em todas as edições dos Campeonatos de Matemática enquanto lhe foi possível: nas duas edições do SUB12 (nos seus 5.º e 6.º anos) e nas duas edições do SUB4 que decorreram durante o seu 7.º e o seu 8.º ano de escolaridade. Na escola, tinha excelentes resultados no 7.º ano, mas no 8.º ano começou a baixar as notas. Gosta muito de jogar jogos de vídeo e tem vários computadores à disposição em casa.

O passatempo preferido de Marco é jogar no computador, atividade que o ocupa a maior parte do tempo livre, embora também pratique hóquei em patins como atividade extracurricular. O pai receia mesmo que ele esteja viciado nos jogos de computador e que seja essa a razão de um certo desinteresse pelo estudo que vem a notar com a descida das notas no 8.º ano. A profissão do pai requer um domínio de muitas questões informáticas, pelo que vai 'armadilhando' os vários computadores para impedir o Marco de aceder à Internet por quantidades de tempo longas ou a partir de certas horas da noite. Todavia, o Marco encara esses obstáculos como desafios e diverte-se a contornar os sistemas do pai, ao encontrar as *passwords* para desbloquear o acesso à Internet ou para reiniciar o computador após um bloqueio automático predefinido. O pai lembra que esta apetência para os computadores já vem de tenra idade em que o Marco parecia aprender ao vê-lo usar certos programas.

> Pai: Ele pouco andava, teria 3 anos. Fiz um trabalho em que estive a ajeitar umas imagens. Entretanto gravei, fechei o Paint para ele não mexer e fui jantar ou almoçar, já não sei. Entretanto o [Marco] diz 'papá, estou a jogar'… Eu fui ver e tinha o Paint aberto e estava lá a fazer uns riscos. Pensei que tinha duas sessões e é fácil ter uma sessão aberta, carrega numa e vai lá. Mas eu fechei tudo para ele não mexer... para não me estragar o trabalho, como é que isto podia ser? Sentei-o no colo e disse-lhe: 'vai lá jogar agora'. E ele foi a todos os caminhos e foi lá, e eu fiquei... esta está boa!

Na última edição do SUB14 em que participou, o Marco foi o único representante da sua escola. O seu melhor amigo também participou durante o 7.º ano, mas a família não o deixou ir à Final e ele acabou por desistir. Entretanto, este amigo teve um acidente grave que, de acordo com os pais, afetou bastante o Marco.

Ao longo das duas edições, Marco apresentou as suas soluções numa diversidade de formatos, que revelam que domina diversas ferramentas informáticas. A que utiliza com mais regularidade é a folha de cálculo, normalmente a do OpenOffice, mas também chegou a usar o Excel do Microsoft Office. Respondeu a alguns problemas, redigindo a sua explicação do processo de resolução no corpo do *e-mail*, para outros construiu figuras com esquemas, e ainda utilizou o GeoGebra em duas resoluções.

Na edição de 2011/2012, Marco teve ajuda de familiares para responder a vários dos problemas propostos e contou com o apoio da professora para responder ao único problema de que gostou "pouco" e que achou "difícil", o problema #9 – 'O preço certo das garrafas' (Anexo H), tendo utilizado um sistema de duas equações com duas incógnitas para encontrar a solução.

A família de Marco atribui os resultados obtidos na disciplina de matemática à mudança de professor. No 7.º ano, ainda com o programa de matemática de 1991, o professor 'explicava tudo muito bem' e depois propunha a resolução de muitos exercícios. O Marco gostava desse trabalho pois era muito rápido e resolvia sempre antes dos colegas. Era aluno de nível 5. Mostra orgulho nessa sua faceta enquanto recorda que o professor tinha de levar sempre mais exercícios para ele e o colega de carteira.

> Marco: O professor ainda estava a explicar a matéria e a gente já estava a pedir outro [exercício] ao professor. O professor costumava… nas aulas, à parte, para a gente, trazia outro. O que a gente fazíamos [sic] na brincadeira, era competições. O professor dava-nos os problemas e cronometrava [para ver] quem é que fazia os problemas mais rápido.

O pai de Marco, quando era aluno, também gostava muito de resolver problemas. Em certa medida, a sua experiência aproxima-se da que Marco relata, não só por ambos revelarem voracidade em resolver problemas e exercícios nas aulas, como por encararem essa atividade como uma competição.

> Pai: Eu até gostava de resolver problemas, fazia quase como que um campeonato com… com a professora. Ela passava-me dez problemas e eu tentava fazer no tempo mais curto possível e dizia à professora: "professora já acabei!" e ela dava-me mais.

Todavia, o pai reconhece que, atualmente, o trabalho na escola é muito diferente do que se lembra do seu tempo: em vez de ser tão "massivo", no sentido de intensivo e repetitivo, que só alguns conseguiam, é mais "diversificado", ou seja, é mais abrangente, são promovidas tarefas com graus de dificuldade diferentes que podem chegar a mais alunos.

> Pai: O [Marco] enquanto aluno tem bastante facilidade em aprender embora depois mais tarde... ou na escola não lhe é pedido para fazer trabalhos de casa, ou estudo isolado, acho que ele não faz e não sei porquê, não percebo. Não o vejo praticamente a estudar. Sei que há testes e eu estou sempre a perguntar: [Marco] tens algum teste? 'Ah, vou ter amanhã ou depois', Vejo que ele estuda nessa altura.

Agora, no 8.º ano, as coisas são diferentes: a professora de Marco, mais jovem, dá poucas explicações e espera que eles resolvam e trabalhem de forma mais autónoma em tarefas onde o Marco não se sente tão à vontade (isto no âmbito do programa de matemática de 2007). Desceu para nível 3. O pai fala de uma "falta de alimentação constante" para se referir a não haver tempo para propor baterias de exercícios de aplicação. Nas aulas, a professora inicia cada assunto com uma tarefa proposta para trabalho de pares, normalmente problemas que Marco identifica como sendo parecidos com os que são propostos no SUB14, embora surjam associados a matérias específicas.

Investigadora: [Nas] aulas de matemática vocês resolvem problemas parecidos com estes do SUB14?

Marco: O mais parecido que tivemos foi o do tanque [Anexo H] que houve agora no SUB14, fizemos nas equações também, parecido...

I: Não é habitual aparecerem problemas desse tipo?

M: Hum... é habitual, mas depende de cada matéria. Nas equações aparece um problema que a gente resolve com as equações.

I: Então e vês problemas noutras matérias sem ser nas equações?

M: Vejo. Há, há. Há problemas... ainda não demos tratamento de dados, mas há em todos... no início de cada matéria há sempre um problema.

7.1 A atividade de resolução de problemas com tecnologias

Este primeiro contacto com o Marco revela um jovem muito curioso e muito competitivo. O seu grande à-vontade com as tecnologias, em parte cultivado pelas experiências em casa a tentar contornar as regras de utilização de Internet ditadas pelo pai, associadas a algum trabalho que lhe é proposto pela professora de 8.º ano na aula de matemática, repercutem-se na diversidade de ferramentas que utiliza para participar no SUB14, sendo que a mais comum é a folha de cálculo, mas também conhece bem o GeoGebra.

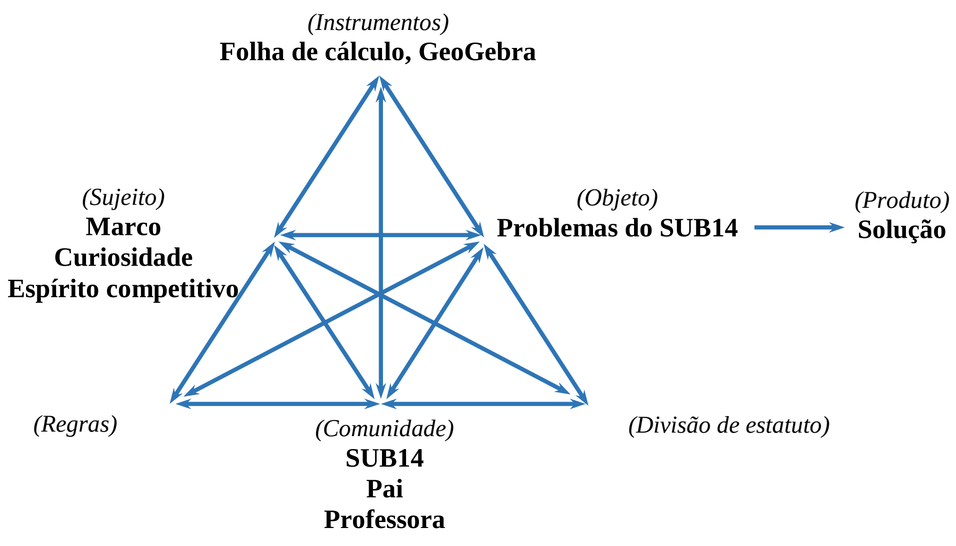


Figura 7.2. Primeiro esboço da atividade de Marco no contexto do SUB14

7.1.1 As relações com a comunidade na atividade de Marco

A comunidade no seio da qual Marco desenvolve a sua atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias engloba a organização do SUB14, o seu pai e, embora esta apenas intervenha pontualmente, a sua professora de matemática.

A relação de Marco com o professor da equipa do SUB14 que receciona e aprecia as suas resoluções é cordial mas descontraída. Por algumas vezes, na segunda edição do Campeonato, o Marco foi convidado a reformular as suas soluções. Acedeu prontamente aos pedidos e reviu as suas respostas, contando para isso com o apoio de familiares, mais concretamente do pai. “A resposta ao problema está no anexo” foi uma das frases mais comuns nos *e-mails* enviados por Marco para a organização, embora também tenha enviado pedidos de esclarecimento e de correção da informação constante nas tabelas de apuramento de cada jornada (Figura 7.3).

Bom Dia,

Não sei se os senhores estão a confundir a minha resposta ao PROB 5, mas eu não me chamo Martim, e verifiquei na listagem geral que está como "NR".

Obrigado
[redacted]
Nº Camisola - [redacted]

Figura 7.3. Mensagem eletrónica enviada por Marco ao SUB14

O pai de Marco é uma forte influência no jovem. Nesta atividade, o pai não só lembra prazos, como esclarece dúvidas ou ensina a utilizar programas específicos, por exemplo, a folha de cálculo. Noutras ocasiões, o pai também resolve os problemas do Campeonato no computador, encarando-os como um desafio pessoal, chegando mesmo a disputar a solução com Marco. Sublinha o facto de não facilitar a resolução ao filho e que acaba por procurar uma estratégia mais formal, por exemplo com recurso a equações, para que no final possam comparar as duas abordagens e correspondentes soluções.

> Pai: Eu às vezes, quando faço, resolvo no computador e ponho [o ficheiro] oculto… Mas não tento facilitar quando ele pede ajuda . . . Às vezes tento de uma maneira simples, mas se não consigo resolver eu sei que há [maneiras]... tem que se resolver através de equações . . . Ele está a fazer a resolução dele e eu tento ir, fazer uma resolução próxima daquela que ele está a tentar fazer [para] ver se chegamos ao mesmo resultado. É como uma prova real... [risos]

A professora de matemática de 8.º ano pouco intervém na atividade de resolução de problemas de Marco no âmbito do SUB14. Na verdade, a sua intervenção pode ser considerada como ‘indireta’, no sentido em que o Marco acaba por trazer para o Campeonato algumas das experiências de aprendizagem proporcionadas pela professora em sala de aula (como o trabalho com o Excel ou com o GeoGebra). De forma direta, e que o Marco tenha reconhecido, a professora colaborou apenas na resolução do problema

#9 – 'O preço certo das garrafas' (Anexo H) em que Marco representou a situação através de um sistema de duas equações e duas incógnitas e resolveu-o pelo método de substituição.

7.1.2 As regras de participação na atividade de Marco

O Marco conhece bem as regras estabelecidas pela organização do SUB14 pois já participa nos Campeonatos há quatro anos. Talvez por isso as encare com alguma descontração sobretudo no que diz respeito ao cumprimento de prazos pois nem sempre submete os problemas até à sua data limite.

> Pai: [Marco], já saiu o problema? Já enviaste o problema? 'Ah, ainda não enviei... e olha, já terminou há uma semana'! É assim... Eu estou mais preocupado do que ele!

Na verdade, a organização do SUB14 é bastante tolerante com esta questão dos prazos devido à necessidade de aguardar pelas reformulações das resoluções incorretas ou incompletas dos participantes. No entanto, tal como o pai refere, Marco também se esquece de verificar, no *e-mail*, o *feedback* dado às suas resoluções, mas explica que isso não se deve a falta de interesse ou gosto pela resolução do problema, mas antes a uma certa inércia em "entrar no problema".

> Pai: Ele depois de começar a resolver o problema interessa-se, dá uma série de soluções e tudo. Mas até começar… a entrar no problema, a ir ver como é o problema, demora *n* tempo! . . . Depois de mandar a resposta esquece-se de ver se a resposta está certa ou não…

O Campeonato incentiva o recurso a qualquer estratégia de resolução e admite qualquer formato de ficheiro como suporte das soluções submetidas, desde que seja apresentada uma explicação clara e detalhada do processo de resolução seguido. Estes factos são bem conhecidos do Marco. As resoluções que o jovem submeteu ao longo das duas edições do SUB14 revelam a utilização de diversas ferramentas tecnológicas: desde a folha de cálculo, que é a sua favorita, passando pelo GeoGebra, pelo MSPaint, tendo também submetido uma digitalização de uma solução escrita numa folha de papel pelo que se sente confortável em utilizar estas ferramentas para resolver os problemas que envolvem noções matemáticas. Porém, a última regra mencionada acima é encarada por Marco com alguma flexibilidade pois parece investir em explicações textuais dos seus procedimentos. Ao invés de oferecer justificações matemáticas, com muito formalismo ou simbolismo, Marco prefere recorrer às potencialidades das ferramentas para se expressar visualmente, construindo esquemas ou tabelas, e utilizando a cor como forma de relacionar ou sublinhar aspetos importantes do seu trabalho (Figura 7.4 e Figura 7.5).

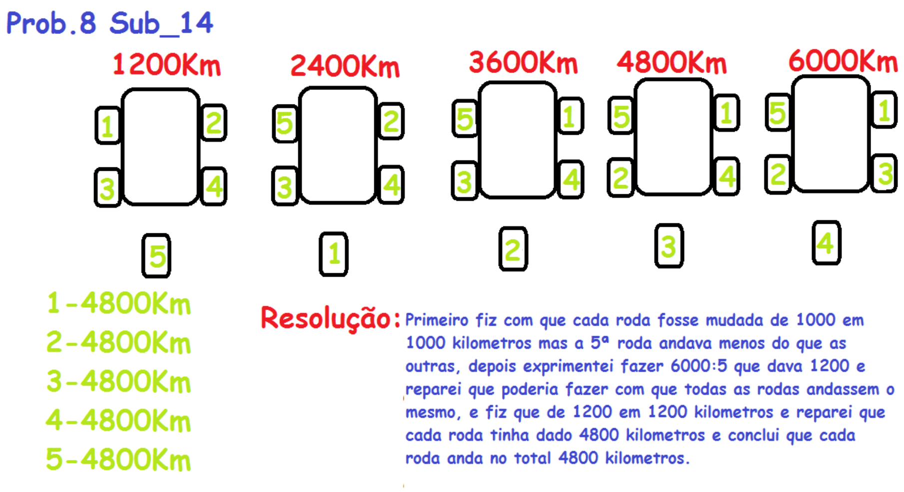


Figura 7.4. Resolução do problema #8 da edição 2010/2011, elaborada em MSPaint

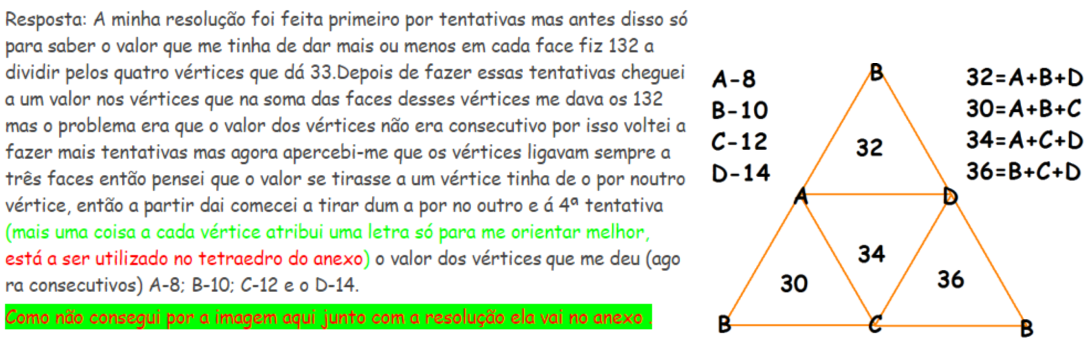


Figura 7.5. Resolução do problema #3 da edição 2010/2011, e imagem construída com o MSPaint

O à-vontade com o GeoGebra parece ter nascido da experiência de sala de aula. A professora de 8.º ano utiliza algumas ferramentas tecnológicas, tendo preparado várias aulas em que os alunos trabalharam com aplicações informáticas numa sala de computadores. No entanto, Marco valoriza sobretudo o acesso à Escola Virtual e ao GeoGebra e recorda uma dessas aulas em que estiveram a estudar translações.

> I: Então e em relação à tecnologia... usas tecnologias na aula de matemática?
>
> M: Algumas vezes vamos para a sala e a professora, quando estavamos a dar os vetores, fomos para uma sala de computadores e com o GeoGebra todos estiveram a fazer.
>
> I: E fizeram o quê?
>
> M: Fizemos triângulos, [a professora] deu-nos um triângulo, depois fazíamos translações com vetores.
>
> I: Mesmo com o GeoGebra?
>
> M: Sim, aprendemos a ir lá e a fazer [translações] com vetores.

7.1.3 O papel dos instrumentos, com ênfase na folha de cálculo, na atividade de Marco

Conforme tenho referido, Marco revela uma grande apetência para tudo quanto está relacionado com tecnologias digitais. Quando não sabe ou não consegue resolver algum problema que lhe surja, pesquisa na Internet. Foi o caso em que não conseguia resolver uns problemas que a professora pediu como trabalho de casa e acabou por procurar na Internet um programa que resolvesse equações, tendo verificado que a solução do manual não estava correta.

A folha de cálculo é o suporte que prefere para resolver os problemas do SUB14. Embora tenha sido o pai quem lhe deu a conhecer a folha de cálculo Calc, ensinando-lhe algumas fórmulas essenciais, também utilizou o Excel na sala de aula de matemática quando trabalhou conceitos de Organização e Tratamento de Dados.

> M: Aaa... quando a gente demos a matéria da estatística, a gente utilizámos o Excel porque esse Excel até tem uma coisa: quando a gente queremos fazer a fórmula da soma ele fazia e até aparece logo aqui as fórmulas todas, enquanto neste aqui que eu tenho, não. Aparecia e depois eu também confundia porque lá na escola, eu estava habituado a este e depois lá na escola aparecia o Excel.
>
> M: Também é mais fácil de fazer as coisas no Excel. Se a gente precisarmos de fazer uma conta.... normalmente eu não tenho problemas, mas tenho colegas que têm problemas em fazer as reduções… conversões, [o Excel] faz logo automático, e as outras coisas como tabelas e isso, pomos um cálculo, pomos ali e a partir dali para baixo aquilo faz as coisas. Enquanto a gente no papel perdemos muito tempo a escrever e se nos enganarmos temos de fazer outra vez.

O jovem encontra no Calc uma diversidade de *affordances* que não estão unicamente relacionadas com o cálculo (por exemplo, as reduções), mas também com a possibilidade de criar listas numéricas contendo relações entre variáveis, com a facilidade com que organiza informação em tabelas, ou ainda com a possibilidade de construir esquemas mantendo regularidades entre os vários componentes.

Noutras soluções submetidas, a utilização de fórmulas elementares, como por exemplo a multiplicação dos valores contidos em duas células (“=A4*B4”, na Figura 7.6), ou ainda o recurso a fórmulas com um nível de complexidade superior (e.g., “=POTÊNCIA(E22;2)*D22/2” como a Figura 7.7 ilustra), revelam um conhecimento da sintaxe característica da folha de cálculo e da sua adequação às intenções matemáticas de Marco durante a resolução dos problemas.

C4 =A4*B4

Soraia	Irmão	Producto das idades	Diferença do producto das idades	Producto das idades mais 288
1	4	4	126	292
2	5	10	144	298
3	6	18	162	306
4	7	28	180	316
5	8	40	198	328
6	9	54	216	342
7	10	70	234	358
8	11	88	252	376
9	12	108	270	396
10	13	130	288	418
11	14	154	-154	442
12	15	180	-180	468
13	16	208	-208	496
14	17	238	-238	526
15	18	270	-270	558
16	19	304	-304	592
17	20	340	-340	628
18	21	378	-378	666
19	22	418	-418	706

Resolução:Primeiro determinei as hipóteses do producto das idades de ambos.Depois verifiquei por tentativas qual a diferença entre o producto da idade daqui a nove anos que me desse o valor 288.Verifiquei então que a Soraia tem 10 e o seu irmão 13 anos e que daqui a 9 anos a Soraia tem 19 anos e o seu irmão 22 anos e que os productos das idades são 130 e (130 + 288= 418).

Figura 7.6. Resolução em folha de cálculo do Problema #4 da edição 2010/2011

F22 =POTÊNCIA(E22;2)*D22/2

Prob. 2 Na minha escola aprendi que o Pi vale 3,14 espero que compreendam porque não pus o resto do valor do Pi.

Resolução: A primeira coisa que fiz foi descobrir a área da semi-circunferência de 20 cm de diâmetro,fiz 20 : 2 que dá 10 ,depois fiz 10x10 que dá 100, 3,14(Pi) :2 dá 1,57 então 100x1,57= 157 então a área de todas as cores é 157 mas o que interesa é a área do maior arco verde para isso eu tenho de saber a área das cores da semi-circunferência de 18 cm para o ponto A então fazemos 18:2 que dá 9x9 que dá 81, 81x1,57 que dá 127,17 então para saber a área do último traço verde fazemos 157-127,17 que dá 29,83 mas nós para sabermos a diferença dos traços verdes para o vermelhos então ntemos de descobrir a área do último traço verde ,fazemos 16:2 que dá 8 depois 8x8 que dá 64,1,57x64 dá 100,48 então para dár a área do último traço vermelho fazemos 127,17-100,48 que dá 26,69 então para sabermos a diferença de áreas entre os traços verdes e vermelhos fazemos 29,83-26,69 que dá 3,14 mas temos de saber a diferença entre todos os traços verdes e vermelos então fazemos 3,14x5 (multiplicamos por 5 porque há 5 traços de cada cor) que dá 15,7 então a diferença de áreas entre os traços vermelhos e verdes .

	PI	r	A	AV	AE	
V	3,14	10	157	29,83		
E	3,14	9	127,17		26,69	
V	3,14	8	100,48	23,55		
E	3,14	7	76,93		20,41	
V	3,14	6	56,52	17,27		
E	3,14	5	39,25		14,13	
V	3,14	4	25,12	10,99		
E	3,14	3	14,13		7,85	
V	3,14	2	6,28	4,71		
E	3,14	1	1,57		1,57	
				86,35	70,65	15,7

Figura 7.7. Resolução em folha de cálculo do Problema #2 da edição 2010/2011

Quando questionado sobre o processo usual de recorrer à folha de cálculo para resolver os problemas do SUB14, Marco começa por explicar que não imprime o enunciado mas grava-o no computador (o site do Campeonato permite fazer download de uma versão *pdf* de cada problema). Continua, referindo que identifica o problema que está a resolver e cola o enunciado num conjunto de células que agrupa e, a partir daí, "começa a resolver", o que sugere que, normalmente, Marco resolve os problemas sem recorrer a outras ferramentas tecnológicas exteriores ao computador.

I: E... em que parte é que entra o computador? É logo desde o início?

M: É. Pego no computador e costumo fazer sempre: abro o... não é o Excel, é o Oppen Office Calc, é outro, então abro, vou ao problema, copio o enunciado, ah...

> uno as células que for preciso para ficar como deve de ser e depois a partir daí começo a resolver. Vou para lá logo para não ter que estar a mudar de página se for preciso qualquer coisa.

Quando questionado sobre a utilização da folha de cálculo para resolver o Problema #8 – 'Enquanto dura a bateria' (Anexo H), Marco explica que a primeira ideia que lhe ocorreu foi construir um gráfico composto por duas linhas retas que iriam intersetar-se (Figura 7.8).

> M: … pensei logo no gráfico porque era fazer com que as retas se cruzassem. Portanto, agora se eu pusesse os valores iguais... neste programa… a gente abre, clica no gráfico com os valores e [o Calc] faz logo o gráfico automático e houve um problema aí que eu pus os valores ao lado uns dos outros e... [as retas] iam subindo e não se cruzavam. Então tive que trocar os valores, pus ao contrário. E deu-me esta.

A sua descrição das interações com o Calc sugere que Marco fez diversas experiências com os valores que introduziu nas listas pois o gráfico que estava a obter inicialmente não correspondia ao que esperava, isto é, que as retas se deviam intersetar.

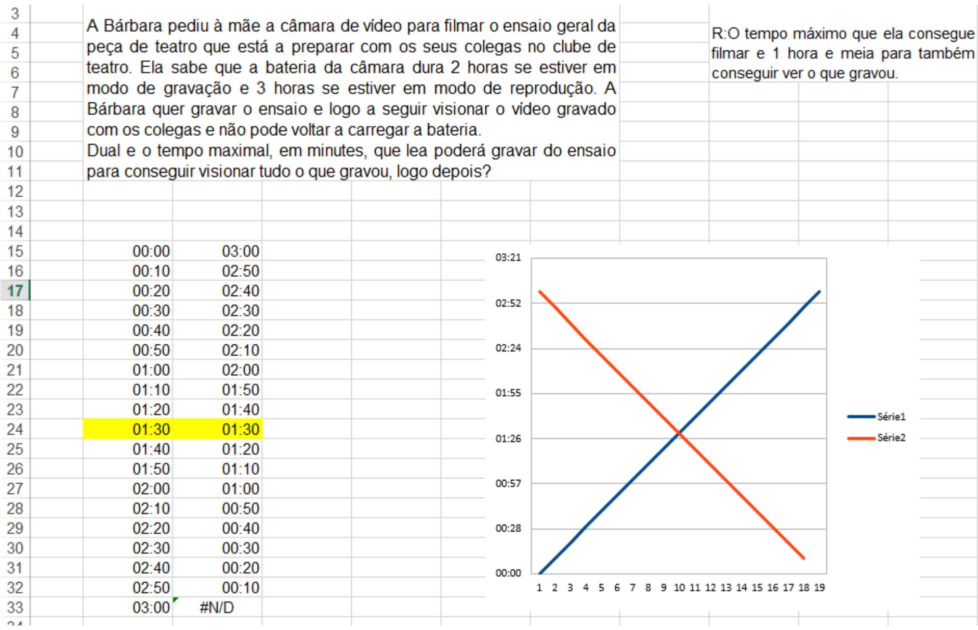


Figura 7.8. Primeira solução submetida por Marco ao Problema #8 da edição 2011/2012

A solução que submeteu (Figura 7.8), embora mostre que as duas retas se intersetam, não estava correta pelo que a organização do SUB14 lhe devolveu uma apreciação da resolução (Figura 7.9), desafiando o seu raciocínio e a sua solução com um exemplo particular em que remetia para a análise das percentagens da carga da bateria. Marco reconheceu a sugestão dissimulada – "disseram para ver as percentagens e depois aí comecei a tentar resolver em percentagem" – e iniciou uma nova abordagem ao problema.

> M: Depois aqui, fiz, fui fazer . . . eu fiz uma tabela pequenina . . . ia fazendo o valor que era preciso até se encontrarem, então ia acrescentando, ia fazendo, um correspondia a 25% . . . e outros a outra [percentagem]. E ia dividi-los outra vez e multiplicando. Primeiro comecei com 25%, 50, 75, 100. Depois fui diminuindo, diminuindo…

Olá [redacted]
Recebeste o nosso email com o convite para participar no estudo sobre o Sub14? É muito importante!
Não te esqueças de falar com o teu encarregado de educação.

Bem, agora em relação à tua resolução do problema 8, que está muito gira e criativa, vais ter que pensar mais um pouco. A tua resposta final não está certa.
Cá fica uma dica.
Vamos supor que a Bárbara grava mesmo um filme com a duração de 1h30. Como a bateria dura 2h se estiver só a gravar, significa que no final já só rsta 25% da carga, não é? (Pois 1h30 representa 75% de 2h). E será que 25% da carga dá para visionar o filme de 1h30?
Esperamos ter ajudado!

Ficamos a aguardar que corrijas esta resolução e que nos digas se pretendes colaborar connosco no tal estudo!
Até breve,
SUB14

Figura 7.9. Feedback enviado pela organização à primeira resolução do Problema #8

Portanto, Marco começou por fazer uma tabela "pequenina", através de cálculos sucessivos realizados um a um na calculadora, e imaginou que iria encontrar rapidamente o valor pretendido, usando valores de referência e em seguida ajustando tentativas sucessivas. Enquanto o Marco se envolvia neste processo de tentativa e erro e reformulação, apercebeu-se que ia demorar muito tempo. O pai, com base no raciocínio de Marco, criou uma lista numa folha de cálculo com todas as possibilidades.

> M: Eu ainda... estava ainda a chegar... eu não tinha acabado mas depois percebi que demorava muito tempo. Pois, mas se continuasse ia lá chegar de certeza.
>
> P: Foi baseado naquilo que ele tinha feito. Portanto, em vez de, ele tinha ali uma tabelinha que ia aumentando e diminuindo de um lado, aumentar de um lado e diminuir do outro, e eu fiz . . . e nem sequer me preocupei em ver qual é que dava.
>
> M: É para cruzar. Em vez de estar a fazer as duas, ao mesmo tempo e depois ia dar um valor num lado e outro no outro.

O ficheiro que foi enviado para o SUB14 com a nova solução (Figura 7.10) resultou de um trabalho conjunto entre Marco e o pai, em que Marco começou a definir uma estratégia baseada em sucessivas tentativas refinadas com base no resultado anterior e cuja matematização foi transportada pelo pai para a folha de cálculo. Na coluna B identificaram o tempo de gravação, com intervalos de 1 minuto, na coluna C a percentagem de carga gasta nesse tempo, na coluna D determinaram a percentagem de carga restante (dependente dos valores da coluna C) e, na coluna E, o tempo de gravação possível para aquela percentagem de carga. Ao analisar os dados das várias colunas observaram que o tempo máximo de gravação que também permitia visualizar o filme por inteiro seria 72 minutos e assinalaram essa linha com um preenchimento amarelo.

	A	B	C	D	E	F	G
3		Gravação		Reprodução			
4		Tempo de Gravação (min)	% carga utilizada	% carga restante	Tempo de Reproduçã o (min)		
5		120	100,00%	0,00%	0		
6		119	99,17%	0,83%	1,5		R:O tempo máximo que ela pode filmar são 72 minutos.
7		118	98,33%	1,67%	3		
8		117	97,50%	2,50%	4,5		
9		116	96,67%	3,33%	6		
10		115	95,83%	4,17%	7,5		
11		114	95,00%	5,00%	9		
50		75	62,50%	37,50%	67,5		
51		74	61,67%	38,33%	69		
52		73	60,83%	39,17%	70,5		
53		**72**	**60,00%**	**40,00%**	**72**		
54		71	59,17%	40,83%	73,5		
55		70	58,33%	41,67%	75		
56		69	57,50%	42,50%	76,5		
57		68	56,67%	43,33%	78		
120		5	4,17%	95,83%	172,5		
121		4	3,33%	96,67%	174		
122		3	2,50%	97,50%	175,5		
123		2	1,67%	98,33%	177		
124		1	0,83%	99,17%	178,5		
125		0	0,00%	100,00%	180		
126							

Figura 7.10. Excertos da solução do Problema #8, revista após *feedback* da organização

7.1.4 A divisão de estatuto na atividade de Marco

À medida que Marco se dá a conhecer, vão sobressaindo traços na sua atividade de resolução de problemas com tecnologias que deixam perceber algumas características das relações que estabelece com os que o acompanham.

A proximidade que Marco mantém com a organização revela-se em ocasiões em que Marco emite opiniões ou dá sugestões. Por exemplo, quando enviou a sua resposta do problema #5 – ‘Unidos e Cortados’ (Capítulo 5, Secção 5.2.4) elaborada com recurso ao GeoGebra (ver Secção 7.2), registou algumas instruções sobre como se deveria proceder para aceder à totalidade da sua resolução. Como fez uso da folha de cálculo embutida no programa, explicou os passos que a organização do SUB14 deveria seguir até encontrar a sua resolução completa, não fosse o caso de, ao abrir o ficheiro, apenas encontrarem a construção sem o processo detalhado e sem a solução visível (Figura 7.11).

P1: Familiares
P2: Mais ou menos
Resposta:
No anexo :Quando abrir a resolução do problema no geogebra ir a exibir e depois clicar em folha de cálculo onde está a resolução

Figura 7.11. Resposta de Marco em que explica como aceder à sua resolução em GeoGebra

Além de revelar proximidade e à-vontade, existe ainda uma certa cumplicidade com a organização do SUB14 como se pode verificar pela troca de *e-mails* referentes ao problema que o jovem se esqueceu de enviar no prazo devido (Figura 7.12). A data limite para submissão de respostas era o dia 20 de Março, sendo que o primeiro apelo da organização foi enviado no dia 17 de Abril, ou seja, já o jovem tinha respondido corretamente aos problemas #6 e #7 dessa edição. O Marco acabou por submeter a sua resolução do problema em falta a tempo de poder ser considerada, isto é, antes da publicação das listas dessa quinzena e de uma seleção de resoluções admiráveis.

Ficou patente que o pai exerce uma forte influência sobre Marco que cresceu a vê-lo trabalhar no e com o computador. Foi o pai que o ensinou a usar várias potencialidades da folha de cálculo e, tal como o pai, também é curioso, gosta de aprender e partilha de um mesmo espírito competitivo. Mas o pai é, sobretudo, um supervisor da atividade de resolução de problemas com tecnologias de Marco. Mais do que incentivá-lo ao cumprimento das regras, como tentar assegurar a sua participação dentro do prazo, o pai ajuda-o na procura de estratégias ou na verificação de algumas soluções a problemas.

I: E quando é que aprendeste a usar as fórmulas?
M: Houve aí um tempo que eu sabia...
I: Foi na escola?... Foi em casa?…
M: Não, foi o pai! Depois esquecia-me, agora já não me esqueço, já uso outra vez.

A ‘longa’ experiência de Marco nos campeonatos não só lhe confirma que toda e qualquer ferramenta tecnológica pode ser usada no processo de resolução dos problemas e de expressão das soluções, como também lhe assegura que qualquer método é válido desde que permita obter a solução e seja convenientemente explicado. É pois com estes pressupostos que Marco seleciona e utiliza tecnologias que considera válidas para esta atividade, umas convencionais (como o Excel ou o GeoGebra) e outras menos convencionais para trabalhar em matemática (como o Paint ou a Ferramenta de Recorte que permite captar uma imagem de uma região específica do ecrã). Um exemplo que ilustra esta ousadia relativamente aos métodos utilizados é a resolução do problema #1 –

'Leitura de Férias' em que o Marco construiu uma sequência de esquemas a partir da união de células e do seu preenchimento com cores para ilustrar visualmente a quantidade de páginas lidas de um livro e, daí, obter o seu número total de páginas (Figura 7.13).

Olá [Marco]!
Recebemos a tua resposta ao problema 7 que está CORRECTA.
O que se passa que não chega a tua resposta ao Problema 5? É o problema da casa de chá.
Não te esqueças de indicar SEMPRE o teu número de camisola.
A tabela de resultados do problema será afixada na página do campeonato.
Contamos com a tua participação no campeonato. Até à próxima jornada!
Sub 14

> *Olá! Eu não respondi porque pensava como já tinha passado a data de envio não me aceitavam o problema ,pensei que o marcassem como enrrado.*
> *Mas ainda posso responder?*
> *Aguardo a vossa resposta.*
> *Adeus.*
> --
> *[Marco]*
>
> > Olá, [Marco]!
> > Ainda podes, mas tem de ser amanhã sem falta!
> > Vamos publicar a tabela de resultados do problema 5.
> > A partir daí, não podemos aceitar mais, percebes?
> > O Sub14
> >
> > > *Não consegui enviar, sai de casa e não cheguei a horas.*
> > > --
> > > *[Marco]*
> > >
> > > > Olá, [Marco]!
> > > > Tudo bem, ainda continuas em prova! Só tens 1 problema não respondido. Como sabes, o máximo que se pode falhar é 2 problemas. Ainda tens uma margem.
> > > > Contamos com a tua participação!
> > > > O Sub14
> > > >
> > > > > *mas mesmo assim eu mandei o problema*
> > > > > --
> > > > > *[Marco]*
> > > > >
> > > > > > Olá [Marco]!
> > > > > > Recebemos a tua resposta ao problema 5 que está CORRECTA. Como a tua resposta foi enviada no dia 20 de Abril e nós só publicámos as resoluções no dia 21 de Abril, vamos considerá-la, está bem?
> > > > > > Assim, não tens nenhum problema falhado até ao momento! E só faltam mais 2 para terminar a fase de apuramento...
> > > > > > Não te esqueças de indicar SEMPRE o teu número de camisola.
> > > > > > A tabela de resultados do problema será afixada na página do campeonato.
> > > > > > Contamos com a tua participação no campeonato. Até à próxima jornada!
> > > > > > Sub 14

Figura 7.12. Troca de *e-mails* entre a organização e Marco, referentes a um problema esquecido

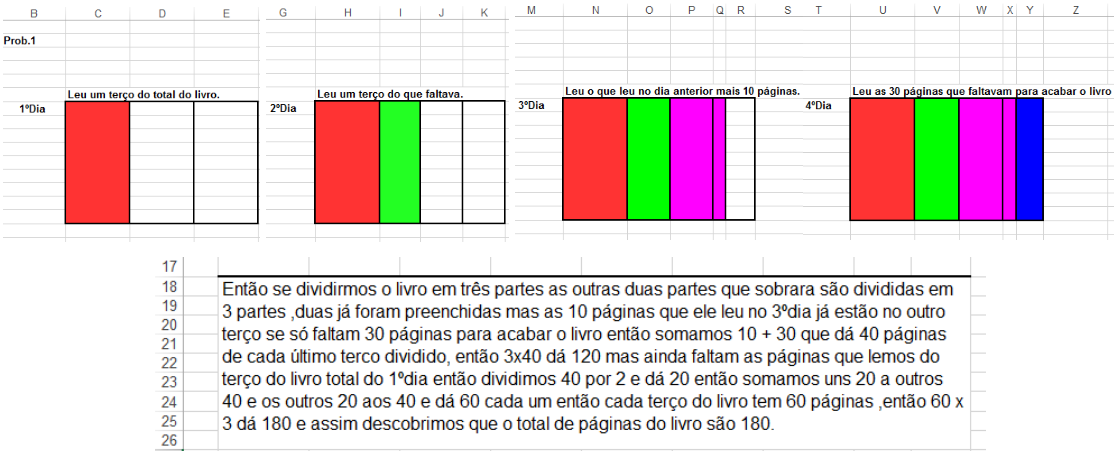


Figura 7.13. Excertos da resolução em folha de cálculo do Problema #1 da edição 2010/2011

7.1.5 A atividade usual de resolução de problemas com tecnologias no caso de Marco: uma síntese

A apresentação inicial de Marco revelava um jovem com muita apetência para as tecnologias digitais, muito curioso, que aprecia a natureza desafiadora e competitiva de algumas atividades em que se envolve, nomeadamente, a resolução de problemas do SUB14, para a qual recorre com mais frequência à folha de cálculo Calc.

Os encontros que se sucederam já permitem compreender melhor estas e outras dimensões desta sua atividade, motivada pela resolução de problemas neste contexto concreto que é o SUB14 e pela sua forte vertente tecnológica, que Marco tanto aprecia. As soluções tecno-matemáticas submetidas por Marco são produzidas através do computador, fazendo uso de diversas ferramentas que o Marco conhece, domina bem e valoriza como importantes recursos para obter as suas soluções: a Internet, a folha de cálculo, o GeoGebra, ou os programas de edição de imagens como o Paint e a Ferramenta de Recorte. Estes últimos permitem-lhe enfatizar explicações visuais nas suas soluções, com base em esquemas, tabelas ou diagramas, e que também explora noutras situações (e.g., a utilização da cor e de sublinhados para realçar aspetos relevantes em explicações textuais). Esta atividade é desenvolvida com a vigilância do pai cuja principal preocupação é combater a descontração com que Marco encara os prazos estabelecidos pelo SUB14 para a aceitação das resoluções. Apesar das infrações, Marco reconhece que a organização do Campeonato é tolerante, notando-se uma certa cumplicidade na relação que mantêm ao longo das fases de apuramento. O facto de as regras permitirem a utilização de qualquer tipo de ferramenta e método, e ainda o trabalho em sala de aula com algumas das ferramentas preferidas de Marco parecem, por um lado, validar estes programas como adequados e úteis à resolução de problemas de matemática e, por outro, sustentar uma certa ousadia nos processos usados para obter as soluções. A Figura 7.14 sintetiza as várias dimensões do sistema de atividade de Marco enquanto resolve problemas de matemática do SUB14 com as tecnologias da sua preferência.

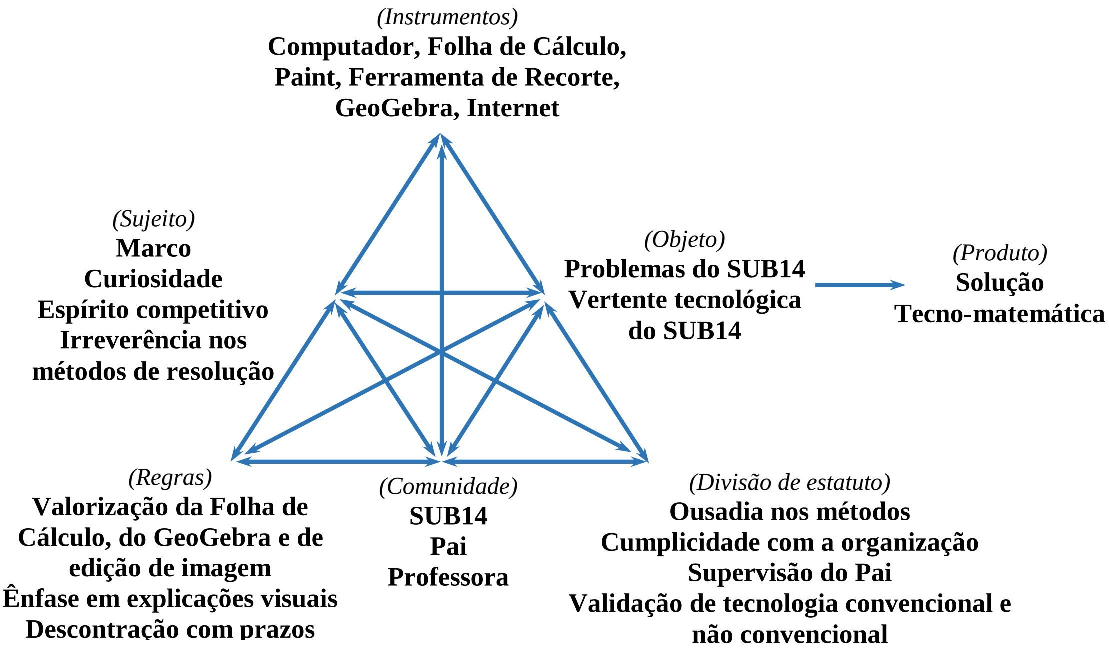


Figura 7.14. Atividade de Marco-com-ferramentas-de-visualização no contexto do SUB14

Até ao momento, é possível constatar que a *abordagem usual* de Marco é bastante peculiar, sobressaindo a impressão de que a folha de cálculo é encarada como uma ‘ferramenta-mestra’ com a qual pode compor uma resolução para qualquer problema. A partir do seu discurso, depreende-se que a escolha desta ferramenta precede mesmo uma tentativa de compreensão dos aspetos que o problema envolve pois, quando pretende resolver um problema ‘pega logo no computador, vai à folha de cálculo e cola o enunciado do problema unindo as células que for preciso para não ter que estar a mudar de página’, portanto, para se poder concentrar no problema e na sua resolução. Isto sugere que ele encontra na folha de cálculo uma diversidade tal de *affordances* que sente que pode dispensar, à partida, outra ferramenta digital. A folha de cálculo é uma ferramenta que Marco usa para *resolver* e também para *exprimir* as suas soluções, ou seja, nela consegue fazer o registo, que considera ser fiel, de toda a sua atividade.

De um modo geral, Marco reconhece a adequação de algumas ferramentas tecnológicas a certos tópicos matemáticos – o Excel e noções de estatística, o GeoGebra e noções de geometria – embora se refira explicitamente a esta aproximação ao recordar experiências de sala de aula. Todavia, reconhece que determinadas *affordances* da folha de cálculo são apropriadas para determinados procedimentos matemáticos, por exemplo, quando pretende estudar as relações entre as idades dos dois irmãos no problema 'As idades dos irmãos' (Figura 7.6) e, para criar as listagens na folha de cálculo percebe que basta encontrar uma expressão que relacione os valores de duas células e, por arrastamento da alça de preenchimento, o programa acaba por preencher os valores em falta segundo a mesma relação (*interpretar*).

Outro momento importante da sua atividade de resolução de problemas está relacionado com a combinação de recursos tecnológicos e matemáticos para desenvolver uma abordagem exploratória (*integrar*). Foi o caso da sua primeira resolução do problema 'Enquanto dura a bateria' (Figura 7.8), em que Marco foi alterando valores na folha de cálculo e observando a consequência da sua ação na correspondente representação gráfica até obter algo que se assemelhasse ao que tinha em mente, isto é, que as retas se deviam intersetar. Embora a solução encontrada não fosse a correta, Marco foi interagindo com a folha de cálculo e com a matemática nela embutida, e daí retirou formas de reformular a sua abordagem.

Nas suas soluções, enquanto desenvolve a abordagem que delineou, Marco constrói com relativa frequência novos objetos de conhecimento que carregam e visam transmitir um significado próprio (*criar*). Exemplo disso é o esquema que construiu no MS Paint para resolver o problema 'A viagem de carro pela Europa' (Figura 7.4) em que utilizou o esquema para experimentar uma primeira hipótese e a partir daí desenvolveu uma abordagem para encontrar a resposta, pelo que o esquema foi usado para resolver e também para exprimir a solução; de modo análogo, o esquema que construiu na folha de cálculo para resolver o problema 'Leitura de Férias' e que retrata a sequência do número de páginas lidas ao longo dos dias referidos (Figura 7.13), tem idêntico propósito: o resolver e o exprimir. Constata-se pois que a maior parte das resoluções de Marco são construídas com uma forte componente visual em que os elementos que acrescenta às suas descrições textuais têm o intuito de mostrar com toda a clareza possível a forma como olhou para cada problema. Portanto essas inscrições visuais são parte da justificação das suas soluções (*verificar*).

Por fim, uma das características que marca a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias deste jovem é o facto de a troca de informações com outros membros da comunidade ser de extrema relevância para obter as soluções de alguns problemas (*comunicar*). Embora tenha diferentes propósitos, esta comunicação que desenvolve com o pai parece dar sustentação à atividade de Marco, ajudando-o a superar algumas dificuldades, mas exigindo sempre esforço e persistência da sua parte. A *disseminação* do seu trabalho, isto é, a submissão dos ficheiros com as suas respostas é feita com uma certa confiança de que alcançou o sucesso. Todavia, sempre que isso não acontece, Marco procura melhorar, completar ou corrigir a sua resposta.

Este retrato dos processos de resolução de problemas com tecnologias desenvolvido por Marco é ainda incompleto, pelo que nas secções seguintes apresento e discuto as resoluções que o jovem produziu com recurso ao GeoGebra, no primeiro caso, e com recurso a uma combinação de várias ferramentas digitais com ênfase nas de edição de imagem, num segundo exemplo. A análise será efetuada a partir dos processos de resolução de problemas de matemática com tecnologia (RPMT).

7.2 Resolver-e-exprimir o problema 'Unidos e Cortados'

O problema 'Unidos e Cortados' (Capítulo 5, Secção 5.2.4) foi proposto na fase de apuramento do SUB14 quando o Marco estava a frequentar o 8.º ano de escolaridade. Este problema remete para a obtenção da área do polígono que fica acima de uma linha de corte definida, considerando uma sequência de 8 quadrados cujos lados têm dimensões conhecidas e consecutivas que variam entre 1 cm, no quadrado menor, e 8 cm, no maior. Junto com o ficheiro GeoGebra, contendo a sua solução, Marco deixou a recomendação à organização já referida na Secção 7.1.3 (Figura 7.11). A descrição que se segue baseia-se na análise do protocolo de construção do ficheiro submetido pelo jovem.

7.2.1 Obtendo a sequência completa de quadrados

Marco decidiu utilizar o GeoGebra para obter uma figura semelhante à que foi apresentada no problema (*captar*) apercebendo-se de que podia obter a sequência de 8 quadrados através da marcação dos seus vértices, da posterior construção dos lados e, a partir daí, encontrando uma forma para obter a área solicitada (*identificar*). Parece ter reconhecido grandes potencialidades na combinação de duas *affordances* da vista gráfica do GeoGebra – os eixos e a grelha – que providenciam um suporte visual que lhe vai permitir construir a sequência (*interpretar*). O Marco coloca cada vértice sobre a grelha, considerando as suas coordenadas e as dimensões dos lados de cada quadrado (Figura 7.15). Algumas coordenadas visíveis no Protocolo de Construção (por exemplo, E e F) sugerem que o Marco está a recorrer ao suporte visual que a grelha oferece para encontrar a localização aproximada de cada ponto.

O seu próximo passo consiste na construção dos lados dos quadrados utilizando a ferramenta que permite traçar segmentos. A seguir constrói uma semirreta que passa por dois pontos e, utilizando as 'propriedades dos objetos', altera a cor dessa semirreta para laranja. Enquanto está a desenvolver esta construção – que não surgia representada no enunciado – Marco vai combinando recursos tecnológicos e matemáticos, o que marca o início de uma abordagem exploratória a este problema (*integrar*).

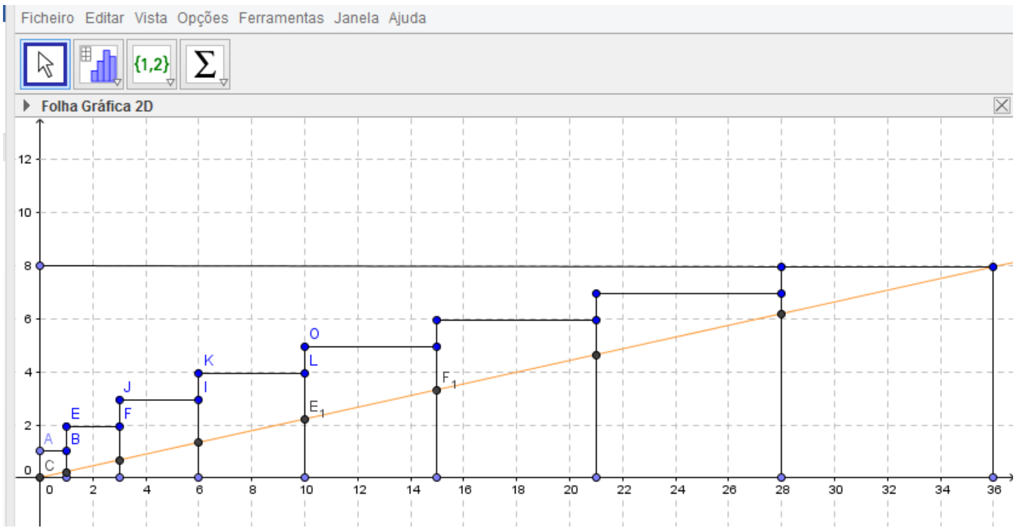


Figura 7.15. Construção da sequência de oito quadrados elaborada por Marco

7.2.2 Matematizando: resolver-e-exprimir a situação

O modelo conceptual, que parece estar em desenvolvimento, vai guiar Marco até à solução: ao considerar a relevância da folha de cálculo (Figura 7.16), opta por criar uma lista dos comprimentos dos lados, e insere-os na coluna A, e outra contendo a área de cada quadrado correspondente, que organiza na coluna B (*explorar*).

Depois insere o texto "área dos 8 Q[uadrados]" na célula A14, constrói o lado superior do retângulo envolvente que contém a sequência de quadrados e insere manualmente a área total dos 8 quadrados e do retângulo. Apesar de este retângulo não ser mencionado no problema, a sua construção revela a forma como Marco projeta a continuidade da sua abordagem à solução (*planear*) e que é baseada na perceção de que pode obter a área pedida através da diferença entre a área dos 8 quadrados e a área do triângulo inferior, resultante da marcação da linha de corte, que corresponde a metade da área do retângulo. Assim, este retângulo é um novo objeto de conhecimento que Marco utiliza para resolver e para exprimir a sua solução, recorrendo aos seus conhecimentos sobre o GeoGebra e aos seus conhecimentos sobre áreas de polígonos (*criar*).

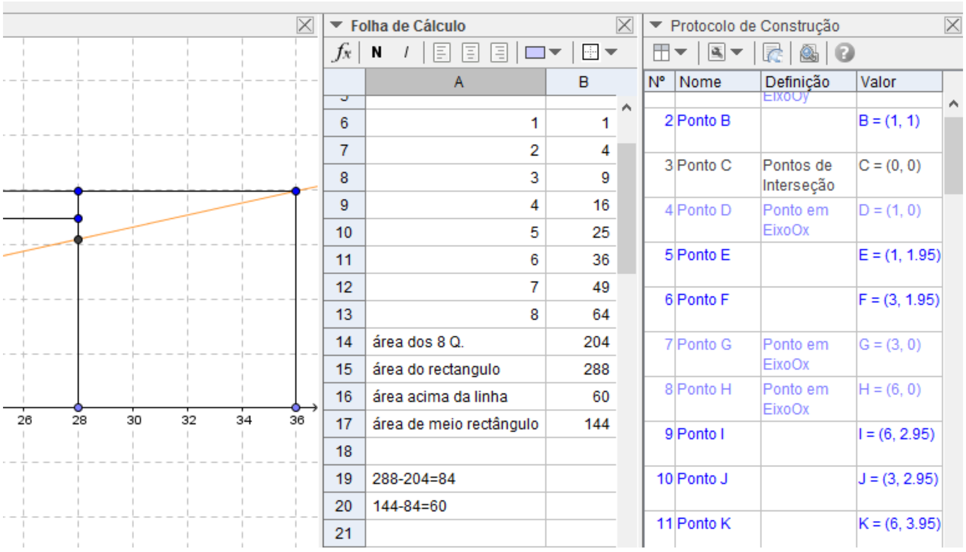


Figura 7.16. Folha de cálculo do GeoGebra e excerto do Protocolo de Construção

Continua, inserindo o texto "área acima da linha" na célula A16, mas calcula a área de meio-retângulo e insere-a manualmente na célula B17. Mais abaixo regista a diferença entre as áreas do retângulo e dos 8 quadrados, e subtrai este resultado à área do meio-retângulo (*verificar*). Preenche então a célula A16 com a resposta, 60. O ficheiro que submeteu com a solução contém a construção da sequência referida no enunciado e apresenta diversos cálculos que visam explicar e justificar a sua resposta utilizando a vista de folha de cálculo do GeoGebra (*disseminar*). Apesar de, na solução digital, não existirem evidências de que Marco tenha procurado outras fontes de informação ou ajudas adicionais durante o processo de resolução-e-expressão, o próprio assinalou que contou com a ajuda de familiares durante a sua atividade, tal como é possível constatar na Figura 7.11 (*comunicar*). Todavia, com os dados disponíveis não é possível precisar nem o tipo de ajuda que os familiares facultaram nem o momento em que tal ajuda foi relevante ao processo de resolução-e-expressão do problema.

A análise do protocolo de construção que suporta esta resolução mostra que, apesar de não ter feito uma construção robusta, Marco encontrou a solução do problema e apresentou-a com clareza. Para além disso, o jovem reconhece uma diversidade de possibilidades de ação com o GeoGebra embora escolha livremente fazer uso apenas das ferramentas indispensáveis ao desenvolvimento de uma abordagem exequível ao problema. Esta escolha intencional do GeoGebra baseia-se num conhecimento explícito das suas *affordances*, da sua linguagem característica e das ferramentas embutidas, bem como das capacidades do próprio jovem, por outras palavras, das coisas que ele é capaz de fazer com o GeoGebra e no GeoGebra para resolver o problema e exprimir a solução. A utilização eficaz da ferramenta parece estar relacionada com o facto de a construção espoletar uma abordagem visual que vai fazer emergir uma estrutura conceptual subjacente ao processo de obter e apresentar a solução.

7.2.3 Sinopse dos processos de resolver-e-exprimir o problema 'Unidos e cortados

Os processos desenvolvidos por Marco para resolver-e-exprimir este problema encontram-se sumariados no esquema apresentado na Figura 7.17. Para cada um dos processos foram identificados os aspetos chave que os caracterizam, que surgem registados no referido esquema, embora de forma muito sucinta. Dado que esta solução não foi objeto de observação, a síntese diz respeito à análise do ficheiro submetido por Marco complementada com a análise das várias etapas do seu trabalho registado no protocolo de construção. Apesar de Marco mencionar que contou com o apoio de familiares, não é possível precisar o momento em que essa troca de ideias decorreu, pelo que o processo de comunicação não é incluído no esquema.

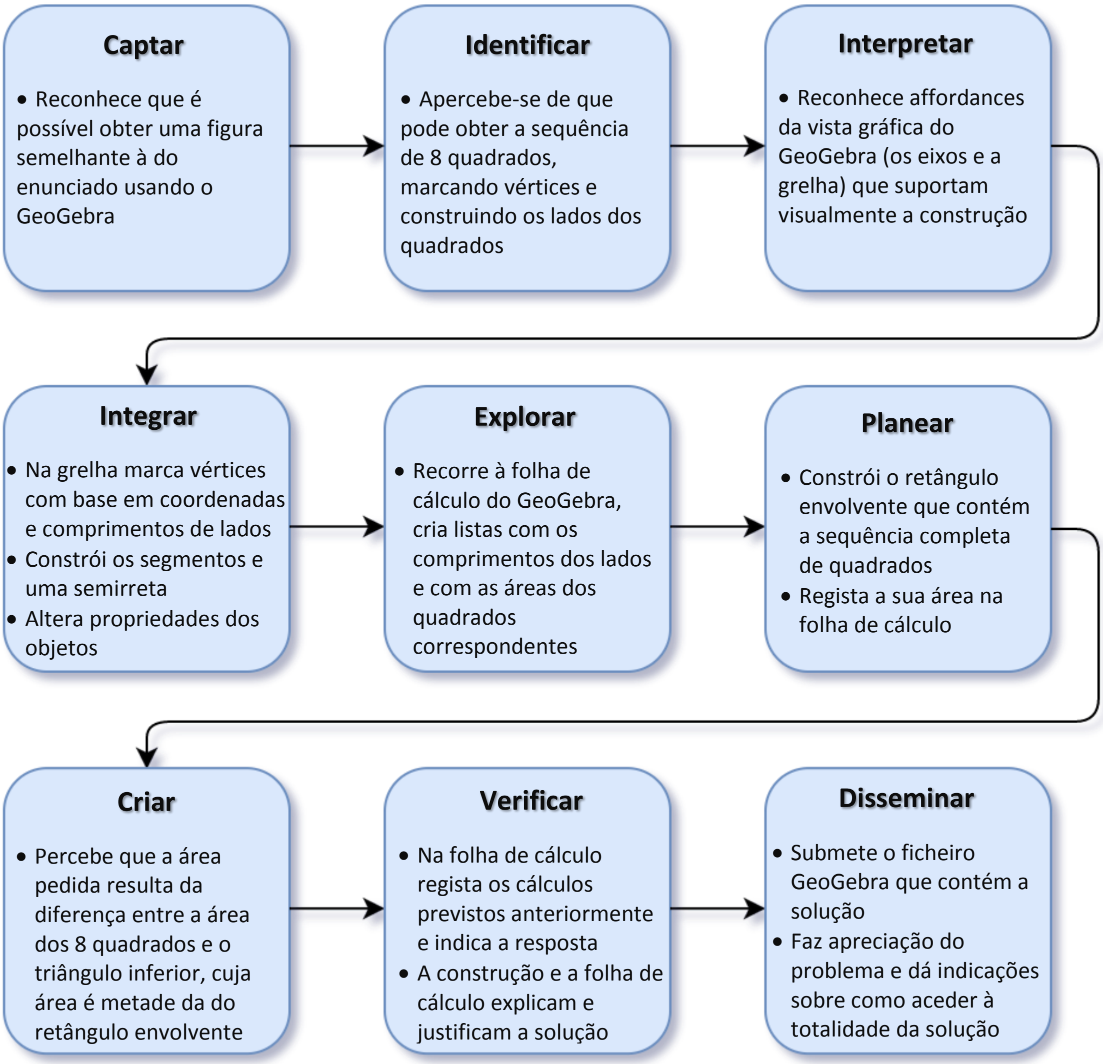


Figura 7.17. Processos de Marco-com-ferramentas-de-visualização a resolver-e-exprimir o problema 'Unidos e cortados'

7.3 Resolver-e-exprimir o problema 'Motivo decorativo'

7.3.1 Selecionando o problema a resolver

Na entrevista presencial em que resolveu um dos problemas que lhe foram propostos, tentando reproduzir o que habitualmente fazia no decurso do Campeonato, Marco começa por analisar cuidadosamente os três 'problemas experimentais' lançados na página do Campeonato para este fim. Parece hesitante, mas acaba por escolher aquele que considera o seu favorito: o problema 'Motivo decorativo' (Secção 5.2.1, Figura 5.1). Quando questionado sobre os motivos da sua preferência, Marco explica:

> Marco: Tem mais a ver com triângulos e essas coisas e foi no sétimo ano onde eu tive 100 [%] nos dois testes.
>
> Investigadora: Em geometria?
>
> Marco: Sim, estudei congruência de triângulos e isso...

A sua escolha assenta numa identificação inicial do tema e das noções matemáticas que poderão ser necessários para a resolução do problema (geometria, triângulos, congruência de triângulos) e, simultaneamente, na familiaridade com esses assuntos e até mesmo numa certa autoconfiança para lidar com esses conceitos já que obteve excelentes classificações nessa matéria no ano anterior (*captar*). Apesar de Marco interagir com a investigadora ao longo da sua atividade, em sequência do pedido para verbalizar os seus pensamentos e procedimentos, nesta etapa inicial pediu explicitamente apoio para clarificação do significado da noção de tangência (*comunicar*).

> M: Não estou a perceber uma coisa. Tangentes, os círculos são 'tangentes'…
>
> I: Tangente, não sabes o que significa a palavra 'tangente'? [Marco acena afirmativamente] Significa que se tocam num só ponto. Neste caso tocam-se só ali naquele pontinho [apontando para o ecrã].

7.3.2 Formulando hipóteses acerca da solução

Focado na leitura do problema e na interação com a figura apresentada na página *web* do Campeonato, Marco começa a desenvolver uma série de hipóteses que o levam a conjeturar acerca da solução. As suas primeiras impressões levam-no a observar que o triângulo é equilátero (*identificar*) e que talvez consiga obter a solução pretendida se estudar melhor o círculo central e a partir desse obter o raio dos círculos menores (*interpretar*).

> M: Eu estou a tentar, estou ainda a tentar... ver… como fazer isto. Hum... como o triângulo é equilátero... chegando ao círculo do meio se calhar consegue-se chegar aos outros... [Hipótese 1]
>
> Então, em silêncio, fixa o ecrã continuamente por algum tempo.

A compreensão da situação começa a desenvolver-se em estreita relação com a observação cuidadosa da imagem. Rapidamente passa a esboçar, visualmente e no ecrã, várias decomposições do triângulo equilátero: deslizando o dedo pelo ecrã, 'traça' uma bissetriz do ângulo inferior direito do triângulo (Figura 7.18) mas continua a pensar em voz alta enquanto 'traça' outra bissetriz, agora a do ângulo superior (*identificar*/*interpretar*).

> M: Como é que hei-de dizer? Como se dividisse ao meio. E dividia-se em cada vértice para o meio de cada aresta e tentar descobrir . . . Se conseguisse dar... mas eu ainda estou a ver como é que vou fazer isso... [Hipótese 2]

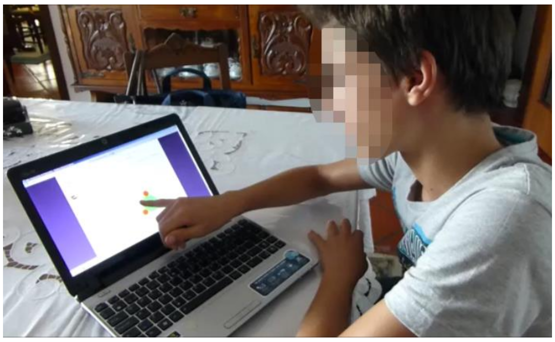


Figura 7.18. Formulação e teste da hipótese 2

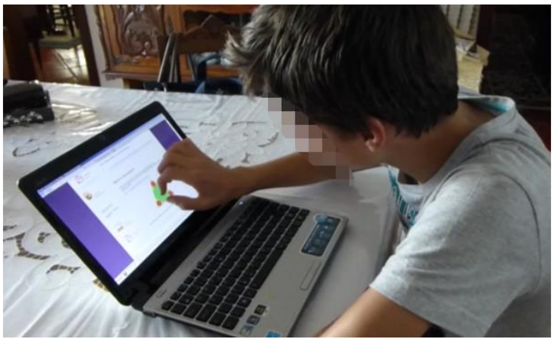


Figura 7.19. Formulação e teste da hipótese 3

As tentativas para descortinar um método visual de abordar o problema sucedem-se e, ao fim de algum tempo, avança outra análise da situação:

> M: Ele tem 12 cm. Ao meio do triângulo não é 12 de certeza. Mas é capaz de ser 4. Ele dividindo estas partes... [com o dedo indicador e o polegar fixa uma distância e percorre a altura do triângulo 3 vezes]. Sim, se calhar. Porque eles são tangentes. [silêncio] Nota-se que... são iguais. O problema é que se não diz aqui nada... [Hipótese 3]

Apesar da linguagem utilizada revelar algumas imprecisões, o jovem reconhece que o baricentro do triângulo não coincide com o ponto médio da sua altura pois avança a possibilidade do raio do círculo maior ter comprimento $4cm$, valor que resulta de uma intuição visual suportada numa medição rudimentar através de uma distância fixa pelos dedos (Figura 7.19). Embora conclua que o raio do círculo maior corresponde a $1/3$ da altura do triângulo equilátero, percebe que essa afirmação carece de justificação rigorosa, embora não encontre informações suficientes no enunciado (*identificar*/*interpretar*).

Apercebe-se então que já enunciou diferentes perspetivas – “agora estou a pensar, há muitas [formas] mas... não sei se dão certo, é esse o problema” – e decide enveredar por uma abordagem que envolve a decomposição do triângulo equilátero em duas figuras, obtendo um triângulo mais pequeno no topo e um trapézio abaixo (Figura 7.20). Estas diversas abordagens correspondem a manipulações e transformações mentais, ou seja, ainda não foram materializadas pelo Marco para além do ‘desenho’ com o dedo indicador sobre o ecrã. Continua, explicando:

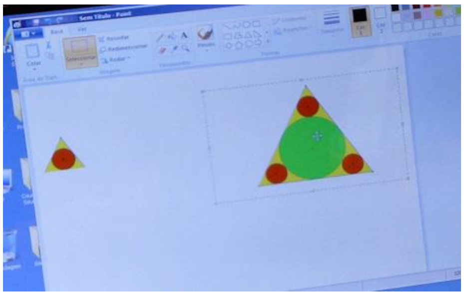
> M: Se a gente fizer aqui um triângulo . . . é como se este fosse uma ampliação do outro. Se ele tem 12, 12 a dividir por três, [dá] quatro . . . quer dizer que o raio é 2. Se calhar o raio do círculo pequeno é 2. [Hipótese 4]

Figura 7.20. Formulação e avaliação da hipótese 4

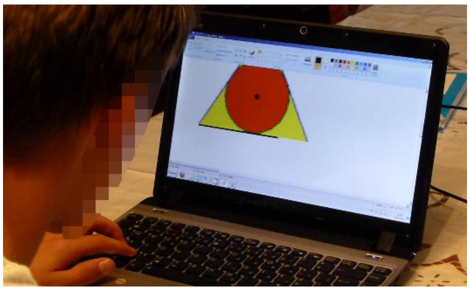
Até ao momento, Marco esteve a tentar compreender as ideias principais que estão envolvidas neste problema (*identificar*) e, em cada hipótese levantada, está a considerar a plausibilidade das formas matemáticas de abordar a solução (*interpretar*). Portanto, nestes primeiros minutos de atividade, existem ciclos de *identificar-interpretar*, que vão sendo sucessivamente refinados, e antecedem o desenvolvimento de um modelo conceptual que conduzirá à solução. Enquanto Marco está a pensar em voz alta e a elaborar a sequência de ideias, 'interage' com a figura no ecrã ao apontar, ao estimar distâncias, ao esconder áreas com as suas mãos. Está em curso o desenvolvimento de um método visual para abordar a solução, analisando as possibilidades de decomposição da figura e, mentalmente, simulando transformações tais como cortar, reorganizar ou alterar cores. Deste modo, editar a figura surge como uma ação indispensável para obter a solução que procura.

7.3.3 Desenvolvendo um método visual para abordar a solução

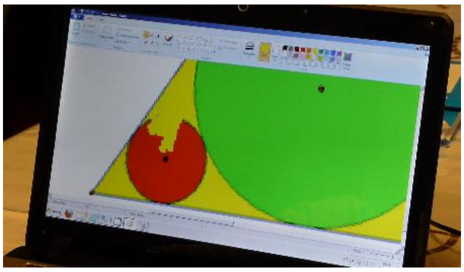
Marco decide então perseguir a sua 4ª hipótese. Recorrendo ao programa Ferramenta de Recorte define uma área retangular no ecrã para criar uma fotografia de parte do triângulo presente no enunciado obtendo um triângulo menor com um único círculo vermelho no seu centro. Mediante um processo semelhante, cria outro ficheiro contendo o triângulo original e, em seguida, insere as duas imagens no programa MS Paint (*integrar*). Uma vez na mesma janela (Figura 7.21a), Marco tenta sobrepor as duas imagens mas, como não têm um fundo transparente, não é possível verificar visualmente que uma delas é uma ampliação da outra (*explorar*). Esta dificuldade leva Marco a uma abordagem ligeiramente diferente: decide transformar o triângulo original para o tornar semelhante ao triângulo mais pequeno. Prossegue, ampliando a área de trabalho para poder desenhar, com precisão, uma linha inferior que deve delimitar a figura menor. Na verdade, como essa figura resulta de um corte do triângulo original, não poderá ser considerada como um ‘triângulo’ enquanto não tiver três lados, pelo que esta necessidade de completar a figura, para além de não ser uma mera questão pictórica, tem um significado e uma intencionalidade matemática (Figura 7.21b). Inicia agora o trabalho de edição da imagem do triângulo original fazendo uso da ferramenta ‘selecionador de cores’ do Paint para identificar o tom exato de amarelo que cobre o fundo do triângulo e utiliza-o para colorir os círculos vermelhos de menores dimensões (Figura 7.21c). De novo usando o selecionador de cores capta o tom de vermelho e pinta o círculo central (Figura 7.21d).



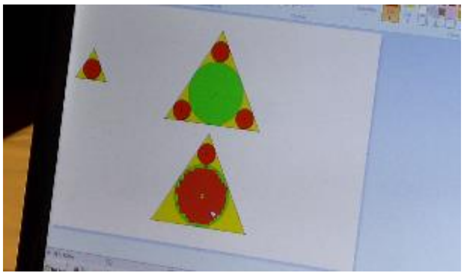
a) Insere as duas imagens recortadas



b) Completa o lado inferior do triângulo menor



c) Pinta de amarelo os círculos vermelhos



d) Pinta o círculo central de vermelho

Figura 7.21. Quatro etapas na edição da figura com o MS Paint

O tratamento das imagens acima descrito (*integrar*) tem o propósito de mostrar que o triângulo menor é, de facto, uma redução do triângulo original. Assim, Marco está a desenvolver e a explorar um modelo conceptual para explicar a semelhança entre estes dois triângulos (*explorar*), e que irá guiá-lo na construção da solução. Tal como aconteceu nos processos identificar/interpretar, observa-se que a integração e a exploração também são processos que decorrem de forma iterativa, embora num curto espaço de tempo. Marco estuda a melhor forma de demonstrar a semelhança dos triângulos em estreita relação com o reconhecimento das *affordances* das ferramentas de edição e usa-as até atingir uma transformação que transmita de forma visualmente satisfatória essa relação matemática.

Quando questionado sobre se é habitual investir no aspeto gráfico das suas produções, responde que não, embora complete: “é que isto depois nota-se”. Todavia, este cuidado tem outro propósito, do seu ponto de vista: “é para demonstrar melhor como é que ele seria se fosse uma ampliação do outro”, ou seja, o tratamento gráfico reveste-se de uma importância central na sua abordagem ao problema. Além de ilustrar o seu modo de pensar, da forma mais fidedigna que tem ao dispor, estas imagens tornam-se também num argumento matemático visual que devem ter o poder de convencer quem vai fazer uma apreciação da sua solução.

7.3.4 Explicando e exprimindo a solução

Mais tarde, salva o ficheiro e abre a folha de cálculo do OpenOffice, o Calc. Sem recorrer a um caderno ou a um lápis, Marco continua a deslocar-se entre o *website* do Campeonato onde encontra o enunciado do problema, as ferramentas de edição de imagem e a folha de cálculo onde dá início à expressão da sua solução (*planear*). Recorre à imagem original e às duas figuras manipuladas no MS Paint de forma a compor a sua resposta na folha de cálculo (Figura 7.22). As figuras sustentam a sua compreensão do problema e apresentam a forma como Marco visualizou a semelhança entre os triângulos. Ao incorporar ideias matemáticas – tais como a semelhança, a decomposição do triângulo através das ferramentas de edição, Marco alcança um modelo conceptual da situação (*criar*).

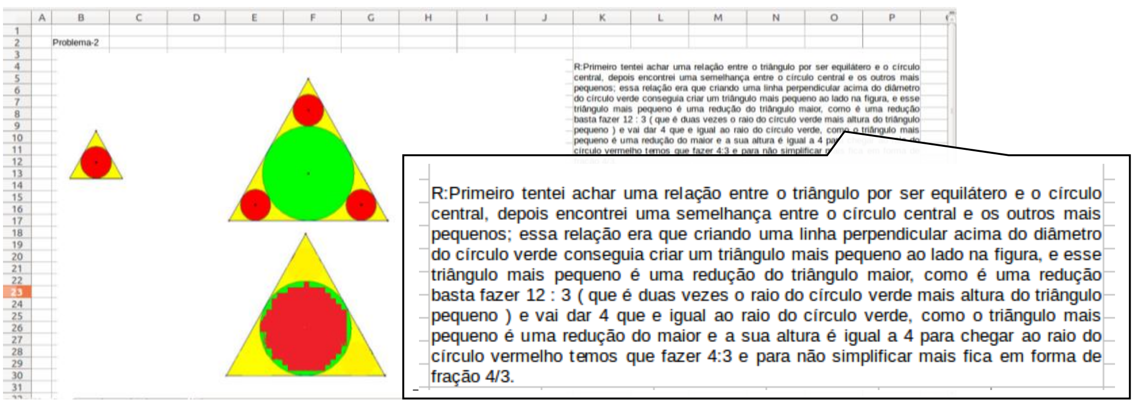


Figura 7.22. Fotografia da solução submetida por Marco com ampliação da resposta escrita

Tal como explicou anteriormente, e como é habitual, identifica o problema pelo seu número numa célula no canto superior esquerdo da folha de cálculo (neste caso, este era o 2.º problema experimental), insere ou cola as imagens que criou e explica detalhadamente o seu processo de resolução do lado direito. Apesar de só reportar algumas das hipóteses que efetivamente levantou, explica que encontrou “uma semelhança entre o círculo central e os outros mais pequenos”, daí considerando que o triângulo pequeno é uma redução do triângulo inicial de razão 12:3, embora não demonstre a sua semelhança. Assim, ao assumir que o diâmetro do círculo maior é 1/3 da altura do triângulo original, Marco explica que o círculo menor tem um raio que corresponde a 1/3 da altura do triângulo menor, isto é, 1/3 de 4. É, pois, enquanto produz uma explicação escrita do processo de resolução e faz uma análise das imagens que editou que Marco encontra, efetivamente, a solução do problema (*verificar*). Contrariamente à sua última hipótese (“se calhar o raio do círculo pequeno é 2”), e que o conduziu a esta abordagem, Marco conclui agora que o raio do círculo menor é 4/3.

Quando dá o seu trabalho por terminado, Marco salva o ficheiro. Em seguida, acede ao *website* da Competição para submeter a sua resposta utilizando a janela de resposta disponibilizada onde insere o ficheiro como anexo, preenche os seus dados pessoais e acrescenta a seguinte frase: “Aqui vai a resposta ao problema experimental 2” (*disseminar*). Marco assinalou ainda que não teve a ajuda de ‘ninguém’ para resolver o problema, gostou ‘muito’ do problema e que o achou ‘fácil’ (Figura 7.23).

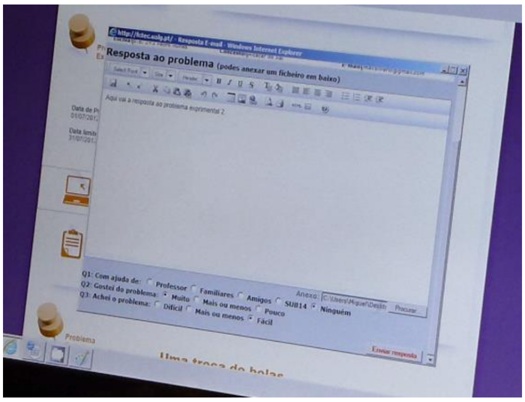


Figura 7.23. Fotografia da janela de resposta ao problema pronta para submeter

Inicialmente, as ferramentas tecnológicas assumiram um papel latente na atividade de resolução de problemas, uma vez que Marco apenas interagiu com o ecrã ao inspecionar visualmente a figura dada no enunciado. Contudo, esta abordagem visual é posteriormente desenvolvida através de processos de transformação da figura com ferramentas tecnológicas que Marco escolheu e com as quais mostra uma grande familiaridade: sabe como salvar aquela imagem a partir do *website* e sabe como editá-la de maneira que se torne relevante para encontrar a solução do problema, um novo objeto de conhecimento. O seu sucesso parece estar ancorado na sua capacidade em reconhecer e fazer uso eficiente de várias *affordances* destas ferramentas para ampliar o seu pensamento matemático de forma a desenvolver um modelo conceptual para a semelhança entre os dois triângulos que ele pretende comparar.

Por outro lado, essa atividade inicial aparenta ter uma natureza recursiva, em que cada argumento é formulado à medida que Marco tenta, por um lado, atribuir significado à matemática que lhe poderá ser útil ou relevante (identificar) e, por outro, considerar formas matemáticas de abordar a solução (interpretar) enquanto interage com a figura no ecrã. Esta atividade cíclica conduz Marco a uma conjetura final – "o raio do círculo menor é 2" – que é a sua primeira resposta para o problema e vai desencadear a atividade de exploração subsequente. O sucesso de Marco em encontrar a solução para o problema parece estar relacionada com a sua capacidade em reconhecer as *affordances* das ferramentas selecionadas, que ampliam o seu processo de pensamento e, em última análise, influenciam a expressão desse pensamento. Ao começar a explorar a sua primeira conjetura, a elaboração de imagens no ambiente gráfico levam Marco a descobrir a razão de semelhança correta. A utilização da folha de cálculo suporta a combinação de objetos porque lhe permite uma fácil organização das inscrições visuais e textuais, isto é, pode movimentar as imagens livremente e é fácil aplicar formatação assim como unir células.

7.3.5 Sinopse dos processos de resolver-e-exprimir o problema 'Motivo decorativo'

Os processos de resolução-e-expressão do problema 'Motivo decorativo' são sumária e esquematicamente apresentados na Figura 7.24. A atividade de Marco foi inteiramente realizada no ambiente digital, movendo-se apenas entre os diversos programas que utilizou.

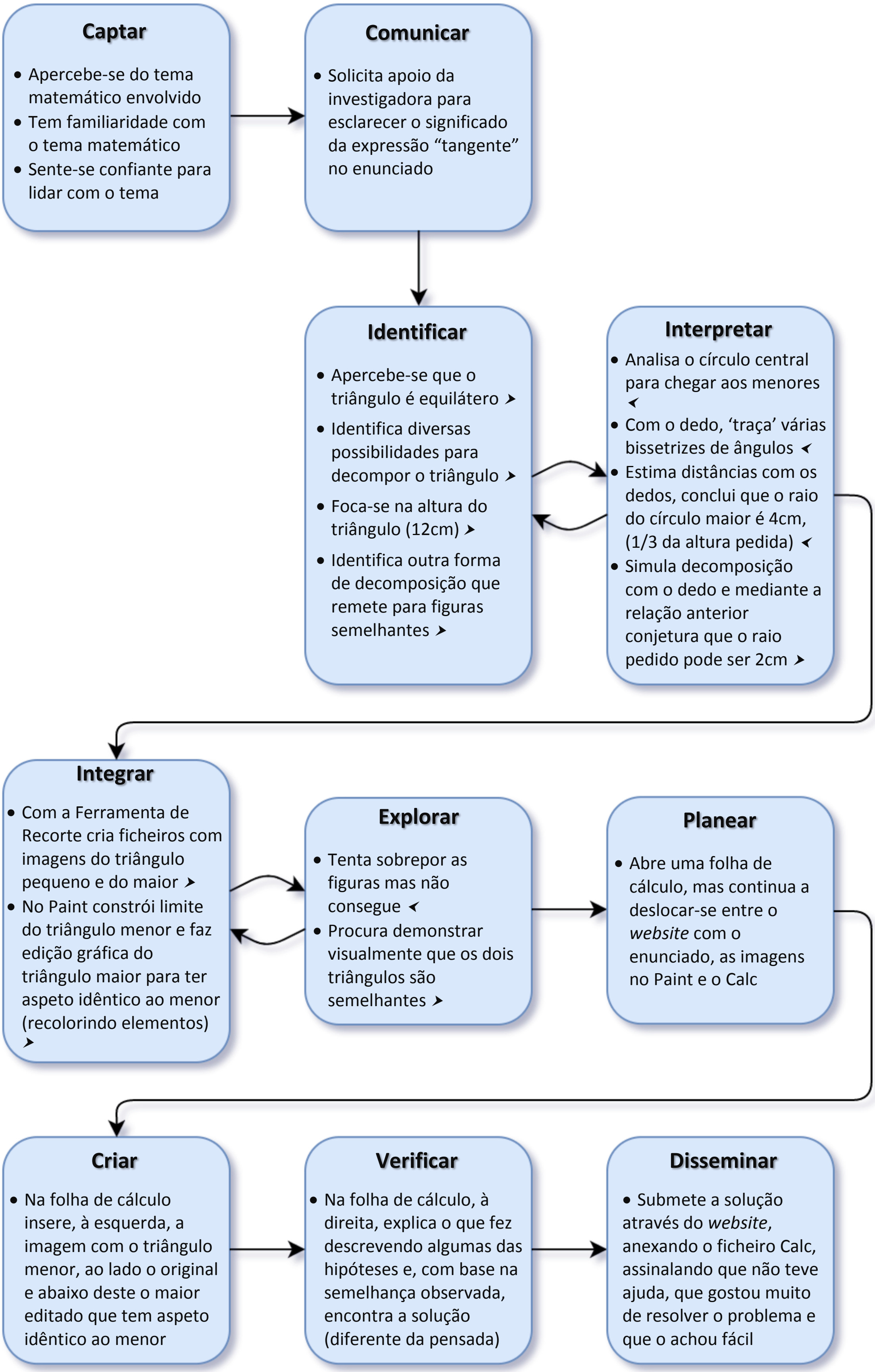


Figura 7.24. Processos de Marco-com-ferramentas-de-visualização a resolver-e-exprimir o problema 'Motivo decorativo'

7.4 Discussão e síntese de resultados

Nas secções anteriores apresentei e analisei a atividade de resolução de problemas com tecnologias de Marco, tendo começado por oferecer uma caracterização global dos elementos do seu sistema de atividade e das suas relações. Um dos aspetos que mais caracteriza este jovem enquanto resolve-e-exprime problemas do SUB14 é a sua preferência pela folha de cálculo, ferramenta com a qual se sente muito à vontade, em parte fruto das aprendizagens proporcionadas pelo pai que também acompanha de perto e ajuda o jovem na resolução de alguns problemas. Para além deste programa, Marco também recorre a outros, como o GeoGebra, o Paint ou a Ferramenta de Recorte sendo que, nas soluções que produz, sobressai uma forte ênfase nas explicações visuais – facto que será explorado com mais detalhe na secção seguinte. Enquanto Marco se mostra como um jovem com espírito competitivo e muito curioso, ávido por aprender mais sobre os assuntos que lhe interessam, revela também uma grande descontração com os prazos estabelecidos, o que pode ser uma consequência direta da sua grande experiência nos campeonatos, experiência esta que lhe terá permitido desenvolver uma certa cumplicidade com a equipa organizadora.

Em seguida procurei ampliar a compreensão da sua atividade com um olhar mais pormenorizado sobre os processos de resolução de problemas com tecnologias. A relação que Marco estabelece com as ferramentas tecnológicas que escolhe usar para abordar os problemas revela um jovem em simbiose com o seu computador na medida em que não só domina as ferramentas que tem ao dispor como é capaz de as colocar ao seu serviço, nomeadamente, através do reconhecimento das suas possibilidades de ação e da sua efetiva utilização no desenvolvimento de uma abordagem para encontrar a solução. Este é, portanto, um exemplo da simbiose que Borba e Villarreal (2005) descrevem através da metáfora 'humanos-com-media' no sentido em que é possível observar que a procura de uma abordagem para deslindar a solução se faz já com a perspetiva daquilo que é possível obter com a tecnologia. Nesta nova entidade, surge como transversal às soluções produzidas o facto de estes *media* assumirem sobretudo o papel de ferramentas para visualizar e expressar visualmente o pensamento matemático. Uma outra característica importante da atividade deste jovem-com-ferramentas-de-visualização é o facto de se deslocar entre o *website* da competição, que contém o enunciado, a Ferramenta de

Recorte, o Paint e o Calc – sem nunca abandonar o ecrã do computador, ou seja, sem recorrer a qualquer outro tipo de ferramenta ou suporte escrito.

Por outro lado, as tecnologias que são incorporadas na unidade Marco-com-ferramentas-de-visualização podem ser mais ou menos convencionais para a aprendizagem da matemática e Marco também faz delas usos mais ou menos convencionais, percecionando as suas *affordances* para resolver-e-exprimir cada problema. Por exemplo, a solução elaborada relativamente ao problema 'Unidos e Cortados' (Secção 7.2) mostra que este jovem-com-ferramentas-de-visualização faz uso de programas bastante convencionais para fazer matemática, o GeoGebra e a folha de cálculo, embora o faça de formas não tão convencionais pois não procura a robustez das construções nem procura a simplificação do cálculo. Para além disso, os *media* também podem ser ferramentas não convencionais, ou seja, tecnologias de uso doméstico de que o Paint ou a Ferramenta de Recorte são exemplo. Mas as soluções analisadas mostram que estas também podem ser usadas eficientemente para desenvolver compreensão matemática que se torna crucial para encontrar e expressar a solução de um problema.

Cortar, reconstruir ou recolorir figuras são ações que levam à elaboração de objetos que exibem tanto uma compreensão matemática como uma compreensão tecnológica da situação. E são estes novos objetos que contribuem de forma decisiva para encontrar a solução e também se tornam numa parte fundamental da própria solução na medida em que se podem constituir como parte de um roteiro da abordagem desenvolvida (Lesh & Doerr, 2013). Deste modo, as construções, as transformações e as explicações de Marco-com-ferramentas-de-visualização são elementos fundamentais da sua atividade que assumem um duplo papel: suportam a abordagem que permite encontrar a solução mas, simultaneamente, permitem reportar os seus processos de matematização.

Estes dados evidenciam ainda a artificialidade da fronteira entre resolver o problema (isto é, os processos que se seguem até obter a solução) e a construção da resposta (isto é, a solução contida no ficheiro que é submetido ao Campeonato), dado que o pensamento matemático é desenvolvido em continuidade e é mesmo refinado enquanto a explicação propriamente dita está a ser produzida. Este caso está particularmente visível na Secção 7.3 em que ao desenvolver processos de resolução do problema com base numa conjetura específica, Marco-com-ferramentas-de-visualização acaba por só encontrar a solução do problema, diferente da ideia conjeturada, quando se encontra no processo de 'verificar', isto é, quando se envolve em atividades de justificação e explicação da sua solução, reportando-se aos novos objetos que construiu. Isto fortalece o argumento de que resolver um problema e expressar a sua solução são atividades simultâneas de matematização, pelo que resolver-e-exprimir problemas é uma noção que explica os processos de matematização deste jovem-com-media, sobretudo quando coloca em uso os seus conhecimentos matemáticos e tecnológicos para desenvolver abordagens tecno-matemáticas aos problemas do SUB14 (em consonância com os resultados de Carreira et al., 2016).

7.4.1 Evidências da capacidade de visualização na atividade de Marco

Conforme se referiu atrás, os *media* que Marco escolhe trazer para a sua atividade de resolução-e-expressão dos problemas do SUB14 têm uma forte componente de visualização: quer porque lhe permitem desenvolver pensamento visual que o pode conduzir às soluções, quer porque favorecem a expressão desse pensamento também da forma mais visual possível. Portanto, e apesar de conhecer ou dominar um conjunto alargado de ferramentas tecnológicas, as que Marco decide utilizar são aquelas onde identifica determinadas *affordances* que lhe possibilitam fazer uso das suas capacidades de visualização ou as ampliam.

A solução produzida para o problema 'Unidos e cortados' expõe estas preferências associadas às capacidades de visualização do jovem enquanto recorre ao GeoGebra. O recurso aos eixos e à grelha promove uma 'materialização' quase instantânea dos vértices dos quadrados, a partir das suas coordenadas aproximadas. A construção da sequência de quadrados, que continua com a ligação de vértices por meio de segmentos de reta, desencadeia o desenvolvimento e a exploração de perceções visuais. O retângulo envolvente, que acrescentou, serve ele próprio como um argumento visual que suporta a sua abordagem. Não menos importante é a familiaridade de Marco com a folha de cálculo e o conhecimento que detém sobre o GeoGebra, o que fazem com que o uso da folha de cálculo embutida no GeoGebra viabilize a 'gravação' de todos os passos da abordagem, incluindo os procedimentos e o raciocínio seguido. A atividade conducente à solução do problema 'Motivo decorativo' inicia-se pela interação visual com as inscrições (Presmeg, 1986) no ecrã e pelas transformações que Marco vai imaginando, prosseguindo com a efetiva manipulação da figura no ambiente digital, transformando-a à luz do conceito matemático de semelhança de triângulos e ainda com a expressão digital do processo que culminou com a obtenção da solução e da resposta.

A construção de diagramas ou ilustrações no decurso da resolução-e-expressão dos problemas acaba por suportar a visualização de conceitos fundamentais (Zimmermann & Cunningham, 1991), de que são exemplo a determinação da área de uma figura irregular ou a semelhança de triângulos, e constitui outro traço da atividade de Marco-com-ferramentas-de-visualização. Este caso expõe a existência de uma certa sintonia entre as capacidades de visualização espacial de Marco, as características de cada problema, nomeadamente das noções matemáticas envolvidas, e as das ferramentas que prefere usar. Com efeito, observou-se que a seleção do desafio a resolver já resulta da sua preferência por problemas geométricos em que pode usar a sua destreza tecnológica e os seus conhecimentos matemáticos, recorrendo a métodos visuais para manipular e transformar figuras de forma relevante para a obtenção da solução. Este facto, em conjunto com a introdução do retângulo que envolve a sequência de 8 quadrados na primeira solução analisada, pode ser interpretado como um "hábito de transformar" (Arcavi & Hadas, 2000) elementos visuais em ferramentas tecno-matemáticas indispensáveis à obtenção e à expressão das soluções.

As figuras apresentadas nos enunciados e as que mais tarde são viabilizadas pelos programas que Marco escolhe usar (GeoGebra, Paint, Ferramenta de Recorte) através de atividades de construção, de decomposição e de reconstrução acionaram a formulação de conjeturas acerca das propriedades ou relações geométricas existentes e que procura justificar, usando argumentos matemáticos. À semelhança do que defendem Borba e Villarreal (2005) relativamente à ampliação das capacidades de visualização estimulada pelas tecnologias digitais, constata-se que esta desempenhou um papel primordial em todas as fases da atividade de resolução-e-expressão do problema. Estes dados apontam ainda que estamos perante um *visualizador espacial* (Blazhenkova & Kozhevnikov, 2010; Kozhevnikov, Kosslyn & Shephard, 2005) dado que Marco é capaz de manipular mentalmente figuras, conseguindo proceder a uma análise 'parte por parte' das mesmas enquanto elabora uma sequência de argumentos que conduzem a uma conjetura. Em concordância com o estudo de Kozhevnikov, Hegarty e Mayer (2002), o sucesso de Marco-com-ferramentas-de-visualização na resolução destes problemas pode estar ancorado nesta sua capacidade de visualização espacial e na sua perceção das *affordances* das ferramentas que escolhe usar para desenvolver modelos conceptuais das situações.

7.4.2 Resolver-e-exprimir problemas de matemática com tecnologias

O modelo de Resolução de Problemas de Matemática com Tecnologias definido (Capítulo 3, Secção 3.3) permitiu descrever com detalhe as ações de Marco enquanto aborda problemas do SUB14. É agora possível fazer uma síntese dos aspetos que melhor caracterizam cada um dos processos em que se envolve para resolver-e-exprimir os problemas.

O jovem começa a sua abordagem a um novo problema ao ler o enunciado diversas vezes procurando apropriar-se do tema matemático que poderá estar envolvido, apreciando a sua autoconfiança tendo por base o seu grau de familiaridade com o tema ou com possíveis formas de o abordar, como o reconhecimento de que é capaz de reproduzir uma figura idêntica à do enunciado no GeoGebra (*captar*). Por vezes, o jovem tem necessidade de procurar apoio em algum momento da sua atividade pelo que recorre ao pai, à Internet, à professora ou, no caso da atividade observada, à investigadora (*comunicar*). Nesta última situação, a comunicação estabelecida visava clarificar um conceito referido no enunciado. Segue-se um processo de aprofundamento da compreensão das condições presentes nos problemas, quer percebendo que é necessário e possível construir a sequência de quadrados mencionada mas não visível no primeiro problema, quer apercebendo-se de algumas particularidades das figuras, como o facto do triângulo que ilustra o segundo problema ser equilátero (*identificar*).

Enquanto na primeira solução, os dados disponíveis sugerem que do processo anterior Marco passa ao reconhecimento de determinadas *affordances* da vista gráfica do GeoGebra (*interpretar*), a segunda solução oferece evidências de que essa passagem pode ser bem mais complexa. Como se pôde constatar, a produção de uma sequência de argumentos, as hipóteses que levaram à formulação de uma conjetura sobre a solução, decorreu num vai-e-vem entre dois processos, identificar e interpretar: o jovem apercebe-se que o triângulo é equilátero (*identificar*) e analisa o círculo central para tentar chegar aos outros menores (*interpretar*); em seguida encontra várias possibilidades de decomposição do triângulo (*identificar*) e com os dedos traça bissetrizes imaginárias e estima distâncias (*interpretar*); por fim, visualiza outra forma de decompor o triângulo em dois que sejam semelhantes (*identificar*) e simula essa decomposição com o dedo, formulando uma conjetura sobre uma possível solução do problema (*interpretar*).

O processo que se segue é o de dar corpo às conjeturas formuladas, o que passa pela utilização de ferramentas digitais com um sentido matemático: na primeira solução, Marco recorre ao GeoGebra e utiliza a grelha da vista gráfica para construir a sequência ampliada de quadrados com base nas coordenadas dos seus vértices, constrói uma semirreta (a linha de corte) e altera propriedades dos objetos para os destacar; na segunda solução, usa a Ferramenta de Recorte para criar ficheiros com as imagens do triângulo original e do triângulo no topo que resulta do corte imaginado e acaba por construir o limite inferior desta figura pois, para ser um triângulo tem que ter 3 lados (*integrar*). Neste problema, o processo de integração é desenvolvido em associação com o de exploração, ou seja, segue-se uma tentativa de analisar a possibilidade de sobrepor as duas figuras para mostrar que são semelhantes, mas como tal não é possível (o fundo não é transparente), Marco procede à edição gráfica das imagens de forma a transformar o triângulo original e recolorindo componentes da figura (*integrar*) para que tenha o mesmo aspeto gráfico que o triângulo pequeno, isto é, procura demonstrar visualmente que são semelhantes (*explorar*). Já no primeiro problema, a análise de um modelo conceptual decorre quando Marco visualiza a folha de cálculo no GeoGebra e nela insere listas com os comprimentos dos lados dos quadrados e as suas áreas (*explorar*).

Sucede-se o delinear de uma abordagem que permita obter a solução a partir dos modelos conceptuais que foram analisados anteriormente. Num caso, o completar da construção de um retângulo envolvente à sequência completa de quadrados e o registo da sua área na folha de cálculo indica que Marco encontrou uma forma de analisar a sua conjetura. No outro, é o abandonar das ferramentas de edição e a passagem para a folha de cálculo, onde Marco habitualmente compõe as soluções, que indica que as figuras construídas têm já um propósito (*planear*).

O processo seguinte diz respeito ao desenvolvimento da abordagem planeada – num caso a partir da diferença entre áreas, e no outro através da inserção e disposição das imagens editadas – durante a qual Marco utiliza conhecimentos matemáticos e tecnológicos para obter a solução (*criar*). Neste processo ganham particular relevo determinados elementos construídos intencionalmente por Marco e que revelam um entendimento tecno-matemático das soluções: é o caso do retângulo envolvente ou do triângulo transformado para evidenciar a sua semelhança ao menor – são novos objetos de conhecimento criados por Marco para resolver-e-exprimir o problema.

Seguem-se ações diretamente relacionadas com a explicação da solução ou a justificação a partir de argumentos matemáticos com suporte nos recursos tecnológicos (*verificar*). Em particular, Marco recorre à folha de cálculo do GeoGebra para registar a sequência de passos, pelo que a combinação entre a construção e os cálculos organizados geram uma solução tecno-matemática que 'autoexplica'. Na sua outra solução, o jovem descreve na folha de cálculo algumas das hipóteses que abordou e explica como obteve a solução, obtendo-a no preciso momento em que articula o seu pensamento matemático com as imagens editadas.

A submissão das soluções é feita através do formulário existente na página do SUB14 e consiste no envio dos ficheiros elaborados, podendo conter algumas indicações sobre como deve a equipa organizadora proceder para aceder às soluções (*disseminar*). Nos problemas em que tal foi solicitado, e também no caso do problema que Marco foi observado a resolver, o jovem fez a sua apreciação sobre quem o tinha ajudado, sobre o grau de dificuldade do problema e sobre se tinha gostado de o resolver.

7.4.3 Evidências de Fluência Tecno-matemática de Marco

As tecnologias digitais assumem um papel de relevo ao longo da atividade de resolução de problemas de Marco, embora possam assumir um papel menos percetível em determinados processos, tal como parece ser o caso da construção da solução do problema 'Motivo decorativo', nomeadamente nos processos iniciais em que vai formulando uma série de hipóteses a partir apenas de uma interação visual com o ecrã.

Marco reconhece uma grande diversidade de ferramentas tecnológicas como adequadas à produção de soluções digitais dos problemas do campeonato: tanto utiliza programas convencionais, isto é, que se espera encontrar em ambientes de aprendizagem formal e são reconhecidos como ferramentas matemáticas (e.g., GeoGebra, folha de cálculo), como ferramentas não convencionais, ou seja, programas que não são habitualmente conotados com o ensino ou a aprendizagem da matemática (e.g., Paint, Ferramenta de Recorte).

Todavia, o jovem revela ser bastante fluente na utilização da folha de cálculo, que encara como uma 'ferramenta-mestra', com a qual pode abordar qualquer problema do SUB14. A utilização da folha de cálculo pode ter dois propósitos distintos: i) compor a sua resposta aos problemas, o que habitualmente compreende o registo do número do problema à esquerda, a inclusão de imagens alusivas ao problema (copiadas ou criadas por si) e o registo escrito do seu processo de resolução; ou ii) resolver os problemas com recurso a ferramentas específicas do programa, o que pode envolver a formatação de células específicas ou a inserção de texto com descrição do processo de resolução, mas também a utilização de fórmulas, o arrastamento da alça de uma célula para preenchimento de uma coluna com uma determinada relação. Esta última utilização é mais focada nas *affordances* convencionais da folha de cálculo. Em boa verdade, o seu à-vontade com este programa leva-o inclusive a fazer uso da folha de cálculo embutida num ambiente de geometria dinâmica como o GeoGebra.

As tecnologias que Marco escolhe usar e combinar com a folha de cálculo levam-no a níveis mais profundos de compreensão das noções envolvidas em cada problema, bem como das soluções que vai desenvolvendo, nomeadamente, através da construção e manipulação de figuras pelo que se transformam em importantes ferramentas para dar corpo aos aspetos visualizados. Assim, a fluência tecno-matemática de Marco parece ter origem, por um lado, na sua capacidade de perceber como as *affordances* de cada ferramenta podem conduzir a significados matemáticos indispensáveis à solução dos problemas e, por outro, no reconhecimento de como essas *affordances* podem ampliar a sua perceção visual dos conceitos envolvidos para resolver os problemas e exprimir as suas soluções.

Uma das particularidades da sua fluência tecno-matemática é a produção de novos objetos de conhecimento durante o desenvolvimento de um modelo conceptual subjacente à solução de um dado problema. Na primeira solução, o retângulo que Marco acrescentou à sua construção, e não é mencionado no enunciado, assume uma grande relevância no descortinar de um caminho de resolução pois é a partir dele que entende que a solução pode ser encontrada ao subtrair a área do semi-retângulo à área da sequência de quadrados. Na solução do problema 'Motivo decorativo' são as figuras transformadas (o triângulo pequeno no topo, o triângulo maior recolorido) que congregam conhecimento matemático e tecnológico sobre a situação, ou seja, servem de argumento visual para explicar a semelhança dos triângulos considerados.

Em suma, a fluência tecno-matemática de Marco evidencia-se na utilização concomitante de conhecimentos matemáticos e tecnológicos para efetuar construções e transformações de figuras durante o processo de resolução-e-expressão dos problemas do

SUB14. Embora sem mostrar grande preocupação com o rigor que é característico da matemática, a produção dessas inscrições favorece a perceção de como podem ser utilizadas para visualizar uma forma de obter as soluções dos problemas. Tanto a perceção das *affordances* do GeoGebra, por um lado, e das *affordances* das ferramentas de desenho e de edição de imagens, por outro, assumem um papel crucial na identificação de um caminho a seguir. Enquanto os eixos e a grelha suportam visualmente a construção e a folha de cálculo permite registar a sequência de passos seguida, a captação da imagem, a sua manipulação em termos de dimensões e cores permite transformá-la num argumento matemático indispensável ao desenvolvimento de um modelo conceptual sobre a semelhança dos triângulos. No decurso da atividade de Marco são desenvolvidos modelos conceptuais elementares, modelos de, bastante próximos do contexto e nos quais prevalece uma matematização horizontal suportada nos argumentos visuais construídos.

7

Beatriz -com-Ferramentas-de-Expressividade

Ela agora domina isso tudo! Mais do que é o desejável…

(Mãe da Beatriz)

Beatriz: Dados de identificação

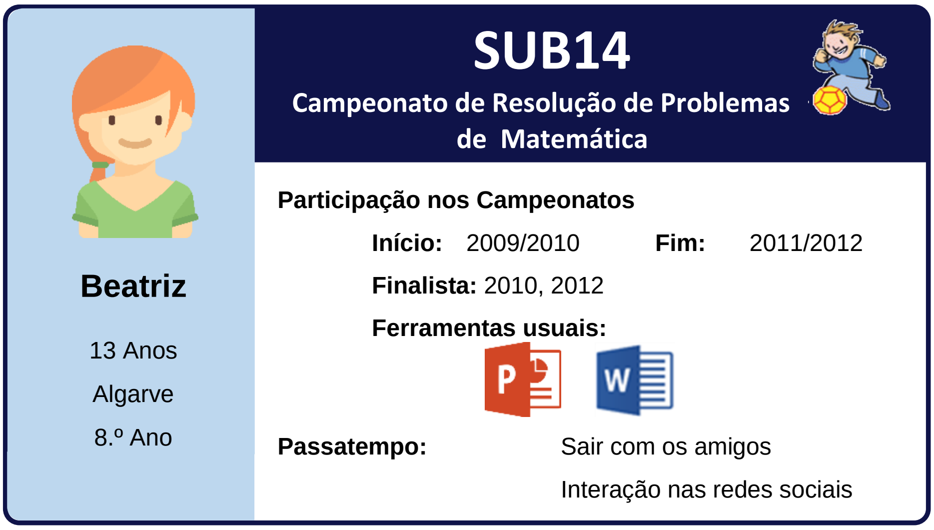


Figura 8.1. Dados de Identificação de Beatriz

Beatriz é uma jovem de 13 anos que participou em três edições dos Campeonatos. A sua primeira experiência foi no 6.º ano de escolaridade, no SUB12, tendo chegado à Final. A segunda participação foi no ano seguinte, então no SUB14, mas o seu grupo cedo se desorganizou e Beatriz acabou por desistir também. Finalmente, participou no SUB14 durante o seu 8.º ano e foi apurada para a Final.

Sempre foi boa aluna, muito empenhada nas tarefas e responsável, mas bastante conversadora nas aulas. Segundo a mãe, Beatriz fazia birras no 1.º ciclo quando não era a melhor aluna da turma. Outra das suas características é a imensa curiosidade que demonstra e a leva a aprender muitas coisas sozinha. Quando tem dúvidas pergunta aos amigos. Aliás, o início da adolescência tem sido um período conturbado segundo a mãe: as amizades e a vida social estão agora em primeiro plano, o que faz com que os pais se comecem a sentir inquietos com a impossibilidade de fiscalizar tudo. Uma das suas maiores preocupações é o facto de Beatriz ser inseparável do seu telemóvel e já ter definido *passwords* para tudo, quer no telemóvel, quer na sua área no computador. Outro exemplo desta desvinculação da família é o facto de a mãe de Beatriz só ter sabido que ela estava a participar nesta edição do SUB14 quando recebeu um contacto a solicitar a sua autorização para participar nesta investigação. Embora procurasse manter-se discreta nos primeiros encontros, Beatriz não conseguiu disfarçar o seu grande entusiasmo por participar neste estudo.

Segundo a mãe, Beatriz contactou pela primeira vez com um computador aos 4 anos, quando os pais o compraram, e utilizava-o com frequência para ir jogar no *site* da Disney; mais tarde, a professora de 1.º ciclo fomentou um outro contacto com os computadores em sala de aula.

> Mãe: Ela… era também os jogos, também os da Disney, começou por aí. Ela ficava a ver o canal da Disney e depois pedia para nós escrevermos e depois ela ia jogar com uma facilidade…
>
> Investigadora: Portanto ela nessa altura usava mais para joguinhos, mas depois chegou à escola… houve uma evolução…
>
> Mãe: Rápida! Eu… nem tinha bem noção do que ela já era capaz de fazer. Ela depois lá na escola, a professora no 3.º e no 4.º ano também usava, começaram a utilizar muito e ela às vezes vinha para casa… a professora devia entrar num *site* qualquer para tirar fichas para eles fazerem e ela chegava aqui e fazia. “Então e onde é que foste buscar isso?” [risos] “Ah, a professora fez assim”. E eu não sei se ela memorizava…

A mãe trabalha no agrupamento de escolas em que Beatriz tem estudado, pelo que vai acompanhando de perto esta e outras evoluções da filha. Ainda em relação ao uso de tecnologias na sala de aula, recorda:

> M: Eu trabalho lá na escola onde ela anda. E então é um contacto, tenho mais acesso, vejo, não é? E ela também dizia “ah, a professora quer assim, quer não sei como” e insistia, e era muito bom para ela porque certos programas ela não conhecia e a professora ajudou.

Este conhecimento que Beatriz foi desenvolvendo, um pouco devido à sua curiosidade, ao acesso em casa e na escola, acabou por ir partilhando com os restantes membros da família. Por exemplo, criou um blogue para a mãe publicar fotos dos seus bolos e assim iniciar um negócio próprio de bolos decorados (*cake design*). Também a ensinou a pesquisar músicas e a fazer *downloads* do YouTube, o que a levou posteriormente a utilizar esta ferramenta para aprender mais sobre a modelagem de pasta de açúcar, já que os cursos de formação disponíveis, além de escassos no sul do país, são bastante dispendiosos.

> M: Pronto, praticamente é para publicar as fotos dos bolos, não é? E é um blogue...
>
> I: Eu estive a ver o seu blogue. Foi a [Beatriz] que fez? Está muito giro.
>
> M: Sim ela é que me ensinou a... lá a fazer aquilo e é fácil, mas estou no início. Agora sou eu que publico que ela não tem tempo.

O fascínio pela vida social prolonga-se pelo mundo digital, pelo que Beatriz tem perfis em várias redes sociais e interage com 'amigos virtuais' que têm interesses em comum, mas que não conhece pessoalmente.

> B: Todos os dias eu vou ao computador. Agora estou ali com uma página aberta, o Twitter.
>
> I: Com o Twitter? E tens amigos que também têm Twitter?
>
> B: Aaa... tenho só uma da escola, mas depois tenho ali outro pessoal...
>
> I: E de que é que vocês conversam?
>
> B: Aaa... sobre o Justin Bieber.
>
> I: Ok, está bem. [fala mais sobre o Justin Bieber]. E também tens Facebook?
>
> B: Tenho, mas uso mais o Twitter.
>
> I: Por esse motivo? [seguir o Justin Bieber]
>
> B: Hã-hã. Até porque agora fiz uma amiga e então falo com ela. No Facebook os amigos são aqueles que eu posso mandar uma mensagem ou falar da escola...
>
> I: E fazes mais alguma coisa no computador? Só conversas com esses amigos pelo Twitter ou Facebook... Tens um blogue? Partilhas fotos?
>
> B: Ah e também ouço música no YouTube... fotos e isso só no Facebook e [tiro fotos] com a máquina... o telemóvel tem uma câmara muito básica.

Esta imersão pelo mundo das redes sociais e outras tecnologias preocupa a mãe, que não se conforma com a descontração com que Beatriz encara o estudo, mas reconhece que "ela depois aparece com as notas".

> M: Às vezes faz-me confusão a maneira como ela estuda. Está muitas vezes com televisão ligada, a escrever mensagens…
>
> B: [interrompe] Ah isso é mentira, eu vou sempre lá para cima estudar, como é que tu sabes?

M: E ela já vai fechando a porta… mas é... às vezes a escrever mensagens, sei lá, para os amigos.

Em relação à escola, Beatriz admite que não gosta da disciplina de matemática pois acha que as aulas são muito aborrecidas. Pelo contrário, tem uma excelente relação com a professora de quem gosta muito: "ela é bué simpática".

Beatriz: Acho que [a aula de matemática] é uma seca [risos]. Não gosto muito, tem outras que gosto mais, tipo Inglês, gosto mais de línguas . . . as outras também são uma seca!

No entanto acaba por confessar que aprecia certas atividades das suas aulas de matemática, como por exemplo, quando resolvem exercícios ou quando resolvem problemas antes dos testes. Mesmo sem gostar da disciplina, considera-se uma 'boa aluna a matemática', é muito aplicada, quer ser sempre a melhor e tem a receita para se obter bons resultados:

B: Então eu acho que a melhor maneira de estudar matemática é fazer muitos exercícios e problemas e isso. Eu acho que o próprio SUB14 e também as Matematiquices na escola nos ajudam.

I: Há pouco estavas a dizer que participar nesses campeonatos te ajudava nas aulas…

B: Porque eu acho que, como nós estamos a resolver e a tentar procurar respostas, estamos sempre ali a analisar, mas acho que nos faz bem porque já estamos a estudar sem nos apercebermos.

A competição 'Matematiquices' é organizada a nível de escola pelos professores de matemática e funciona através da plataforma Moodle. A Beatriz também participa nessa atividade todos os anos e já ganhou o primeiro prémio numa das edições no valor de 100€, o que a deixa muito orgulhosa.

A professora também mandou resolver alguns problemas do SUB14 nas aulas, mas propõe habitualmente os problemas que vêm no final de cada capítulo do manual, que não são muito parecidos com os do Campeonato. Aliás, Beatriz considera que são diferentes no sentido em que têm como finalidade a aplicação dos conceitos que estiveram a trabalhar previamente por isso têm que se resolver "com aquela matéria". Em relação aos do SUB14 refere: "aí já é um bocado mais diferente porque utilizamos várias coisas", ou seja, entende que resolver estes problemas requer mais do que saber aplicar um certo procedimento ou conteúdo.

Nas aulas não costuma usar tecnologias. A calculadora só é necessária para “fazer aqueles cálculos que são assim manhosos . . . ou a stora faz de cabeça”, ou então para os testes, mas esquece-se sempre de a levar. As salas de aula não têm quadro interativo e a professora nem costuma pedir para os alunos irem ao quadro. Hoje em dia, Beatriz utiliza o computador para fazer os trabalhos da escola, normalmente utilizando o Word e a Internet, e ainda o PowerPoint quando tem que acompanhar esses trabalhos por uma apresentação oral.

A sua participação nos Campeonatos já vem desde o 6.º ano de escolaridade e gosta muito de participar, sobretudo da experiência de ir à Final. Ao preencher o formulário de submissão de respostas com a sua apreciação de cada problema da última edição, assinalou que gostou ‘pouco’ ou ‘mais ou menos’ de os resolver e que resolveu vários problemas sozinha, um deles com ajuda dos amigos e outros com ajuda da professora. Em conversa explica que chega a discutir com os colegas como vai apresentar as suas soluções, por vezes, nas próprias aulas. A professora de matemática incentiva os alunos a participar no SUB14, permitindo que resolvam alguns problemas nas suas aulas e acompanhando-os à Final na Universidade do Algarve.

Nesta edição, a Beatriz usou o editor de apresentações PowerPoint para criar as suas soluções. No entanto explica que a produção digital das soluções é posterior à descoberta da resposta que acontece quase sempre usando papel e lápis. A propósito do problema ‘Enquanto dura a bateria’ (Anexo H; detalhes na Secção 8.1.3), Beatriz recorda:

> B: Posso falar do último que é o que eu me lembro mais. Então, eu deixei para o último dia, que era domingo, e depois lembro-me que estava aqui no sofá e estava com sono a ver televisão. Mas depois lembrei-me: “Ih! Tenho de ir resolver o problema!” Levantei-me, vim para aqui [secretária com computador] e peguei numa folha. Primeiro fiz um rascunho na folha de como é que ia resolver. Comecei ali a rabiscar até que me surgiu uma ideia da forma como deixei as coisas. Então virei a folha e no outro lado meti tudo mais organizado, depois fui ao computador, abri o PowerPoint e fiz lá, passei para o computador.

Em relação ao uso de outras ferramentas Beatriz explica que, apesar de ter uma máquina de calcular, recorre esporadicamente à calculadora do telemóvel enquanto está a resolver algum problema do SUB14: “Não, só se [usar a calculadora] no telemóvel. Eu tenho uma mas está numa gaveta, nem sei. Eu nunca a uso, esqueço-me sempre de a levar para as aulas. E aqui em casa também nunca a uso”. Portanto, a máquina de calcular não é um instrumento a que recorra com frequência, nem na sala de aula, nem nas tarefas que efetua em casa, e quando necessita de efetuar algum cálculo mais complexo recorre à ferramenta que tem à mão que também oferece essa potencialidade: o telemóvel.

8.1 A atividade de resolução de problemas com tecnologias

Os primeiros encontros com Beatriz e a sua mãe revelam algumas características que moldam a sua atividade de resolução de problemas com tecnologias, no âmbito do SUB14 (Figura 8.2). Beatriz é uma adolescente que tem brio em ser boa aluna, mas quer manter um certo estatuto social para ser bem aceite pelos amigos, mostrando algumas atitudes mais irreverentes, sobretudo para fugir ao controlo da mãe. Faz-se presente nas redes sociais e revela ser muito fluente na utilização de uma diversidade de tecnologias digitais. Para resolver os problemas do SUB14 recorre ao papel e lápis e, posteriormente, transporta essa resolução para um ambiente digital, por norma, utilizando o PowerPoint. Costuma cumprir os prazos estabelecidos, embora submeta as soluções no último dia. Apesar de admitir recorrer à professora ou a colegas, Beatriz gosta da sua independência pois tem gozo e orgulho em resolver estes desafios sozinha.

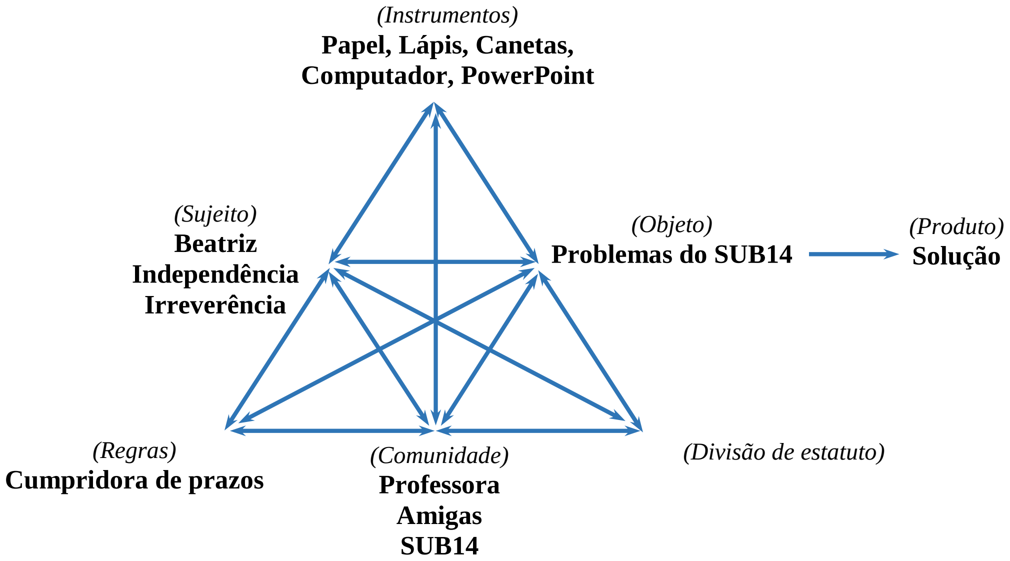


Figura 8.2. Primeiro esboço da atividade de Beatriz no contexto do SUB14

8.1.1 As relações com a comunidade na atividade de Beatriz

A atividade de resolução de problemas com tecnologias de Beatriz é enquadrada pelas relações que desenvolve, naturalmente, com a equipa do SUB14 mas também com a professora de matemática e com as colegas de turma.

Beatriz dialoga com frequência com as amigas que também se encontram a participar no Campeonato e, quando sente dificuldades na resolução dos problemas, pede ajuda à professora de matemática.

> I: E quando tens dificuldades ou precisas de ajuda a quem é que tu pedes?
>
> B: Aaaa, ou à [Maria] que é uma amiga minha, ou então à [Ana] que também é de outro grupo e já apareceu aí as resoluções dela também [publicadas na página do SUB14].
>
> I: Em casa não falas dos problemas com os pais?
>
> B: Não. Só falei deste mas foi porque estava aqui a resolvê-lo. Ah! E à professora também!
>
> I: Como é que a professora ajuda normalmente?
>
> B: Ah! Ela resolve sempre e depois deixa-nos resolver.

A professora de matemática tem, segundo Beatriz, um papel importante no acompanhamento do seu trabalho e dos alunos que também se encontram a participar no SUB14: incentiva a participação dos alunos, lembra-lhes os prazos, cria espaço nas suas aulas para que os alunos possam resolver os problemas e supervisiona essa atividade.

A Maria e a Ana são duas colegas que Beatriz refere com frequência e que também se encontram a participar no SUB14. Apesar de concorrerem individualmente, as jovens discutem os problemas entre si e as soluções encontradas; Beatriz explicitamente recorda que conversa com as amigas sobre a forma de apresentar essas soluções. A propósito da resolução do problema #7 – 'Almoço de colegas' (Anexo H; detalhes na secção 8.2), Beatriz recorda-se de uma aula em que conversava com Maria, colega de carteira, sobre a forma como podia apresentar a solução.

> B: Aí... hum... tive a ideia numa aula de matemática, estava a pensar... não estava a ouvir a... [risos] a professora que estava a fazer uma correção, e então eu estava a falar com a [Maria] e "oh pá, não sei como é que vou fazer" e depois "Ah! Acho que vou fazer assim e não sei quê" e depois enquanto ela estava a falar eu acho que estava a pensar e depois quando ela acabou de falar "Ih! Olha também já sei vou fazer um tipo de género de… não sei como é que se chama" [conjuntos].

A relação que mantém com a equipa do SUB14 durante a fase de apuramento é cordial mas ténue pois limita-se, praticamente, ao envio das soluções. Houve apenas um contacto mais explícito em torno da resolução do primeiro problema. A equipa do SUB14, entendendo que a sua solução não apresentava o rigor necessário para ser considerada completamente correta, resolveu advertir Beatriz a esse propósito (Figura 8.3).

Olá [Beatriz]
Muito obrigada pela tua participação!

Recebemos a tua resposta ao problema 1 e estivemos a analisá-la.
Apesar do teu esquema não apresentar de forma muito rigorosa os dados do problema, vamos considerar que a tua resolução está correta. Nas próximas resoluções tenta explicar com mais pormenor os teus esquemas e todas as informações que incluíres. Neste, por exemplo, não se consegue perceber que o Alexandre e o Bernardo se encontram às 11h, pois as chavetas que usaste não se encontram nesse local...

A partir de agora o teu número de camisola é o [XXX]. Nunca te esqueças de indicar sempre o teu número de camisola em TODAS as mensagens que enviares para o Sub14.
Contamos contigo na próxima jornada!
Até breve,
Sub14

Olá.
Obrigada pela atenção, vou fazer melhor para a próxima. Boa noite.

Figura 8.3. Troca de *e-mails* entre o SUB14 e Beatriz

Apesar de ter aceitado a resolução, a equipa do SUB14 aponta os aspetos que devem ser melhorados nas resoluções futuras: explicar com mais pormenor todos os esquemas que a jovem resolver incluir. Beatriz não só acata a apreciação como se compromete a seguir as recomendações nas próximas produções.

8.1.2 As regras de participação na atividade de Beatriz

O desempenho de Beatriz é muito próximo do excelente: as suas resoluções foram sempre aceites como corretas e percebe-se que, a partir da advertência do SUB14 acima mencionada, a jovem procura exceder-se na clareza das suas explicações, combinando esquemas e imagens com a descrição do seu raciocínio. Um exemplo deste cuidado está patente na resolução do problema ‘Até encher o tanque’ (Anexo H) que remete para o enchimento de um tanque com duas torneiras de caudais diferentes.

No PowerPoint, Beatriz reproduz uma simulação do enchimento do tanque, primeiro considerando as condições de enchimento com a torneira 1 e, em seguida, com a torneira 2. Aos dois esquemas e correspondentes legendas, Beatriz acrescenta uma descrição do seu raciocínio em que justifica a sua solução, explicando em que medida os esquemas lhe foram úteis (Figura 8.4). Nesta solução é apenas de assinalar uma imprecisão quando associa as duas partes a vermelho, os *dois* y, i.e., as quantidades de água vertida pela torneira 1, com $2x$, i.e., as quantidades vertidas pela torneira 2. Se assim fosse, o caudal seria o mesmo, pelo que as partes a vermelho deviam estar legendadas com um único y.

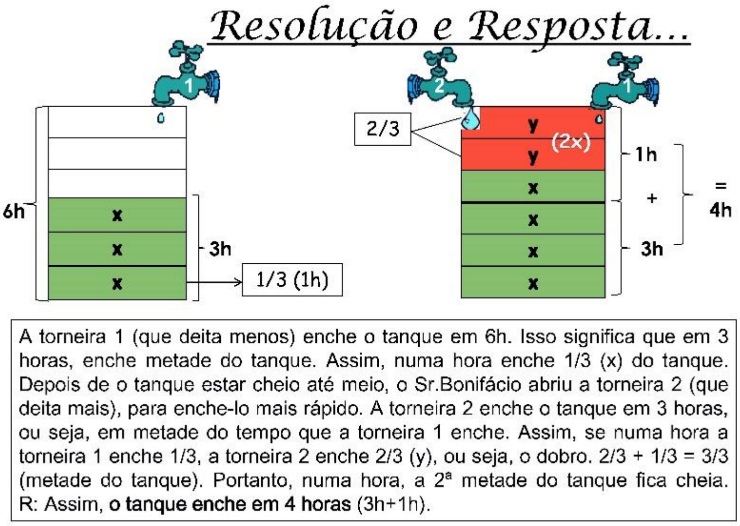


Figura 8.4. Slide enviado por Beatriz com a resolução do Problema #3 – Até encher o tanque

Para além da sua preocupação com a clareza e a completude das resoluções, o seu trabalho também prima pela organização, pelo aspeto gráfico associado a um certo sentido estético, pela sua atenção aos detalhes. Aliás, a maioria das soluções criadas por Beatriz no PowerPoint compreende três slides: um com a 'capa', com uma imagem de fundo alusiva ao contexto do problema e a sua identificação, um slide com os dados do problema, e outro (ou mais) com a resolução propriamente dita. A Figura 8.5 mostra os dois primeiros slides que acompanharam a resolução do problema referido anteriormente.

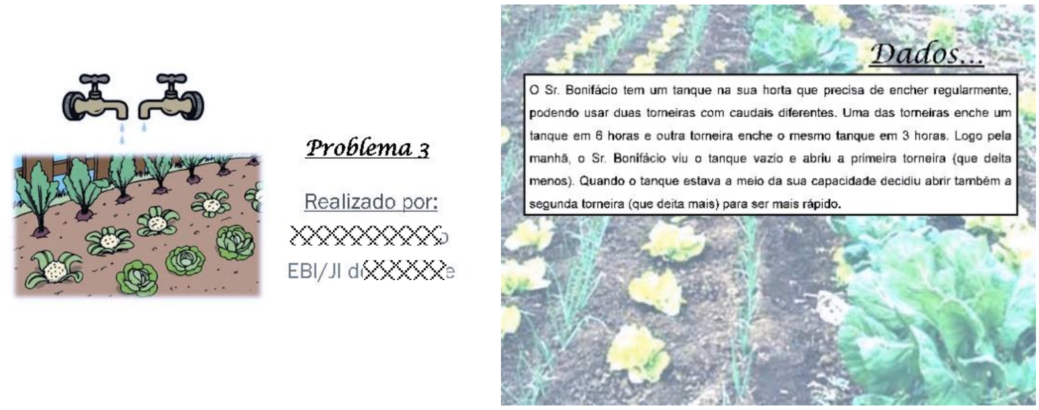


Figura 8.5. Slides que precedem a resolução do Problema #3: a capa, à esquerda; os dados, à direita

Como sabe que qualquer programa é permitido, Beatriz valoriza o PowerPoint por ser ideal para expressar o seu sentido estético e abrilhantar as suas respostas combinando esquemas, imagens, cores e texto. Esta é, também, a sua forma de responder ao apelo do SUB14 para explicar com clareza os processos de resolução. A Figura 8.6 mostra a resolução do problema #4 – 'Rebuçados para as amigas' (Anexo H) em que Beatriz faz uma distribuição de 'rebuçados' (elipses coloridas) pelas '14 amigas' (imagens inseridas) e vai esquematizando e contabilizando abaixo o total de rebuçados distribuídos. Ao chegar à 14.ª amiga, Beatriz apercebe-se que esse total excede o número disponível em 5 rebuçados, pelo que conclui que uma das amigas não poderá ter recebido rebuçados (a amiga 'E'), encontrando assim a solução.

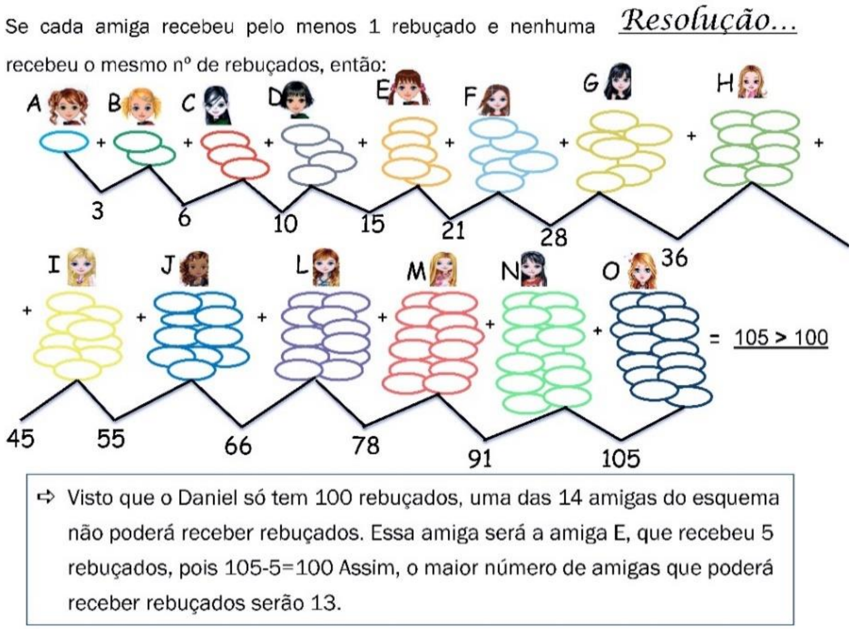


Figura 8.6. Slide enviado por Beatriz com resolução do Problema #4 – Rebuçados para as amigas

A jovem costuma cumprir os prazos estipulados na competição. Apesar de se inteirar de cada novo problema nos primeiros dias em que é lançado, incentivada pela equipa do SUB14, é habitual submeter a sua solução no último dia do prazo. Todavia, Beatriz explica que esse é o dia em que vai compor a resposta pois, habitualmente, já pensou no problema e estudou alguma forma de o resolver de antemão.

> B: Foi logo no dia em que saiu e depois vim ver. Normalmente, eu mando sempre no domingo, não é? Então a resposta vem na segunda. Então eles dizem sempre para ir lá espreitar o problema [novo] e eu vou sempre logo.
>
> I: Vês logo o problema?
>
> B: Só que normalmente não resolvo logo. Vejo só, fico assim, às vezes penso e tal e depois de alguns dias é que vou ver outra vez.

Beatriz também conhece bem outras regras do SUB14 e utiliza-as a seu favor, ou seja, da forma que mais lhe convier ou menos trabalho der. É o caso das regras de apuramento para a Final do SUB14 que estipulam a obrigatoriedade de resolver corretamente oito dos dez problemas propostos. Com esta regra em mente, Beatriz optou por não resolver os últimos dois problemas desta edição por já ter sido apurada com oito problemas corretamente resolvidos.

8.1.3 O papel do PowerPoint na atividade de Beatriz

De acordo com o que refere Beatriz, a sua ferramenta preferida para responder aos problemas do SUB14 é o PowerPoint, muito embora conheça outros programas como o Excel ou o Word. Todavia, conforme explica, é o PowerPoint que lhe permite tornar a exposição da sua resolução mais "bonita".

> I: E porque é que preferes o PowerPoint?
>
> B: Porque... amm... também há um [programa] que acho que é bom para resolver, que é o Excel. Mas esse, eu não sei mexer, por isso... não vou utilizar esse. E o Word, acho que fica mais... assim... a apresentação fica menos bonita. Gosto mais do PowerPoint.
>
> I: E lembras-te quando é que aprendeste a usar o PowerPoint?
>
> B: Não!
>
> M: Na escola primária. Acho que fizeram um trabalho... com a professora [Amélia] no 4.º ano.

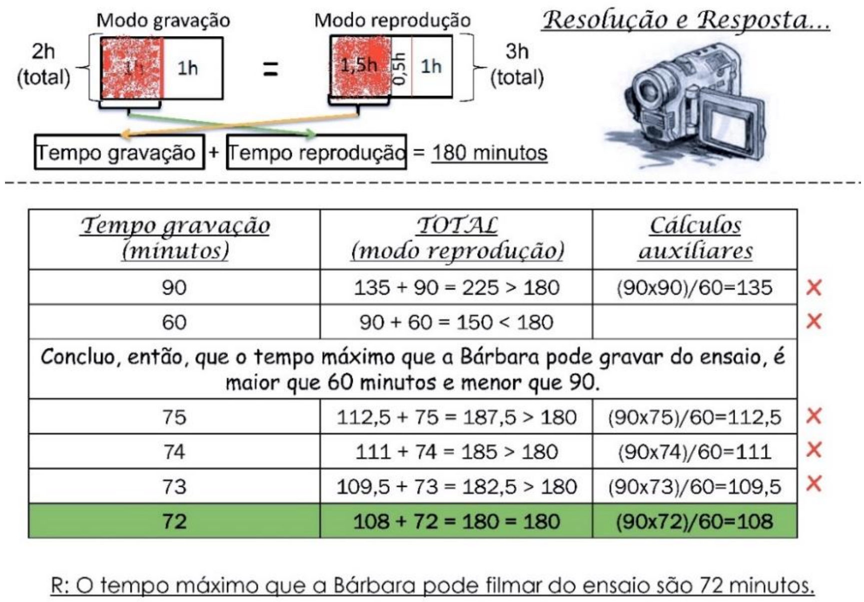
Tal como a mãe de Beatriz ajuda a lembrar, a jovem começou a contactar com o PowerPoint já no 1.º ciclo. A utilização continuada deste programa para elaborar apresentações de trabalhos para outras disciplinas conferiu-lhe alguma destreza na utilização de ferramentas específicas que lhe permitem expressar-se naquela que lhe parece ser a melhor forma possível.

Um outro exemplo da utilização desta ferramenta é a solução submetida por Beatriz ao problema #8 – 'Enquanto dura a bateria' (Anexo H), que remete para a otimização do tempo de gravação de uma câmara de modo a que, com a mesma carga, também seja possível visionar, na totalidade, o filme gravado. O *slide* que contém a resolução de Beatriz é apresentado na Figura 8.7.

Como é habitual, Beatriz acedeu ao problema quando foi publicado e não imprimiu o enunciado: "fiquei com ele [na cabeça], é fácil, era só duas horas no modo de [gravação] e três no de reprodução". Tentou resolver o problema no momento, com papel e lápis e recorrendo a esquemas, tendo obtido 60 minutos como resposta.

> B: Ah, na altura li e depois comecei assim a fazer uns desenhitos, uns esquemas, e depois deu-me só 1h . . . Depois perguntei à minha professora . . na escola "Ó Stora,

deu-me 1h, não sei se está bem, veja lá". Depois ela viu e disse-me que dava 72. E eu: "72?" Vim para casa, ela não me disse como é que se chegava lá, não é? E fiz.



Tempo gravação (minutos)	*TOTAL (modo reprodução)*	*Cálculos auxiliares*	
90	135 + 90 = 225 > 180	(90x90)/60=135	×
60	90 + 60 = 150 < 180		×
Concluo, então, que o tempo máximo que a Bárbara pode gravar do ensaio, é maior que 60 minutos e menor que 90.			
75	112,5 + 75 = 187,5 > 180	(90x75)/60=112,5	×
74	111 + 74 = 185 > 180	(90x74)/60=111	×
73	109,5 + 73 = 182,5 > 180	(90x73)/60=109,5	×
72	**108 + 72 = 180 = 180**	**(90x72)/60=108**	

R: O tempo máximo que a Bárbara pode filmar do ensaio são 72 minutos.

Figura 8.7. Slide com resolução de Beatriz do Problema #8 – Enquanto dura da bateria

A informação de que a solução seria 72 minutos, levou-a a reformular a sua abordagem inicial para resolver o problema baseada na tentativa e erro. Com a nova pista percebeu que pode reformular as suas tentativas de modo a aproximar-se da solução.

B: Então... ah, como nós temos que explicar como é que lá chegámos, hum, acho que pensei em tentativas. E depois pensei como 90 vai dar muito mais, então vou descer para 60, porque já sabia que depois ia dar 72, e depois aí já vou poder dizer que o tempo seria maior que 1h e menor que 1h30 porque experimentei...

Tal como recorda, o facto de ter que explicar como obteve a solução levou-a a recorrer a tentativas já que lhe permitem expor com facilidade o processo de resolução. No topo do slide, Beatriz incluiu esquemas (Figura 8.8) que exprimem a sua compreensão dos aspetos chave do problema: os retângulos (construídos por ela no Paint) e as setas e as formas automáticas (no PowerPoint) ilustram a relação existente entre a duração da bateria nos dois modos. Beatriz conclui que "o tempo de gravação mais o tempo de reprodução dá 180" no modo reprodução, ou seja, a jovem compreende que no final de uma gravação de $1h$, a bateria terá carga suficiente para reproduzir $1{,}5h$ de filme.

B: Eu aqui meti que o tempo de... de gravação mais o de reprodução tinha de ser de 180, igual não é . . . Por exemplo, uma hora no [modo] de gravação não é igual a uma hora no modo de reprodução . . . como é que hei de explicar, o tempo de gravação tinha de ser o tempo que é equivalente mas no modo de reprodução.

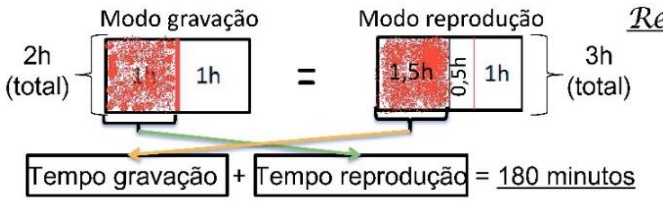


Figura 8.8. Esquema construído por Beatriz no slide com a sua resolução do Problema #8

Esta informação é depois utilizada para efetuar uma série de tentativas, organizadas numa tabela que Beatriz construiu e formatou no PowerPoint. Uma coluna contém várias possibilidades para o tempo de gravação do filme, outra o total de carga gasta no modo de reprodução daquele filme, e uma terceira com os “cálculos auxiliares” (Figura 8.9).

Tempo gravação (minutos)	TOTAL (modo reprodução)	Cálculos auxiliares
90	135 + 90 = 225 > 180	(90x90)/60=135
60	90 + 60 = 150 < 180	
Concluo, então, que o tempo máximo que a Bárbara pode gravar do ensaio, é maior que 60 minutos e menor que 90.		

Figura 8.9. Excerto da tabela construída por Beatriz com a sua resolução do Problema #8

Em relação aos cálculos auxiliares, Beatriz explica “para lá chegarmos temos de fazer uma regra de três simples”. Na primeira tentativa, determinou o tempo sobrante da carga da bateria no modo de reprodução após $90min$ de gravação: $90min$ de gravação corresponderão a um certo tempo de reprodução se a proporção entre as $2h$ de gravação e as $3h$ de reprodução se mantiver ou, de forma simplificada, entre $60min$ e $90min$:

$$\begin{array}{ccc} 90min & \text{———} & x \\ 60min & \text{———} & 90min \end{array}$$

Assim, se for gravado um filme com a duração de $90min$, o mesmo poderá ser reproduzido em $90 \times 90 \div 60 = 135min$. Como o total de $225min$ é superior à carga da bateria para reprodução ($180min$), não é possível reproduzir aquele filme na íntegra. Raciocínio idêntico levou Beatriz a determinar se é possível reproduzir um filme com a duração de $60min$, concluindo que fica aquém da carga total disponível. As tentativas falhadas foram assinaladas no final de cada linha com um xis vermelho, inserido numa caixa de texto. O passo seguinte foi encontrar o valor que se situa ao centro do intervalo estipulado, obtendo assim uma nova entrada na sua tabela: $75min$. Ao obter um valor superior mas bastante perto dos $180min$, decide ir diminuindo $1min$ ao anteriormente testado nas suas novas entradas na tabela (Figura 8.10).

> B: Depois pensei, hum, para não estar sempre a meter 1 min, 1 min, 1 min, que depois ia dar bué passos na minha cabeça, fiz... vou acrescentar 15 min para ver como é que dá. E depois pensei, ah! dá maior que 180 então eu vou descer 1 min, e pronto desci 1, depois outro e depois cheguei lá.

75	112,5 + 75 = 187,5 > 180	(90x75)/60=112,5
74	111 + 74 = 185 > 180	(90x74)/60=111
73	109,5 + 73 = 182,5 > 180	(90x73)/60=109,5
72	**108 + 72 = 180 = 180**	**(90x72)/60=108**

Figura 8.10. Excerto do slide produzido Beatriz com a obtenção da solução do Problema #8

Continuou a sua estratégia até obter um total de $180min$ para a carga da bateria em modo de reprodução após gravar e visualizar o filme. Esta tentativa, que conduziu à solução, foi realçada através do uso do negrito no texto e do preenchimento a verde da linha. A resposta ao problema surge no final do slide numa caixa de texto (Figura 8.7).

A abordagem escolhida por Beatriz – que compreende sucessivas tentativas e a sua organização numa tabela – aparenta ser pensada não só em termos da sua adequação ao problema em si mesmo mas também à atividade de explicação dos processos seguidos, exigida na competição, e que Beatriz prefere fazer através do PowerPoint. A ideia de construir uma tabela já lhe tinha ocorrido com papel e lápis, e já a havia explorado, pelo que pode reproduzir e desenvolver essa abordagem com o editor de apresentações. A composição do slide, baseada em diversos elementos expressivos, permite reportar os processos seguidos por Beatriz: as duas primeiras linhas da tabela refletem a experiência inicial que a conduziu a uma solução incorreta, a linha seguinte mostra como afinou a sua estratégia, e as últimas linhas as aproximações sucessivas até encontrar a solução.

Apesar de, em essência, a abordagem com papel e lápis ser idêntica à abordagem com PowerPoint, a solução digital permite que Beatriz cultive e demonstre o seu sentido estético caracterizado pela organização e disposição dos elementos descritivos incorporados e seu visual gráfico, pelo recurso a imagens, pelo uso da cor, pela combinação com notas escritas, ou seja, pela forma como constrói uma 'montagem' expressiva da sua solução.

8.1.4 A divisão de estatuto na atividade de Beatriz

Tal como está a emergir, a pertença a esta comunidade e as relações que Beatriz mantém com os outros membros moldam esta sua atividade de resolução de problemas. Por exemplo, a professora de matemática de Beatriz é uma forte influência não só porque incentiva e acompanha a sua participação, mas porque intervém de forma mais concreta na procura das soluções de alguns problemas. A jovem explica:

> B: Ela [a professora] resolve sempre e depois deixa-nos resolver. E depois, às vezes… normalmente diz-nos a resposta, mas não diz como é que se chega lá. Diz “vá, não se enganem porque isto tem que dar bem... a resposta é esta mas não vos digo mais nada”.
>
> I: E tu tentas sempre chegar lá, não é?
>
> B: Sim, não gosto que me deem a papinha feita. Gosto de fazer as coisas por mim.

Portanto, a professora começa por resolver, para si, um dado problema e apenas divulga a solução aos alunos, desafiando-os a descobrir ou construir um caminho, ou uma justificação para aquele resultado. A Beatriz parece responder muito bem a este método pois aprecia ser ela própria a vencer o obstáculo – não gosta que lhe deem a “papinha feita” – e não sente que o desafio seja diminuído com o facto de lhe ser facultado acesso à solução de antemão.

Nesta outra ocasião, Beatriz recorda a insistência da professora para resolver um dos problemas em que o prazo se estava a aproximar, fornecendo enunciados do problema que a própria leva para a sala de aula. Uma outra forma de a professora colaborar é incentivar a ajuda entre os alunos que estão a participar: “[a professora] faz sinal à [Maria] que ela também está a resolver. Depois ela deu-nos as respostas e disse: agora quero que me digam porque é que é isto e isto e isto.”

> B: Então, era 6.ª [feira], estávamos na aula de matemática e ainda não tinha resolvido, ainda não tinha tocado nele. E como era a última aula estávamos lá descontraídos, uns a ouvir música e não sei quê, e estava lá e a professora começou “[Beatriz] anda cá, resolve lá isto!” e eu “Vou já stora”. E depois até me foi lá buscar e tudo, e depois deu-me uma folha com o problema que ela imprimiu…

Na verdade, Beatriz também troca muitas ideias com as amigas a propósito dos problemas do SUB14. E isso acontece tanto em contextos escolares, na sala de aula tal como se viu acima, normalmente ainda durante o processo de resolução, como noutros locais de convívio, em ‘saídas com os amigos’, em que a principal preocupação já parece ser a forma como irá relatar o processo de obtenção da solução.

> B: . . . acho que no dia em que comecei [a resolver] fui sair com os meus amigos e depois estava naquela “Oh pá, agora não sei como é que vou fazer aquilo que depois vai-me ocupar bué espaço”. Porque eu, ao início, estava a pensar fazer primeiro um, com várias imagens, tipo com passos em vez de estar assim tudo feito, “ah agora fiz

> assim, fiz assim, fiz assim” e depois “eh pá, isto depois não vai caber” e elas depois deram-me uma ideia mas eu depois tive esta. Então eu cheguei a fazer vários coisitos desses, vários conjuntos.

A utilização preferencial do PowerPoint para reportar os processos seguidos resulta de uma combinação entre vários fatores. Por um lado, este uso é uma preferência pessoal de Beatriz para se expressar porque com outros programas “a apresentação fica menos bonita” e com o PowerPoint consegue um trabalho que “ficava mais, tipo, explícito, mais giro, mais colorido”. O PowerPoint tem, assim, duas *affordances* muito importantes no seu ponto de vista: faculta-lhe a expressividade e valoriza-lhe a resolução.

A ênfase nos detalhes e no aspeto gráfico das suas soluções é intencional já que Beatriz aprecia o facto de algumas das suas resoluções serem escolhidas como exemplares e partilhadas no *site* do SUB14 na secção das ‘resoluções admiráveis’. Dos oito problemas que resolveu nesta edição, três foram escolhidos como exemplares pela equipa do SUB14. Beatriz também contrasta os seus métodos e a sua preferência pelo PowerPoint com o trabalho de uma das suas colegas, Maria, embora reconheça que os dela também já tinham sido realçados pelo SUB14:

> I: E a [Maria] faz de forma diferente?
>
> B: Ela faz sempre, ela é menos organizada do que eu. Não é que assim tipo... faz no Word e ‘tá despachada’. Eu gosto mais das coisas mais certinhas.

Esta é, pois, uma das facetas que mais se destaca no trabalho de Beatriz. Na verdade, a jovem percebe bem quais são os fatores que levam a equipa do SUB14 a selecionar produções dos participantes para publicar na página como ‘resoluções admiráveis’ e aponta para que as suas sejam escolhidas, caprichando ainda mais na expressão e apresentação das suas soluções.

8.1.5 A atividade usual de resolução de problemas com tecnologias de Beatriz: uma síntese

Beatriz, uma jovem um tanto irreverente e que busca uma certa independência da família, costuma participar em várias atividades relacionadas com a matemática e, em particular, com a resolução de problemas. Apesar de não gostar muito de estudar e de se dedicar muito aos amigos e à sua vida social, é empenhada o quanto baste para conseguir bons resultados escolares.

Para resolver os problemas do SUB14 recorre, numa primeira etapa, ao papel e lápis e excecionalmente à calculadora e, numa segunda etapa, faz uso de programas de uso comum como o Word, com menos frequência, ou o PowerPoint – a sua ferramenta de eleição para expressar as suas soluções. A resolução dos problemas tem em conta as regras de participação no Campeonato, nomeadamente, os prazos que Beatriz cumpre com afinco ou a necessidade de explicar o processo seguido, o que a leva a cuidar da apresentação das suas soluções enfatizando os aspetos gráficos, daí emergindo o seu sentido estético. Durante o período disponível para a resolução de cada problema, Beatriz troca impressões com as colegas que também se encontram a participar no SUB14; solicita apoio da professora de matemática que a incentiva a participar, desafiando-a ainda a justificar dicas na forma de soluções; e interage com a equipa do SUB14, quer através do correio eletrónico quer através da tentativa de submeter soluções tão completas e surpreendentes que sejam selecionadas para a galeria de ‘resoluções admiráveis’ publicadas no *site* do Campeonato. A Figura 8.11 sintetiza as várias dimensões do sistema de atividade de Beatriz ao resolver problemas de matemática no âmbito do SUB14 com as tecnologias da sua preferência, normalmente, ferramentas expressivas.

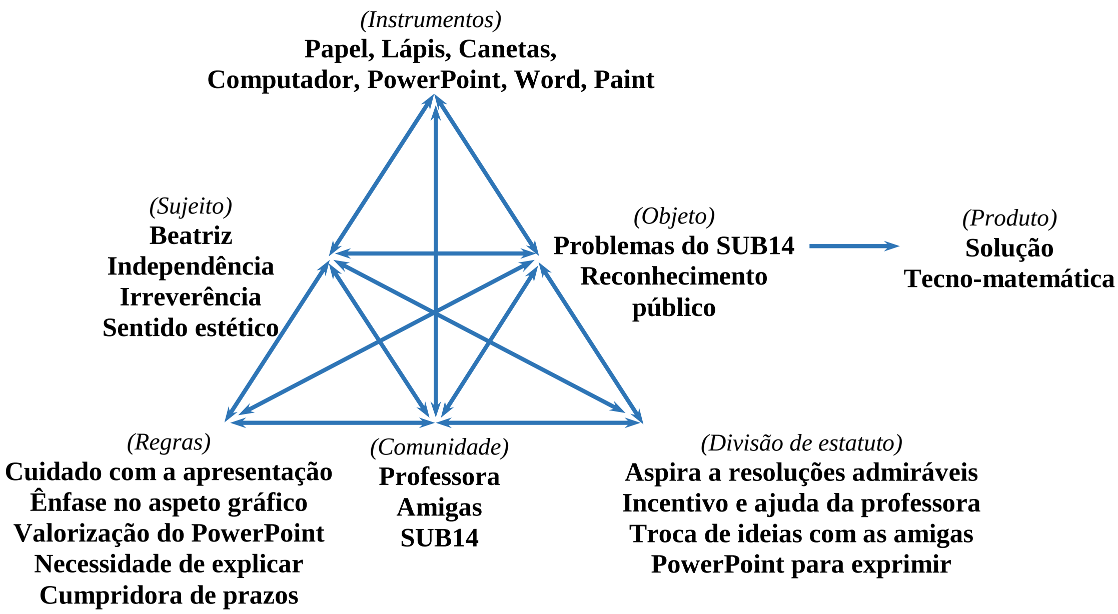


Figura 8.11. Atividade de Beatriz-com-ferramentas-expressivas no contexto do SUB14

Tendo por base a caracterização que este primeiro encontro com Beatriz permite fazer acerca da sua maneira de estar no SUB14, é possível sumariar alguns traços daquilo que se pode apelidar de *a sua abordagem usual* aos problemas. Um desses traços é o recurso constante ao editor de apresentações PowerPoint como ferramenta que suporta as suas resoluções do Campeonato. Elegeu-a como a ferramenta preferida, independentemente da natureza matemática dos problemas pois as suas grandes *affordances* são o possibilitar justificações mais explícitas e melhoradas, sobretudo, do ponto de vista estético.

Beatriz consulta cada novo problema nos primeiros dias em que é publicado (*captar*), um pouco entusiasmada pelo apelo que a equipa do SUB14 lhe envia em resposta à resolução anteriormente submetida. Não costuma imprimir o problema, mas retém as ideias fundamentais que o compõem (*identificar*). Tenta resolvê-lo de imediato, estudando abordagens iniciais com papel e lápis através de desenhos ou esquemas (*interpretar, integrar*). A esta etapa, normalmente curta, segue-se um período mais longo que pode decorrer até à véspera ou ao próprio dia definido como prazo para submissão de resposta, em que Beatriz fica a matutar no problema, às vezes na forma de o resolver, mas com mais frequência na forma de apresentar a sua solução (*explorar*, *planear*). Durante estes quinze dias, costuma trocar impressões com as amigas, na aula de matemática ou noutros locais de convívio, ou com a professora, reagindo positivamente aos desafios por ela lançados para construir uma abordagem ao problema em questão, conhecendo a solução final (*comunicar*). Esta interação permite-lhe construir um modelo conceptual da solução ou preparar um modo de exprimir a solução segundo os seus padrões de clareza, correção, originalidade e estética (*planear, criar*).

A elaboração da solução digital, comumente no PowerPoint tem como base de sustentação o percurso atrás referido, quer dizer, os esquemas que concebeu inicialmente e as sugestões que recolheu das amigas e professora ao longo das duas semanas. Beatriz afirma que, por vezes, apenas replica no ambiente digital a solução que já havia planeado com papel e lápis (*verificar*), mas outras vezes ocorrem-lhe ideias novas que acaba por concretizar no momento e que servem de melhor justificação para a solução encontrada (*criar*). Habitualmente, submete a solução digital ao SUB14 no último dia do prazo (*disseminar*).

Tudo indica que Beatriz apenas recorre ao PowerPoint na fase de construção da solução digital, ou seja, quando se encontra a exprimir a solução, o que sugere que as suas ações '*resolver o problema*' e '*exprimir a solução*' podem acontecer em momentos que não se sobrepõem na íntegra, ou em que se torna mais fácil separá-las. Por outro lado, parece existir uma certa semelhança entre a solução ensaiada com papel e lápis e aquela que é produzida no PowerPoint, o que pode indicar que o pensamento matemático que Beatriz desenvolve com papel e lápis já tem em vista poder transpô-lo para o PowerPoint. Não obstante, a jovem também admite que durante o processo de elaboração da solução lhe ocorrem outras ideias, o que faz com que a solução digital apresente uma matematização que pode divergir da inicialmente pensada com papel e lápis.

8.2 Resolver-e-exprimir o problema 'Almoço de colegas'

O problema 'Almoço de colegas' (Anexo H), proposto na fase de apuramento do SUB14, remete para a distribuição ordenada de três pratos possíveis por um certo número de comensais, obedecendo a determinadas condições. Nas secções seguintes apresento os aspetos críticos da solução desenvolvida por Beatriz, com recurso ao PowerPoint, tendo por base a própria solução e a descrição que a jovem fez ao recordar-se da atividade de resolução deste problema.

8.2.1 Primeira abordagem com papel e lápis

Beatriz recorda-se que acedeu ao problema no mesmo dia em que foi publicado pelo que o consultou de imediato (*captar*). Ao explicar como procedeu nessa altura, utiliza uma folha de papel com a intenção de recuperar o seu raciocínio e os procedimentos seguidos. Enquanto rabisca (Figura 8.12), Beatriz vai explicando como pensou e como fez.

> B: Também fiz primeiro no papel. Vi e, no 1.º dia em que o vi, respondi logo. Tinha assim uma folha e meti os pratos, meti assim hum, tinha... cá em cima meti sopas e isso e o total e depois meti tracinhos e lembro-me de fazer...
>
> I: Assim como está aqui? [a remeter para o slide]
>
> B: Não, isso foi depois. Hum... e depois fui riscando . . . E depois fui fazendo aqui as pessoas [desenha 12 círculos seguidos]. Eram 12, não eram? E depois acho que até fiz uns símbolos quaisquer para o prato de sopa e isso. Depois comecei por ver aqueles com os três, meti assim e riscava. Depois assim outra vez e riscava.

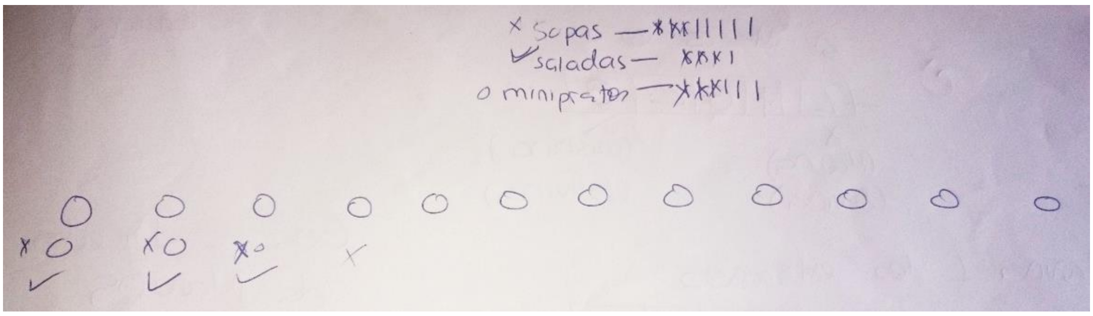


Figura 8.12. Simulação da resolução do problema 'Almoço de colegas' em papel

Assim que leu o problema, Beatriz tentou resolvê-lo como é seu hábito, começando por registar no papel as informações constantes no enunciado que lhe pareciam fundamentais à resolução do problema: a existência de três tipos de prato cujos totais parciais foram associados a um número de pequenos traços verticais (8 sopas – 8 tracinhos, 6 minipratos – 6 tracinhos, 4 saladas – 4 tracinhos), pratos esses que seriam distribuídos por 12 pessoas e que Beatriz regista abaixo através de 12 pequenas circunferências alinhadas na horizontal (*identificar*).

Começa aqui a surgir uma certa organização de base esquemática em que Beatriz, para além de identificar o número de refeições através dos tracinhos, vai atribuir a cada tipo de prato um símbolo específico com a finalidade de facilitar o ensaio de uma possível abordagem: a distribuição dos vários pratos pelos colegas que almoçavam juntos. Assim, esta organização permite-lhe esgotar o número de pratos, sem repetições pois pode ir eliminando cada um da lista de pedidos, e garantindo que todos comeram algo mas nenhum comeu exatamente duas coisas (*interpretar*).

O passo seguinte consistiu em distribuir três pratos pela primeira pessoa, desenhando os símbolos de cada prato e riscando uma cruz nos tracinhos de 1 sopa, 1 miniprato e 1 salada (*integrar*). Prosseguiu desta forma nos dois colegas seguintes.

I: Explica-me como continuaste. Tinhas os três, os conjuntos de três…

B: Fui fazendo assim... depois fui contando. Depois cheguei aos três, acho que foi mesmo aos três que eu parei... pensei “vamos lá contar”. Então, 1, 2, 3, 4, ...8, 9, pronto já descobri.

Portanto, a jovem distribuiu 3 pratos diferentes pelos 3 primeiros colegas e resolveu fazer um ponto de situação, num momento que parece ter sido fortuito. Ao constatar que sobravam 9 pratos (dos 18) e 9 colegas (dos 12), percebeu que podia distribuir um prato a cada um e ninguém comeria exatamente dois pratos (*explorar*). Beatriz está perante a solução, pois o seu resultado satisfaz as várias condições iniciais. No entanto, tem ainda que construir a sua explicação da solução.

O esquema que simulava o trabalho inicial de Beatriz ficou inacabado pois a conversa centrou-se na produção da solução com o editor de apresentações. De ressalvar que, nesta simulação com papel e lápis, a jovem usou um símbolo idêntico para se referir aos ‘amigos’ e aos ‘minipratos de carne’ sem que isso atrapalhasse o seu raciocínio, mas não replicou esta situação na sua resolução com PowerPoint.

8.2.2 A abordagem com o PowerPoint

O *slide* contendo a solução produzida e submetida por Beatriz encontra-se na Figura 8.13. Nele é possível identificar, *a priori*, algumas das ideias subjacentes à solução que a jovem acabou de reportar, como por exemplo a listagem dos pratos e os risquinhos que correspondem ao número de pedidos, ou a sua preocupação em estabelecer associações explícitas entre os vários esquemas, agora em termos de cores.

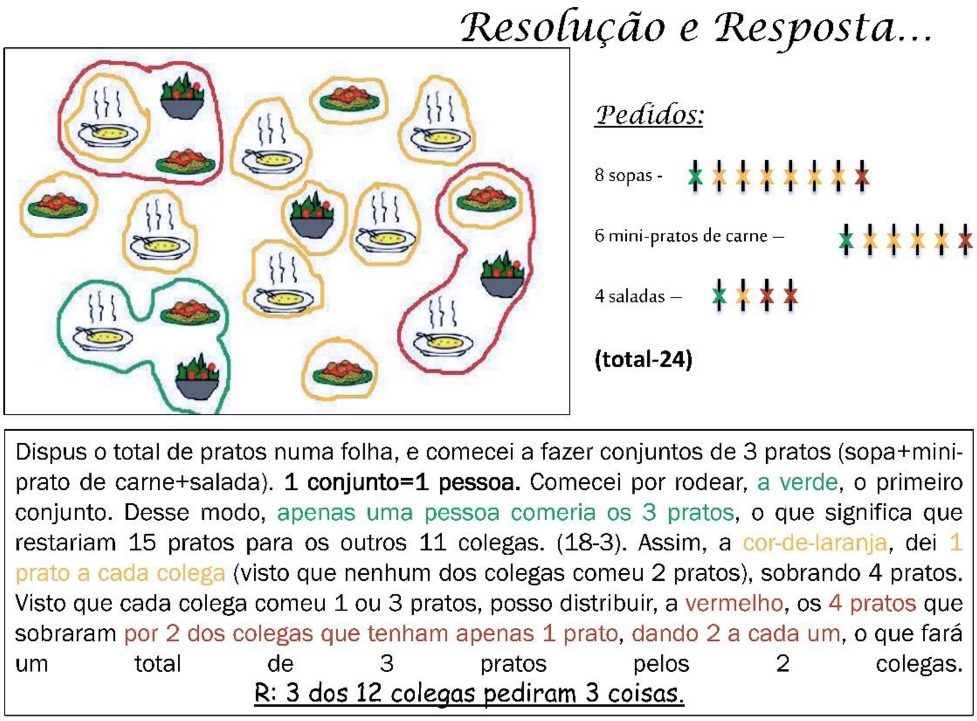


Figura 8.13. Resolução do problema #7 – Almoço de colegas

Beatriz já encontrou a resposta ao problema pelo que, na sua perspetiva, lhe basta 'passar' a resolução inicial em papel e lápis para o *slide*, ou seja, à partida, apenas tem de encontrar uma forma de exprimir aquele raciocínio e os processos seguidos no PowerPoint – o que não viria a revelar-se uma tarefa fácil. Segundo conta, estava numa aula de matemática a comentar com a sua colega Maria que ainda não sabia muito bem como iria produzir a sua explicação (*comunicar*) quando lhe ocorreu a ideia de organizar as várias possibilidades utilizando conjuntos (*explorar*).

> B: Tive a ideia numa aula de matemática, estava a pensar... não estava a ouvir a... [risos] a professora estava a fazer uma correção, e então eu estava a falar com a [Maria] e "Oh pá, não sei como é que vou fazer" e depois enquanto ela estava a falar eu acho que estava a pensar e depois quando ela acabou de falar "Oh, olha também já sei! Vou fazer um tipo de género de coiso, não sei como é que se chama"...

I: Conjuntos?

B: [Confirma] E depois ela [a amiga] "Ah, sim, sim, boa ideia!" e depois foi assim.

Mesmo após decidir utilizar esses 'conjuntos', Beatriz permanecia na dúvida sobre a abordagem a seguir. Durante uma saída com os amigos, discutiu com as colegas que também participam no SUB14 qual a melhor forma de apresentar o processo seguido (*comunicar*). Questionava-se se o devia fazer apresentando todos os passos visíveis, discriminados através de imagens ou apresentando apenas a solução final, de forma organizada, e com uma explicação escrita dos procedimentos (*explorar*).

I: E depois vieste para o computador e como fizeste? Fizeste no PowerPoint?

B: Sim. Eu ao início até fiz outro diferente, porque eu comecei a fazer isto e acho que no dia em que comecei fui sair com os meus amigos e depois estava naquela "Oh pá, agora não sei como é que vou fazer aquilo que depois vai-me ocupar bué espaço". Porque eu, ao início, estava a pensar fazer primeiro um, com várias imagens, tipo com passos em vez de estar assim tudo feito, "ah agora fiz assim, fiz assim, fiz assim" e depois "eh pá, isto depois não vai caber" e elas depois deram-me uma ideia mas eu depois tive esta. Então eu cheguei a fazer vários coisitos desses, vários conjuntos.

É, pois, desta *comunicação* com as amigas, em diferentes momentos e locais, que Beatriz vai *explorando* as possíveis formas de expressar a sua abordagem ao problema.

A construção da solução digital tem início com a utilização das figuras do enunciado que foram copiadas, coladas e replicadas tantas vezes quantas as mencionadas, e dispostas num retângulo à esquerda sem uma ordem especial. À direita reproduziu, tanto quanto possível, o que havia feito em papel e lápis: colocou o tipo de prato e usou tracinhos verticais em igual número ao indicado no enunciado. Estes esquemas visam evidenciar o sentido matemático atribuído às imagens e aos símbolos que Beatriz usa (*integrar*). Com base nas suas experimentações anteriores, Beatriz está a *planear* a sua abordagem com o PowerPoint em termos da disposição dos vários elementos descritivos no slide e da forma como irá mostrar como se relacionam entre si. Conforme explica, na entrevista e no texto escrito no slide, o processo no PowerPoint tem semelhanças com o processo com papel e lápis: agora sobrepondo cada risquinho com uma cruz de uma cor específica de cada vez que esse prato é 'servido' a um dos colegas. Começa aqui o desenvolvimento da abordagem planeada com o PowerPoint, agora recorrendo aos recursos tecno-matemáticos que acaba de introduzir no seu slide.

B: Foi risquinhos e depois pus... o primeiro conjunto, ah!, fui fazendo estes conjuntos e depois pronto.

I: Este rodeado de verde...

B: Ya, o primeiro conjunto de três. Depois, apenas uma pessoa comia os três, o que significava que seriam 15 e assim… Ah! Já me lembro, e depois se só uma pessoa comesse 3 não podia ser porque iam sobrar 15 [pratos] e como sobravam 11 amigos lá dizia que eles só podiam ter comido ou 3 pratos ou 1 e então não ia dar porque havia uns que iam comer dois e isso não podia ser. Então fiz 1 [prato] para cada um, eram 11, sobraram 4 e depois distribuí os outros 2 porque cada um já tinha comido 1 e ia fazer 3.

O primeiro conjunto de três pratos servidos é assinalado pela cor verde, dentro do retângulo à esquerda, e os pratos são imediatamente riscados na listagem de possibilidades à direita, com uma cruz também da cor verde (*integrar*). Neste momento, Beatriz reconhece que não pode haver apenas uma pessoa a comer três pratos pois assim iriam sobrar 15 pratos – “(18-3)” tal como registou no texto escrito no slide – mas há apenas mais 11 pessoas (*explorar*). Decide então distribuir mais um prato a cada um dos 11 colegas: 6 pessoas comem 1 sopa, 4 pessoas comem 1 miniprato, e 1 pessoa come uma salada. Estes conjuntos unitários são assinalados a cor-de-laranja e os correspondentes pratos são riscados dos pedidos no esquema à direita, com uma cruz da mesma cor (*integrar*). Deste modo ficaram a sobrar 4 pratos que Beatriz explica na entrevista, voltando ao papel e registando “15-11=4” (Figura 8.14 em baixo à direita), ou seja, a confirmação através de um cálculo que tem que haver mais amigos a comer mais do que um prato (*explorar*).

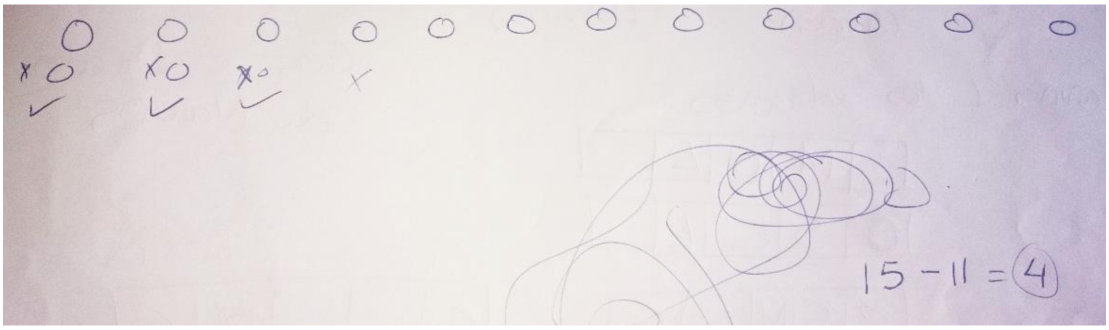


Figura 8.14. Excerto da resolução do problema #7 com cálculo dos pratos que sobram

Após constatar que resta 1 prato de sopa, 1 miniprato e 2 saladas, e que nenhum amigo pode comer exatamente dois pratos, Beatriz opta por distribuí-los por dois dos amigos: 1 sopa e 1 salada por uma pessoa que já tinha pedido um miniprato; e 1 miniprato e uma salada por alguém que já tinha pedido uma sopa. Acrescentando, assim, dois pratos ao que já havia sido atribuído obteve os dois conjuntos de três pratos que sublinhou a vermelho, eliminando os três últimos pedidos à direita com cruzes da mesma cor (*criar*).

Estes conjuntos coloridos são novos objetos de conhecimento que Beatriz criou e que exprimem eles próprios a sua forma de pensar sobre a situação.

> I: Só não estou a perceber é estes vermelhos, mas tu aqui tens dois conjuntos vermelhos, não é? E também tens amarelos lá dentro, mas depois aqui...
>
> B: Porque eram aqueles que eu distribuí. Porque eu depois distribuí, os amarelos foi aqueles que eu dei 1 a cada um e sobraram 4. E então depois eu daqueles que já tinham um prato eu dei mais dois que era para fazer 3.
>
> I: Ah, está certo! Então e estes dois vermelhos aqui?
>
> B: Saladas… ah, eram estas duas. Sobravam, os que sobravam são aqueles que não têm amarelo à volta, este, este, este e este. Depois eu juntei-os com os outros dois para ficarem com três.

As explicações que Beatriz vai oferecendo verbalmente identificam-se com as que redigiu no slide numa caixa de texto abaixo dos esquemas (Figura 8.13). Aí, a jovem reporta e justifica numa linguagem clara os seus procedimentos. Por um lado, procura assinalar a sua atividade nos dois ambientes, por exemplo, a primeira frase diz respeito à experiência inicial com papel e lápis (“Dispus o total de pratos numa folha, e comecei a fazer conjuntos de 3 pratos”); mas quando começa a explicar como utilizou a cor e o seu significado, formatando o texto dessa mesma cor, está a reportar-se já à sua atividade no ambiente digital. Por outro lado, Beatriz vai apresentando justificações para o seu raciocínio, com suporte em cálculos simples e que auxiliam etapas seguintes da distribuição de pratos (*verificar*).

Para além deste slide com a solução propriamente dita, Beatriz incluiu ainda um slide de capa, com a sua identificação e uma imagem relativa ao tema do problema, e um slide com um resumo dos dados do problema. A solução foi submetida ao SUB14, dentro do prazo, e no formulário de resposta Beatriz assinalou que não teve apoio de ‘ninguém’, gostou ‘mais ou menos’ de o resolver e considerou-o ‘fácil’ (*disseminar*).

Ainda propósito da solução produzida no PowerPoint e questionada sobre os conjuntos a vermelho, Beatriz apercebe-se que, ao passar para o ambiente digital, desenvolveu uma forma diferente de pensar sobre o problema e encontrar a solução.

> B: A vermelho são os outros que eram os de 3. Não! Ah, os que sobravam. Eu aí depois fiz de outra maneira. Fui pensando . . . Só que enquanto estou a resolver, às vezes, vêm-me outras ideias para explicar, mais claras. E então eu depois fiz. Esta de sobrar não tinha feito.

Portanto, quando abordou o problema com papel e lápis não tinha pensado na questão ‘dos que sobram’, ideia que só emergiu ao longo do caminho que construiu no PowerPoint para a solução. Acrescenta ainda que isto lhe acontece “às vezes”, o que sugere que dá início a uma abordagem com papel e lápis mas, posteriormente, ao exprimir a solução no PowerPoint ocorrem-lhe outras formas de explicar “mais claras” e que acabam por transformar a sua perceção da solução. A abordagem de Beatriz ganha um novo rumo quando procura transportá-la para o PowerPoint, atividade esta que a conduz a novas compreensões da solução, ou seja, Beatriz desenvolve e aprofunda o modelo conceptual da solução, tornando-o mais completo e rigoroso.

É igualmente importante frisar, uma vez mais, a utilização da cor no trabalho de Beatriz. Este uso, intencional, é transversal aos três espaços em que o slide se encontra dividido – a simulação à esquerda, o esquema à direita e a explicação em baixo. Beatriz justifica-o com a necessidade de “relacionar” informação nesses três locais pois assim “ficava mais explícito, mais giro, mais colorido”. Para além disso, o uso de cores também lhe permite distinguir etapas diferentes do processo: o conjunto verde foi o primeiro a ser registado; em seguida, distribuiu pratos únicos, utilizando conjuntos unitários com limite cor-de-laranja; no final agrupou pratos dentro de conjuntos vermelhos que já incluíam outro cor-de-laranja. A cor confere uma certa unidade aos três espaços para explicação, tornando a sequência de passos mais percetível. Assim, a utilização da cor, das imagens, dos esquemas, do texto, e suas combinações, são *affordances* poderosas que Beatriz identifica no PowerPoint, e que constituem uma evidência da sua preocupação simultânea com a questão estética e com a sua capacidade de se exprimir com clareza.

8.2.3 Sinopse dos processos de resolver-e-exprimir o problema ‘Almoço de colegas’

A Figura 8.15 apresenta uma súmula dos aspetos essenciais da atividade de Beatriz em cada um dos processos resolução e expressão do problema ‘Um almoço de colegas’, numa abordagem com papel e lápis (em laranja coral) e numa abordagem com o PowerPoint (a azul).

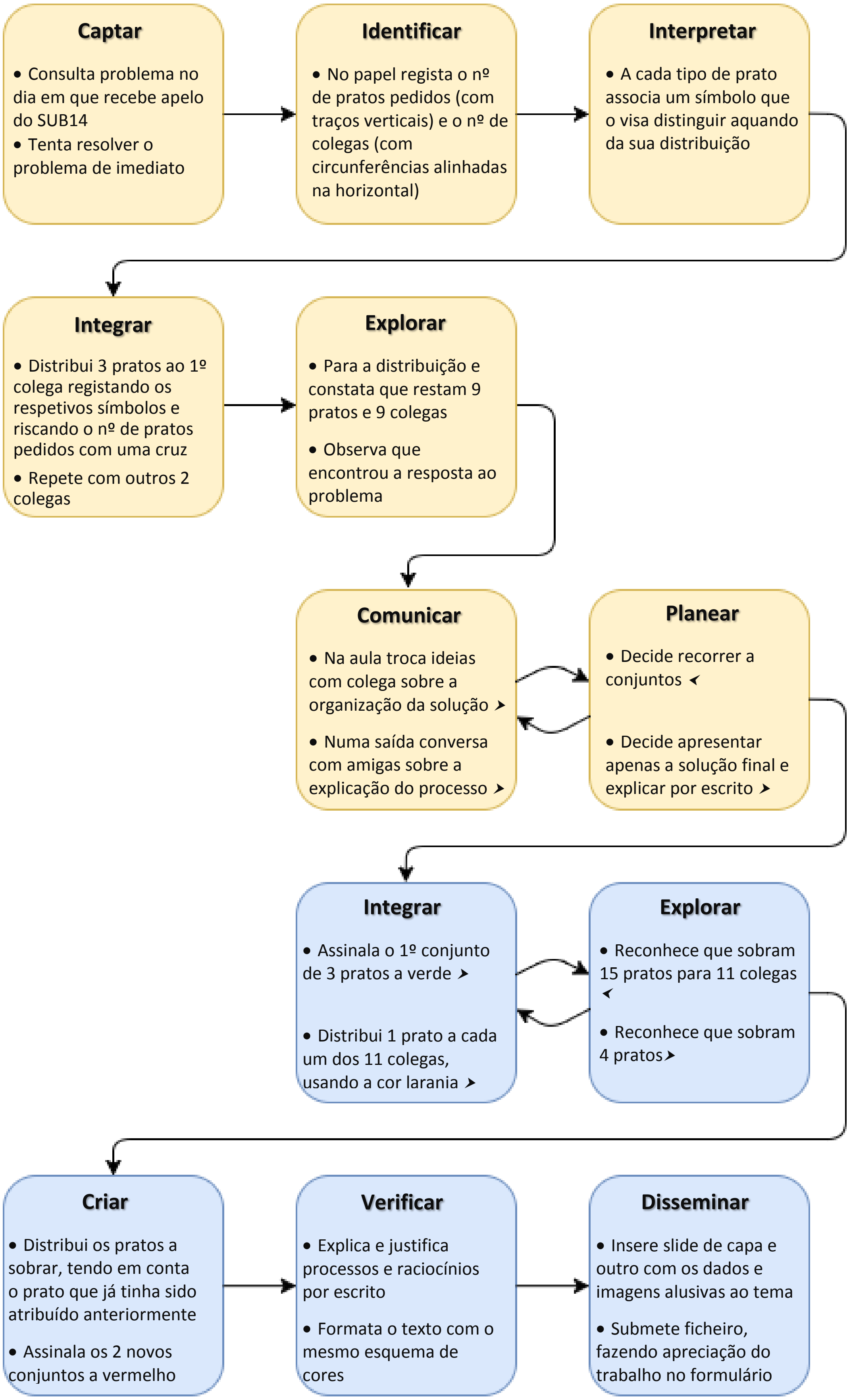


Figura 8.15. Processos de Beatriz-com-ferramentas-expressivas a resolver-e-exprimir o problema ‘Almoço de amigos’

8.3 Resolver-e-exprimir o problema 'Uma troca de bolas'

8.3.1 Selecionando o problema a resolver

Na entrevista presencial, em casa de Beatriz, foi-lhe solicitado que acedesse aos problemas experimentais publicados na página do SUB14, selecionasse um deles para resolver e que tentasse replicar, tanto quanto possível, o que costuma fazer quando resolve um dos problemas da fase de apuramento do campeonato. Depois de uma leitura cautelosa dos problemas, Beatriz decide resolver o problema 'Uma troca de bolas' (Capítulo 5, Secção 5.2.5) que requer a determinação do comprimento de uma rua, sabendo que existe uma relação entre as velocidades dos dois jovens que a percorrem até se encontrarem e conhecendo a distância que resta percorrer a um deles, no trajeto de regresso a casa.

A escolha, para Beatriz, não é fácil nem imediata. Enquanto inspeciona os três problemas vai mapeando alguns aspetos que parecem ter relevância na sua decisão: por um lado, não gosta de triângulos nem de geometria pelo que exclui o problema 'Motivo decorativo'; por outro, identifica o problema 'Médias no teste' (Anexo I) como sendo de tentativas, o que lhe parece ter pouco interesse. Opta então pelo problema que sobra: "este aqui é mais ou menos parecido com o primeiro de todos", diz, referindo-se ao primeiro problema da fase de apuramento desta edição. Nesta primeira incursão pelos problemas possíveis, Beatriz procura identificar os temas matemáticos que poderão estar envolvidos, mas também já está a pensar numa eventual abordagem que poderá conduzir à solução e ainda encontra semelhanças com outros problemas que já resolveu. Procura encaixar as particularidades de cada um destes novos desafios, ainda que com uma leitura superficial do que envolvem, com a sua experiência anterior a resolver problemas do SUB14 (*captar*).

8.3.2 A abordagem inicial: fazer desenhos

Beatriz começa por mostrar algum receio em não ser capaz de resolver o problema, mas rapidamente se conforma com essa possibilidade: "se não conseguir, tenho de ir fazer outro". Quando questionada sobre o que está a pensar fazer para resolver o problema diz, entre risos, "Desenhos!" e, enquanto pega numa folha branca e numa caneta, reforça "Desenhos, sim! Vou fazer uma casa… bué gira!". Prossegue, relendo o enunciado.

> B: Aqui diz que eles, tipo... moram em ruas opostas, não é assim? Ah, nos extremos da mesma rua. Opostas na mesma rua, sim. Por isso um está aqui e outro está aqui. Assim, aqui, que há mais espaço [e começa na parte superior da folha] . . . Aaaa, e humm... eles tinham uma bola, trocaram de bolas, prontos. Aaa... depois foram reavê-las . . . A velocidade do Bernardo foi o dobro da velocidade do Afonso.

Este pensar em voz alta é já uma tentativa de dar sentido a determinadas condições do problema que poderão ser essenciais, como o facto de os amigos morarem em extremos opostos da mesma rua e não em ruas opostas, ou a existência de uma relação entre as velocidades com que se deslocam (*identificar*). Enquanto se vai apropriando das condições, através de uma leitura demorada, Beatriz começa a desenhar um primeiro 'esquema' com papel e lápis, rabiscando duas casas, uma no topo esquerdo e outra no topo direito da folha, como que a materializar a situação (*interpretar*).

8.3.3 Experimentando recursos numéricos

Rapidamente abandona aquele primeiro esquema e constrói outro, agora no lado direito da folha, na vertical (Figura 8.16). Ao passo que continua a tentar compreender em detalhe a situação, resolve agora experimentar pares de números plausíveis para as velocidades dos amigos, de forma que mantenham a relação estipulada.

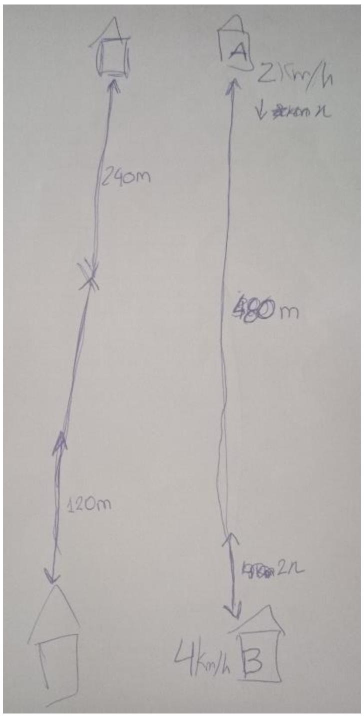


Figura 8.16. Excerto da folha A4, com dois esquemas produzidos por Beatriz

> B: Como eu não tenho, como eles não me dizem qual é que era a velocidade... de um

deles pelo menos, eu vou dar uma velocidade a um deles para ver mais ou menos . . . só que, não sei! Vou dar... uma coisa qualquer... o Bernardo...ia... como é que será a velocidade média a que nós andamos? [silêncio] Ah, vou pôr uma qualquer e pronto... 4. E ele [Afonso] vai em 2.

Conforme explica, decidiu atribuir aqueles valores às velocidades "ao calhas", para ver o que ia obter. Em seguida decide trabalhar com uma folha quadriculada, pois torna-se "mais fácil, tipo... comparar por exemplo, as partes são mais iguais, é só por isso" enquanto faz sinal com o polegar e o indicar de que está a comparar dois comprimentos (*integrar*). Após verbalizar um primeiro desconforto com o problema – "oh pá, não sei como é que isto se faz" – continua:

B: Sei que... só sei a velocidade, tipo... que quando eles foram buscar as bolas a velocidade do Bernardo era o dobro da do Afonso. E quando voltaram para casa foi ao contrário. E o resto não sei.

Por enquanto, Beatriz já se está a apropriar bem da primeira condição do enunciado, que relaciona as velocidades do Afonso e do Bernardo, mas ao afirmar que "quando voltaram para casa foi ao contrário" não compreende ainda bem o que "ao contrário" significa (*interpretar*).

B: Só sei que enquanto ele anda $4km$, este anda 2. Por causa da velocidade. Hum, vou fazer x [regista na folha, riscando os valores atribuídos anteriormente, 2 e 4]. x... dois x... Hum. Mas agora não sei como é que hei de sair daqui.

Constrói em seguida um novo esquema à esquerda do anterior (Figura 8.16) e continua a pensar em voz alta:

B: Aqui diz que no regresso a casa... a velocidade, trocaram não é? O Afonso é que ia mais rápido, e quando o Afonso chegou o Bernardo ainda tinha 120 metros pela frente, até à sua casa. Hum, e enquanto ele anda 120, este aqui andou 240. Por isso tenho que fazer qualquer coisa assim. Só que eu acho que, tipo, ainda não é isto, ainda me falta qualquer coisa pelo meio. Mas vou tentar na mesma juntar estes dois.

I: Hum, ok. Vai explicando... pode ser? O que estás a fazer...

B: Ok, eu ainda... acho que falta qualquer coisa aqui no meio, não é? [aponta para o espaço entre as casas] mas vou juntar para já estes dois, vou tomar estas duas distâncias, ou seja, 360 como a distância entre... o comprimento da rua.

I: E porque é que escolheste esse número?

B: Porque... aaa... porque o Bernardo ainda tinha 120 metros para andar e como enquanto ele anda 120 o outro anda 240... sei lá... 'tou a pensar assim.

I: E como aparece o 360?

> B: É juntar as duas. Pois... só que assim, eu tenho quase a certeza mesmo que falta qualquer coisa pelo meio, porque assim é como se o Bernardo ainda não tivesse começado a andar. Por isso não pode ser.

Com base no esquema, Beatriz considera então que o Afonso percorreu $120m$ até encontrar o Bernardo após este ter caminhado $240m$ ao longo da rua, o que significaria que a rua teria um total de $360m$ de comprimento, ou seja, Beatriz está a experimentar se um par de valores escolhidos, segundo uma dada relação, fazem sentido no esquema que construiu (*integrar*). Apercebe-se de algum modo que os valores não funcionam mas não consegue explicar porquê, pelo que tem dificuldades em ir além da primeira condição e passar a considerar o que acontece com as velocidades dos amigos no regresso a casa mas de forma independente dos $120m$ que faltam percorrer ao Bernardo (a terceira condição).

> I: Mas tu estás a considerar agora o regresso, não é?
>
> B: Sim, agora vou...
>
> I: Eles estão juntos, algures no meio da rua, não é?
>
> B: Já sei! Agora vou fazer aqui uma coisa. Tem de ser por tentativas. Hum...Agora vou meter 480 metros em vez de 360 porque... não sei explicar porquê... estou a fazer por tentativas porque sei que eles trocaram mas não sei explicar...
>
> I: Mas escolheste o 480...
>
> B: Agora sim.
>
> I: E porque é que não escolheste o 500 ou o 481?
>
> B: Pooorque... pois não sei! [risos] É só uma tentativa.

Na verdade, a escolha do 480, e dos outros números que viria a usar, não resulta de um acaso. Apesar de Beatriz não ser ainda capaz de o verbalizar, estes números são múltiplos do único valor ‘disponível’ e que consta do enunciado – $120m$.

8.3.4 Procurando pistas num problema semelhante

Uma das preocupações de Beatriz é trazer valores que sejam o mais real possível, talvez para lhes dar sentido mais facilmente e averiguar a sua plausibilidade enquanto solução do problema. Indecisa quanto à utilização da velocidade $4m/h$, a jovem refere que lhe parece que o tempo não é muito importante e remete para um problema parecido a este que resolveu na fase de apuramento – ‘E lá se encontraram’ (Anexo H).

> B: Era importante o tempo se fosse como no outro [problema]. Se me estivessem a perguntar quantos minutos é que eles demoraram ou uma cena assim. O outro era assim, não era?

I: Era diferente, era.

B: Era quantos minutos é que demorava, e aqui é a distância na rua, é diferente.

I: Ok, mas o tempo... temos que considerar que existe aí não é?

B: Ah pois. Porque eles andam... um anda ao dobro do outro no mesmo tempo, certo? Pois, se eu souber o tempo era fixe! Por acaso é importante o tempo! Eh pá, não sei onde é que tá o outro problema. Salvei-o...

Nesta nova reflexão, Beatriz volta a insistir na primeira condição do enunciado aprofundando a sua compreensão em torno da ideia de que os deslocamentos dos dois amigos decorrem no mesmo intervalo de tempo (*interpretar*). Como não encontrou a sua solução desse outro problema, foi consultar as resoluções admiráveis no *site* do SUB14 para espreitar a resolução de uns colegas de turma.

B: Estes são uns amigos meus. [lê a resolução] Pois aqui eu precisava de saber a distância. Que seca... [regressa ao problema que está a tentar resolver]

I: Então... não te ajudou muito ver como eles fizeram?

B: Mais ou menos. Não sei... [lê em voz baixa o enunciado] Saíram ao mesmo tempo! Saíram às 9 horas. Só que eu... [lendo] a velocidade do Bernardo foi o dobro da velocidade do Afonso . . . eu acho que estou a fazer isto mal porque estou a fazer como se fosse o outro, só que o que pedem é completamente diferente.

I: Mas às vezes podias conseguir ver uma técnica a partir do outro, que possa ajudar...

B: Não sei... [volta ao ecrã]

I: Percebeste como é que eles fizeram aí? Como é que fizeram?

B: Oh, isto, tipo só que eles sabem qual é que é a distância entre as casas, por isso é mais fácil. É mais fácil descobrir o tempo do que descobrir a distância, pelo menos neste momento! . . . Oh, foi como eu também fiz na altura... foi, então só que eles aqui saíram de casa a horas diferentes, não é? Só que enquanto um andava 5 o que saía mais tarde tinha percorrido 5, o outro já tinha percorrido 8 e assim, só que aqui saíram ao mesmo tempo e eu não sei qual é a distância . . . Vou ler outra vez o problema para ver [tenta acalmar-se, mas já está bastante nervosa].

Rapidamente se apercebe que os problemas são bastante diferentes e não consegue, no imediato, transpor qualquer estratégia ou ideia para o problema que está a resolver. Todavia, vai-se recordando da sua própria abordagem ao problema da fase de apuramento, nomeadamente de que recorreu ao mínimo múltiplo comum das velocidades dos dois amigos, que eram dadas, e tenta adaptar essa ideia à nova situação (*integrar*).

B: Estou agora a pensar noutra coisa. Tipo eu, naquele problema, o primeiro do Sub14, ao início . . . fiz o mínimo múltiplo comum das velocidades deles . . . Da outra vez era 5 e 4, não era? Então eu fiz o mínimo múltiplo comum do 5 e do 4 e é 20. Então, supostamente, só que já tinha a distância, era 20. Mas agora se calhar pode ser, não sei. Não sei… $20km$ é um bocado, é muito para uma rua, por isso acho que vou fazer com metros.

O mínimo múltiplo comum surge como sendo um importante recurso matemático que Beatriz pretende utilizar com algum ímpeto. Experimenta os pares 20 e 40 e ao fim de algum tempo observa que a rua poderia ter 480m, mas dessa forma não fica a faltar os $120m$ que o Bernardo ainda tem que percorrer quando o Afonso chega a casa. Está prestes a entrar em desespero “240... mais 120... faltam 120 [calcula no telemóvel] Aaa... 240 mais ... Não! Oh fogo... nestas alturas já nem sequer penso bem”.

Após uma nova clarificação do que entendeu desta parte do enunciado (*comunicar*), a jovem explica que o valor de $480m$ para o comprimento da rua surgiu dos cálculos que fez para encontrar as distâncias parciais percorridas pelos dois amigos tendo por base o mínimo múltiplo comum entre 20 e 40, que diz ser 160, mas corrige:

B: Não, não, não! No 30 e no 60! Foi o 30 e o 60, acho eu.

I: O mínimo múltiplo comum entre o 30 e o 60 é 60.

B: É?

I: É. É o múltiplo mais pequeno dos dois.

B: Mau... sim. Ah! Pois porque eu fiz e assim deu mal, pois... Não, eu fiz uma coisa mal . . . 20, decomposto em números primos é 5 vezes 2 elevado a 2, dois ao quadrado, e 40 é 5 vezes 2 ao cubo e eu fiz, no mmc escolhem-se os comuns e não comuns de maior expoente e eu fiz 5, que é comum aos dois, não é, e depois em vez de escolher o que tem maior expoente aqui escolhi os dois. Pois! Vou fazer outra vez. É 40. Então nem sequer vale a pena fazer.

Prestes a desistir, Beatriz tenta mais um par de valores, 80 e 160, que conduziriam à solução do problema caso conseguisse simular o regresso dos dois amigos às suas casas. A coordenação dos dois percursos está a constituir-se como o maior entrave ao desenvolvimento da sua abordagem (*integrar*).

Regressa mais uma vez à possibilidade de a rua ter $480m$, ou seja, o Afonso caminharia $2 \times 80m = 160m$ enquanto o Bernardo iria percorrer $2 \times 160m = 320m$ até se encontrarem. Com estes valores constata que, quando o Afonso chegasse a casa, o Bernardo ainda teria que percorrer $240m$ e não os $120m$ referidos no enunciado. Contudo não consegue estabelecer uma relação entre o resultado obtido e aquele que era esperado, pelo que continua a sua senda de tentativas com pares de números, uns maiores, outros menores. E acrescenta “estou a fazer o mesmo de sempre que é quando há o mínimo múltiplo comum faço o dobro e depois junto e é o comprimento”.

Cerca de 1h30 após o início do trabalho em torno deste problema, o desespero apodera-se de Beatriz:

B: Oh pá! Não, isto assim não dá... Não sei! Acho que não sei.

I: Não há problema! Eu expliquei no início que o que eu procurava não era ver se tu sabias ou não sabias…Era perceber como é que pensas e quais são as tentativas, como é que tu resolves normalmente um problema… Queres experimentar o outro?

Beatriz acedeu ao convite, mas investiu apenas cerca de 5 minutos a tentar perceber as ideias envolvidas no problema ‘Médias no teste de matemática’, concluindo que não fazia ideia de que matérias poderiam ser necessárias e que esse problema até era mais difícil do que o anterior.

B: Eu acho este mais difícil do que o outro.

I: Ah é? Pronto… vou fazer aqui um esquema para analisares e veres se percebes o que eu sugiro aqui. Pode ser? Ou queres tentar outra vez sozinha?

B: Não, pode ser o esquema.

8.3.5 Entendendo uma ‘sugestão’

O esquema facultado foi desenhado numa folha de papel quadriculado em que a distância entre as casas de Afonso e Bernardo era de 9 quadrículas (Figura 8.17). Beatriz começa por se mostrar surpreendida com a simplicidade do esquema: “foi mais ou menos o que eu estava a fazer, não é?... só que… não tem é os números, não é?”

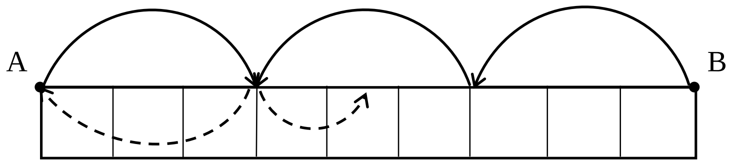


Figura 8.17. Exemplo do esquema fornecido em papel quadriculado

Ao olhar com mais atenção, consegue identificar o A e o B como as casas do Afonso e do Bernardo, respetivamente, que as setas superiores da direita dizem respeito ao deslocamento do Bernardo e que é o dobro do deslocamento do Afonso, e até indica o espaço correspondente aos $120m$ como o que falta percorrer ao Bernardo até chegar a casa. Todavia não identifica a distância que lhe falta percorrer como ½ do percurso total, pelo que ainda não é capaz de dar uma resposta ao problema (*interpretar*).

B: O Bernardo andou o dobro do Afonso, não é? Na ida. E depois no regresso, foi ao contrário, mas o Afonso continuou a andar o mesmo. Então... assim... Depois no regresso foi ao contrário mas a distância e a velocidade do Afonso manteve-se, foi igual, manteve-se constante . . . Mas agora como é que eu chego aos números… não sei…

I: Não? Então se aquele bocadinho é os 120, quanto é que é a distância toda?

B: [foca-se no esquema] Não sei...

Da observação do esquema Beatriz vai dando sentido à segunda condição do enunciado reconhecendo que, no regresso, o Afonso continuou a andar à mesma velocidade do que na ida. Passado algum tempo em silêncio e a fitar o esquema, questiona “de quanto é que anda a setinha na ida? De 3 em 3, não é?” e, após confirmação, foca-se no regresso de cada amigo às suas casas comentando: “Ah, agora é de um e meio. Ah, o outro agora . . . aqui vem o 3, então agora este aqui no regresso vai ser metade deste e dá um e meio, sim, como este anda 3…”

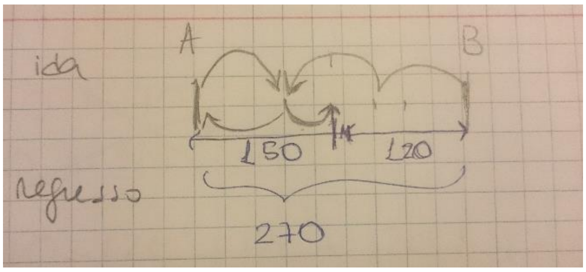


Figura 8.18. Registos de Beatriz (a azul) sobre o esquema fornecido (a lápis)

Como o esquema faz corresponder 3 quadradinhos a cada seta – a unidade de deslocamento dos amigos – Beatriz não consegue precisar nem explicar o que é um ‘deslocamento e meio’, pois permanece muito agarrada às ‘medidas’ que este esquema em particular lhe sugerem (Figura 8.18). Nestes momentos em que Beatriz se está a apropriar deste outro recurso, vai também trazendo as experiências com os pares de números associadas aos seus esquemas, procurando incorporá-las no que está a aprender sobre este esquema (*integrar*). Perante novo impasse, sugiro que construa uma ampliação do esquema.

B: [começa a fazer o esquema] Mas e o esquema, os quadradinhos, tipo, de 3 em 3 na mesma?

I: Ah, isso é indiferente, não é?

B: Ah é? Ok... tipo, eu pensava que os quadradinhos estavam aqui tipo um número de propósito . . . [Conclui o esquema] Eu não vejo nenhuma diferença!

I: Não vês nenhuma diferença?

B: Não, nenhuma.

I: Chegaste ao mesmo resultado?

B: Ah, não! Eu aqui fiz 270 por causa dos quadradinhos e dividi. Do tipo, cada quadradinho valia um x e depois é que vi que tinha sido de propósito.

A construção deste novo esquema leva Beatriz a assumir uma atividade mais exploratória no sentido em que já teve acesso a um recurso que consegue compreender razoavelmente mas precisa de o reconstruir por si mesma (*explorar*). Ao tentar explicar o resultado obtido, os $270m$, Beatriz encontra uma gralha no seu esquema ampliado: o regresso de Afonso corresponde a duas setas para a esquerda, enquanto o de Bernardo não está representado na íntegra, ou seja, apenas indicou o deslocamento de meia unidade. Ao completar o esquema (Figura 8.19) observa que o comprimento que falta percorrer, os $120m$, "é no mesmo que 3 vezes", quer dizer, corresponde a três unidades num total de seis, percebendo agora que as unidades não são relevantes (*integrar*).

I: Então e o total, quanto é? [clarificando] A distância de A ao B…

B: Sim, sim! É 240!

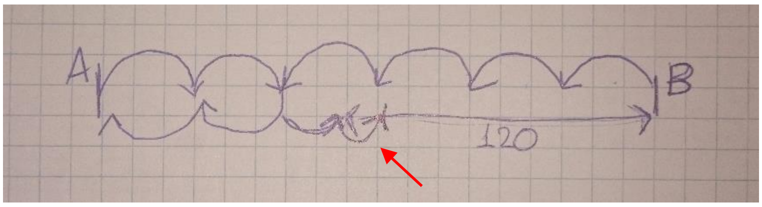


Figura 8.19. Esquema ampliado construído por Beatriz, com sinalização da seta que desenhou depois

Após a construção do novo esquema, com unidade a corresponder também a três quadrículas, e em que considerou as velocidades 2 e 4, Beatriz regressa ao anterior em que a relação era de 1 para 2. Agora já é capaz de apontar o local onde o Bernardo se encontra quando o Afonso chegou a casa, isto é, o ponto que dista $120m$ da casa de Bernardo. Como o esquema era pequeno e foi riscado, era difícil observar que esse local corresponde a metade do comprimento total da rua. No entanto, agora com a conclusão que retirou do esquema ampliado, Beatriz afirma com convicção: "aqui é um e meio, sim!" (apontando para a Figura 8.18).

A jovem regressa a esse recurso como que a confirmar que o modelo conceptual desenvolvido no esquema ampliado também é válido no anterior (*explorar*). Apercebe-se assim da possibilidade de generalização dos valores considerados pois estão definidos com base nas relações e não nas velocidades específicas de cada um dos amigos ou nos correspondentes deslocamentos, ao contrário das suas abordagens iniciais. Independentemente dos valores escolhidos, desde que cumpram aquelas relações, o comprimento da rua será sempre $240m$ pois quando o Afonso chegou a casa, o Bernardo está, simultaneamente, a $120m$ de casa e exatamente a meio da rua.

I: Já sabes que há uma parte que tem 120, não é? Como é que calculas o resto?

B: Ah, o resto é mais 120.

I: Porquê?

B: Porque é metade. Sim, 240...

I: Pois... Então temos a solução?

B: Ahhh, pois, parece que sim . . . [aliviada] Fogo! . . . Tanta coisa e era bué fácil.

8.3.6 Exprimindo a solução no PowerPoint

A construção da solução digital é feita no PowerPoint, recorrendo também à Internet e ao editor de texto Word. Beatriz começa por criar um novo ficheiro, adiciona dois slides e explica que o que vai fazer "não [é] muito diferente do esquema, aqui… vou fazer mais ou menos isto", ou seja, a sua intenção é replicar aquilo que acabou de fazer com papel e lápis (*planear*).

No segundo slide Beatriz regista um sumário contendo as informações mais relevantes do problema (Figura 8.20) e explica "estou só a… só meti os dados e agora estou a arranjar um esquema. Pronto, vou fazer um [esquema] grande porque percebe-se melhor". Em seguida, faz uma pesquisa no Google para encontrar uma imagem *clipart* de uma casa. Após inserir a imagem escolhida no canto superior esquerdo do slide, reduz-lhe o tamanho, duplica-a e transporta a cópia para o canto inferior direito (Figura 8.21). Para diferenciar as duas casas seleciona a opção variações de cor na formatação das imagens e altera-as.

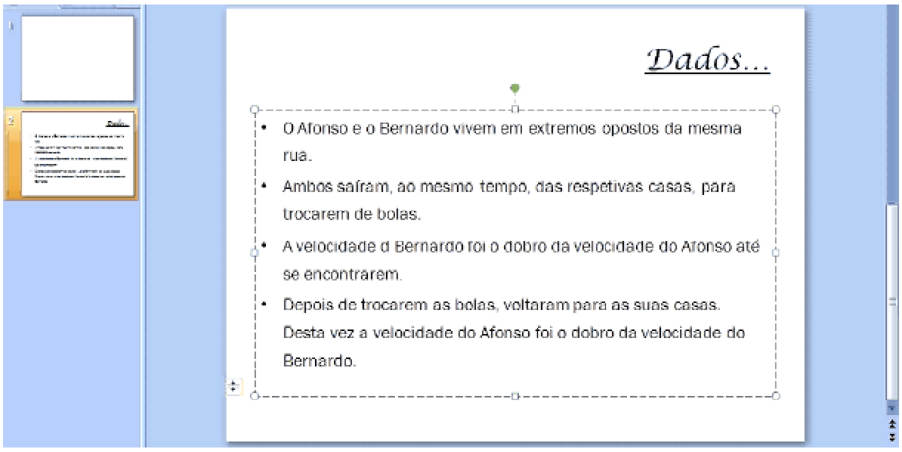


Figura 8.20. Ecrã com slide onde Beatriz resume os dados do problema

Continua a construção do seu esquema, agora reproduzindo os deslocamentos dos dois amigos enquanto caminham na direção um do outro respeitando as relações identificadas: como o Bernardo anda ao dobro da velocidade do Afonso, Beatriz constrói duas setas de igual comprimento e sentido de B para A e outra linha também de igual comprimento mas com sentido de A para B. Dado que os dois amigos se encontram no local onde a segunda seta azul e a seta verde se tocam, é a partir desse ponto que Beatriz os coloca a iniciar as viagens de regresso, cada um a sua casa. O Afonso chega a casa com um único deslocamento, mas a sua velocidade é agora o dobro da do Bernardo, o que significa que a do Bernardo é metade da sua, pelo que no mesmo tempo o seu deslocamento foi apenas de metade do anterior. Desta forma, a distância que lhe falta percorrer, $120m$, corresponde à linha tracejada verde.

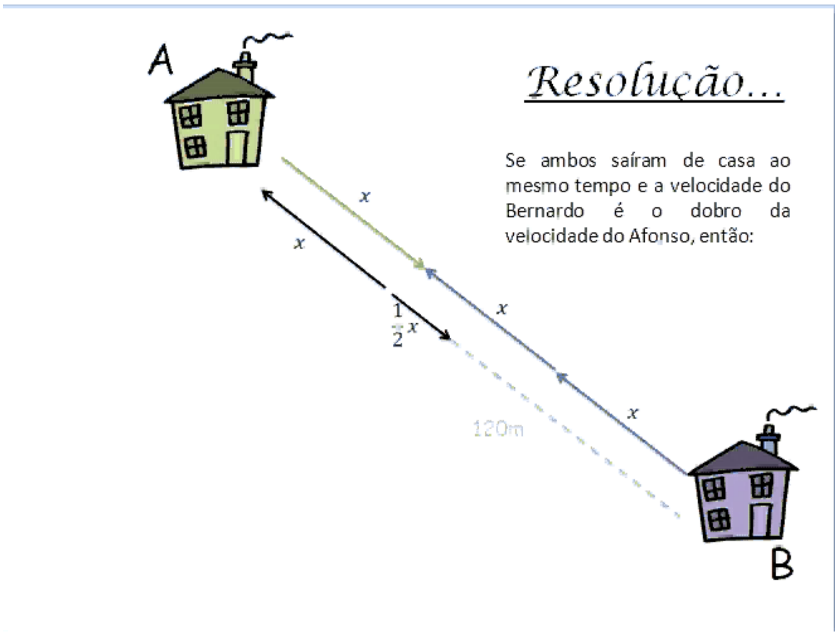


Figura 8.21. Excerto do ecrã com fase intermédia de construção do esquema e introdução

Em cima, à direita, incluiu informação relevante à compreensão do esquema, nomeadamente, as velocidades do Afonso e do Bernardo e a indicação de que os dois amigos saem de casa ao mesmo tempo. Resolve legendar as linhas do esquema pelo que abre o Word para utilizar a ferramenta que permite inserir símbolos matemáticos (Equação). Após utilizar a incógnita x em cada um dos deslocamentos iguais, inclui também uma legenda na linha correspondente a metade desse deslocamento, $\frac{1}{2}x$. Beatriz explica estes procedimentos:

> I: Estás a fazer umas coisas diferentes do que tinhas feito há bocadinho no papel, não estás?
>
> B: Sim, eu depois à medida que vou fazendo, para explicar melhor, às vezes [uso] outras coisas. E eu estava a pensar que se calhar é melhor explicar com um x, por exemplo, dizer que se o Afonso andou x e se a velocidade dele, que tá ali em cima, então assim o Bernardo andou $2x$. E se, por exemplo, quando voltaram, a velocidade

> do Afonso foi o dobro da do Bernardo, então o Afonso andou x, se o Afonso andou x haaa, o Bernardo já andou meio x. [Se] ao andar x o outro chegou logo a casa, então quer dizer que... hum... depois do Bernardo andar $1/2$ de x só faltavam $120m$ que são estes aqui [aponta a última parte do esquema]. E é isso que queremos provar.

Beatriz apropriou-se de tal forma do esquema anterior que já é capaz de se servir dele como um modelo para se exprimir, para explicar como obteve a solução. O esquema, que agora é digital e envolve entes tecnológicos com significados matemáticos (e.g., comprimentos, cores), tornou-se parte do seu ‘léxico’ tecno-matemático (*integrar*).

Continua a abordagem registando, na mesma caixa de texto, esta relação em termos da incógnita que escolheu. Após alterar as cores das linhas, fazendo corresponder o lilás ao deslocamento do Bernardo, cuja casa tem essa tonalidade, e o verde ao deslocamento do Afonso, pelos mesmos motivos, Beatriz constrói uma nova caixa de texto em baixo à esquerda onde irá explicar a sua observação de que no regresso a casa, “a velocidade do Bernardo” foi $\frac{1}{2}x$, confundindo ‘distância percorrida’ com ‘velocidade’ (Figura 8.22).

Figura 8.22. Excerto do ecrã em que Beatriz ensaia uma parte da descrição do seu processo

Para além disso, Beatriz estuda ainda a vantagem de decompor a distância que falta percorrer a Bernardo, $120m$, em dois deslocamentos correspondentes a $\frac{1}{2}x$. Apesar de resolver incluir essa informação de forma esquemática (ainda visível na Figura 8.22), acaba por substituir as duas linhas mais pequenas por uma maior, que pinta noutro tom de lilás (Figura 8.23). Em seguida constrói uma linha tracejada aproximadamente na perpendicular ao deslocamento do Bernardo quando inicia o regresso a casa para evidenciar que corresponde a metade do seu segundo deslocamento na viagem de ida, e substitui o valor atribuído inicialmente a esse percurso, x, por $\frac{1}{2}x$ em cada ‘metade’ (Figura 8.23). A atividade de construção do esquema digital espoleta aprofundamento do modelo conceptual delineado anteriormente com papel e lápis, guarnecendo-o com entes algébricos (*explorar*).

> B: Agora é só mostrar que a distância é... que é aqui no x, acho que vou passar este x para aqui [apaga-o]. E aqui vou meter $1/2$ e $1/2$ que é pra depois quando a divisão... para se perceber melhor…

Beatriz está já a desenvolver uma outra solução, a sua solução digital, no sentido em que esta não é uma mera reprodução da abordagem ensaiada com papel e lápis, mas está a concertar recursos tecnológicos e matemáticos de forma a transmitirem ideias visualmente poderosas: os segmentos orientados com determinado comprimento, direção e sentido simbolizam os deslocamentos dos dois amigos na ida e no regresso, associa-lhes ainda valores desconhecidos mas que exibem as relações existentes entre si (x e $\frac{1}{2}x$). Estes entes tecno-matemáticos são novos objetos de conhecimento que espelham a forma como Beatriz está, agora, a percecionar um modelo conceptual da situação (*criar*).

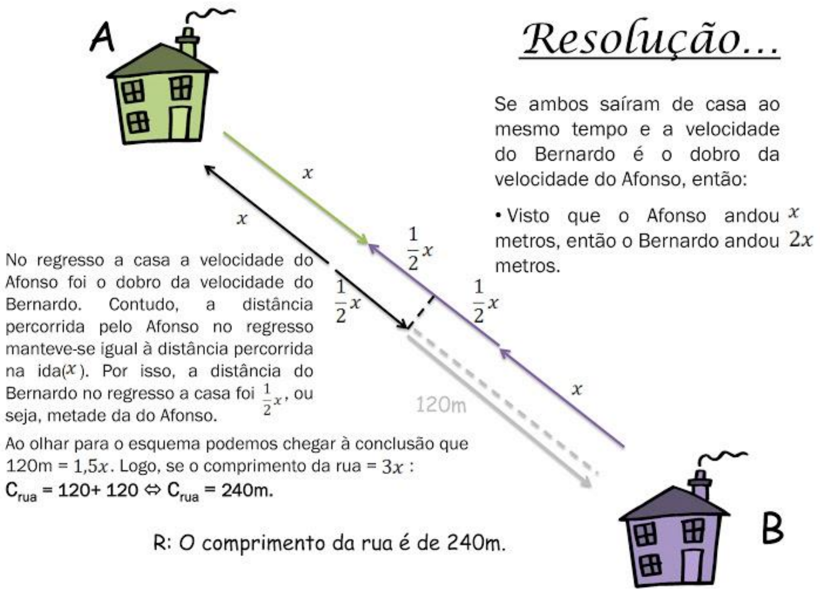


Figura 8.23. *Slide* com resolução do problema experimental

Beatriz continua combinando texto com inserção de símbolos matemáticos que traz, já formatados, do Word para o seu *slide*. Com base neste esquema observa que $120m = 1{,}5x$ e que o comprimento total da rua é de $3x$. Tendo em conta esta matematização, Beatriz podia ter encontrado o valor de x na primeira expressão e determinado o comprimento da rua em seguida. O facto de não o ter feito explicitamente pode estar relacionado com a forte perceção visual que o esquema no papel proporcionou inicialmente sobre a correspondência dos $120m$ a metade da rua, que agora no esquema digital proporciona um novo entendimento, de que $1{,}5x$ é metade de $3x$. Após indicar a soma entre as duas metades da rua, $C_{rua} = 120 + 120$, Beatriz regista que o comprimento total é $240m$. Neste processo que foi o da composição da solução digital, recorrendo a recursos matemáticos, recursos do PowerPoint e do Word, Beatriz explica o seu raciocínio, sendo que este esquema se transforma num argumento visual a que a justificação escrita vai aludindo (*verificar*).

No final construiu o *slide* de capa apenas com o título do problema mas ainda insistiu em formatar texto, pesquisar no Google e inserir duas imagens alusivas à temática do problema: dois amigos e uma bola de futebol. A sua resposta foi enviada para a equipa do SUB14 usando a caixa disponível do *site*, onde assinalou ainda que contou com a ajuda do SUB14, o seu gosto pelo problema foi “mais ou menos” e classificou a dificuldade do problema como “mais ou menos” (*disseminação*).

Após a conclusão deste trabalho, Beatriz admite que se sente cansada mas ainda responde ao apelo de recapitulação. Com base no esquema começa a explicar as viagens dos dois amigos, tal como na solução submetida. Porém, é agora capaz de expressar com grande clareza o seu entendimento relativamente à segunda condição do problema que era enunciada da seguinte forma “Logo que trocaram as bolas, voltaram para as suas casas mas desta vez a velocidade do Afonso foi o dobro da velocidade do Bernardo”. À partida, esta formulação sugeria novas variáveis o que constituiu um grande entrave para Beatriz. Agora, a jovem explica:

> B: Hum, depois visto que o Afonso tinha andado x, então o Bernardo tinha andado dois x, ou seja, duas setas. Depois passei ao regresso a casa. Aqui houve uma troca, a velocidade do Afonso passou a ser o dobro da do Bernardo. Hum, mas o Bernardo manteve a sua velocidade constante, ou seja, não mudou, e percorreu a mesma distância exatamente, portanto continua a ser x. Assim temos de fazer mudanças na do Bernardo, ou seja, ele passou a andar metade da sua velocidade e portanto andou metade da distância do Afonso, hum, que era meio x.

E mais adiante, ainda com a forte referência ao esquema, conclui:

> B: Hum, depois ao analisar o esquema, não é?, conseguimos perceber que os 120 metros são equivalentes a x mais meio x. Entao basta fazer as contas, para saber o comprimento basta juntar a [outra] metade, porque a rua tem $3x$ de comprimento.

Apesar da extensa e intensa labuta de Beatriz, é possível observar momentos chave em que amplia a sua compreensão da situação problemática: i) as experiências com números proporcionaram-lhe um sólido entendimento da relação entre as duas velocidades na ida e correspondentes deslocamentos; ii) o esquema facultado foi acomodado aos seus próprios esquemas e permitiu compreender a relação entre as velocidades no regresso e correspondentes deslocamentos; iii) a construção do esquema ampliado estabilizou as compreensões anteriores e facultou a compreensão de que a distância que falta percorrer a um dos jovens é metade do comprimento total da rua; iv) a construção do esquema digital promoveu uma matematização vertical da situação, bastante mais formal e com características algébricas. Esta matematização vertical é evidenciada pelo facto de Beatriz não recorrer às potencialidades do PowerPoint que, facilmente, lhe permitiriam definir setas com comprimentos iguais ou proporcionais. A abstração dos objetos concretos, potenciados pelo papel-e-lápis (a posição do esquema e o quadriculado que o suporta), é conseguida no PowerPoint com o recurso ao formalismo da linguagem algébrica (ao definir o comprimento variável x e os restantes dependentes deste), pelo que é admissível que o esquema não seja tão rigoroso: o que conta é o rigor e correção da linguagem matemática utilizada.

8.3.7 Sinopse dos processos de resolver-e-exprimir o problema 'Uma troca de bolas'

O esquema apresentado na Figura 8.24 é uma forma condensada de caracterizar os aspetos chave dos processos identificados na descrição anterior e que dizem respeito à atividade de resolução e expressão do problema 'Uma troca de bolas', numa abordagem com papel e lápis (em laranja coral) e numa abordagem com o PowerPoint, Word e Internet (a azul). Nas etapas em que os processos se sucedem ciclicamente ou se relacionam de forma iterativa com mais do que um processo (e.g., o primeiro conjunto de processos de 'integração' sucede o processo de 'integração' e antecede o processo de 'comunicação') os símbolos ➤ e ➤ foram usados para identificar o sentido a seguir na leitura do esquema.

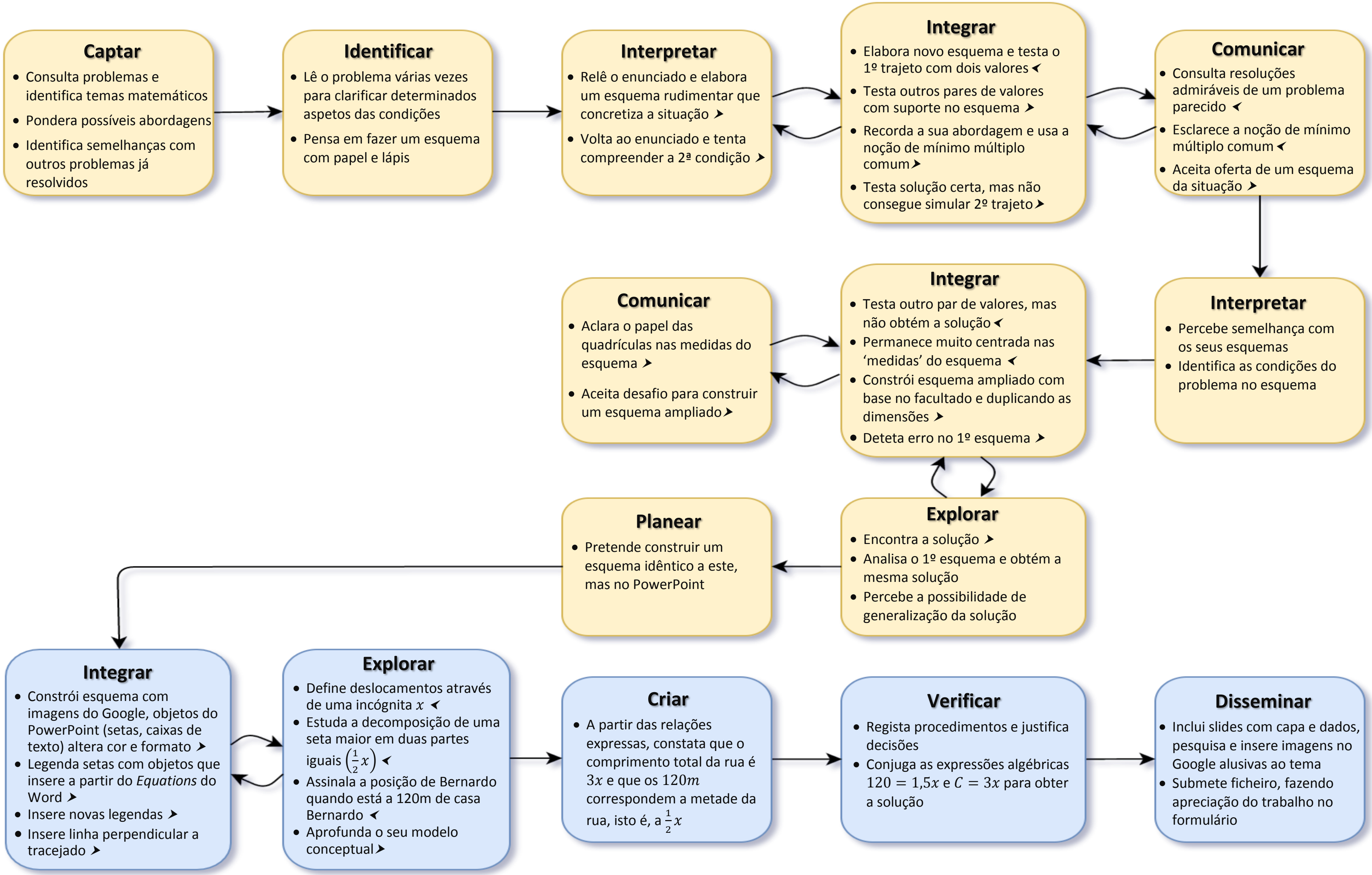


Figura 8.24 Processos de Beatriz-com-ferramentas-expressivas a resolver-e-exprimir o problema 'Uma troca de bolas'

8.4 Discussão e síntese de resultados

A atividade de resolução de problemas com tecnologias de Beatriz, no âmbito do SUB14, tem características muito peculiares que estão profundamente intrincadas com os seus hábitos de sociabilidade. A observância das regras (os prazos, a obrigatoriedade em explicar o processo, a permissão para trocar ideias com a professora e os colegas), a escolha de uma ferramenta expressiva (que é um editor de apresentações), a exibição do seu sentido estético (através da combinação de vários elementos gráficos, texto e cor) são ações que desenvolve para cada problema do campeonato muito demarcadas pelas relações que estabelece com os outros. Em particular, a publicação de algumas das suas soluções no *site* do SUB14, como 'resoluções admiráveis', parece levar Beatriz a investir naquilo que mais aprecia e que acaba por ser um traço distintivo das suas produções: o seu sentido estético, a que se associa a sua capacidade de organização e de clareza na expressão escrita. Este aprimoramento das soluções digitais tem, pois, o propósito de surpreender ou impressionar a equipa do SUB14, pelo que vai consultando sempre as 'resoluções admiráveis' para verificar se as suas ou as dos seus amigos vão sendo selecionadas.

Associado a esta sua faceta de sociabilidade, surge o uso de tecnologias digitais que, na esfera pessoal, lhe permitem manter-se a par das novidades que lhe interessam, estender a sua rede de amigos e conviver virtualmente com pessoas que, embora não conheça, partilham dos mesmos interesses. Para além de dominar o mundo das redes sociais digitais, Beatriz mostra a sua elevada fluência com outras tecnologias: desde o uso do YouTube, passando pela criação de blogues, a fotografia e edição de imagem, ou as ferramentas de uso comum para realizar trabalhos escolares. O SUB14 oferece-lhe a possibilidade de escolher as ferramentas que bem entender para construir a solução digital pelo que a jovem identifica *affordances* poderosas no editor de apresentações para expressar o seu pensamento matemático. Beatriz domina uma diversidade de ferramentas do PowerPoint e é capaz de as usar com eficácia para desenvolver abordagens matemáticas aos problemas, nomeadamente, as formas automáticas; a inserção de imagens, sua edição em termos de tamanho e cor e a possibilidade de as deslocar no slide estudando a sua disposição; a utilização de caixas de texto, sua formatação e uso de cores e a inserção de caracteres 'matemáticos' a partir do Word.

Os dados mostram como Beatriz-com-ferramentas-expressivas (Borba & Villarreal, 2005) produz um pensamento matemático com características e níveis de matematização diferentes daqueles produzidos por Beatriz-com-papel-e-lápis. As etapas da sua atividade referentes à resolução do problema e à expressão da solução têm contornos bastante complexos. No início, a sua atividade consiste na resolução-e-expressão com papel e lápis desenvolvendo um pensamento matemático característico de uma matematização horizontal, pouco estruturada, muito experimental, com base em tentativas, até encontrar uma solução que a satisfaça ou lhe confira uma certa segurança. Quando passa para a resolução-e-expressão no PowerPoint, a sua compreensão da situação e da solução adensa-se, sendo que à medida que reconstrói os esquemas apropria-se deles, alicerçando o seu pensamento matemático, o que a catapulta para uma matematização vertical.

8.4.1 Pensamento visual e pensamento covariacional nas resoluções de Beatriz

As soluções produzidas por Beatriz ao longo desta sua participação no campeonato SUB14, com o recurso ao editor de apresentações PowerPoint, assentam nas suas capacidades de visualização. A jovem recorre com frequência a uma diversidade de *inscrições* (Presmeg, 2006) de que são exemplo os esquemas, desenhos, símbolos, imagens ou a cor. Contudo, estes elementos vão tendo diferentes papéis ao longo da sua atividade de resolução-e-expressão dos problemas.

Enquanto a maior parte das imagens que insere nos seus slides têm o propósito de completar o arranjo gráfico das suas soluções, baseado no tal sentido estético que tanto caracteriza Beatriz, o uso da cor, de símbolos e a produção de esquemas revelam intensões e têm significados matemáticos que merecem ser analisados de forma mais demorada. Na verdade, a elaboração de esquemas é uma das abordagens a que Beatriz recorre com mais frequência (e.g., Figura 8.4, Figura 8.8, Figura 8.13, Figura 8.23) e que parece assumir especial relevância na atividade da jovem neste contexto. Como ficou patente nas secções anteriores, o trabalho de Beatriz compreende duas etapas marcadas pela utilização de *media* diferentes: num primeiro momento, procura encontrar a solução de cada problema recorrendo a esquemas com papel e lápis, num segundo momento, procura exprimir a solução com o recurso ao PowerPoint.

Enquanto a elaboração de esquemas e a exploração desses esquemas com pares de números escolhidos suporta uma visualização que visa dar sentido às condições e compreender o problema no seu todo, o trabalho que se seguiu de apropriação de um esquema facultado e de reconstrução das ideias ali reunidas num outro esquema, ampliado, constituem evidência de como essa atividade suporta um tipo de pensamento visual que tem agora um outro propósito, o de afinar o modelo conceptual da situação e o de compreender a possibilidade de generalização da solução. Por outro, a elaboração do esquema no PowerPoint, que também revela as capacidades de visualização de Beatriz, tem a finalidade de exprimir a solução do problema. No entanto, o modelo visual que a jovem materializa no ambiente digital, e que foi sendo desenvolvido ao longo de toda a atividade, revela uma estrutura matemática menos dependente de medidas concretas, mais algebrizada, mais abstrata, ou seja, os modelos visuais revelam a estrutura matemática conceptual subjacente (Eisenberg & Dreyfus, 1989).

No fundo, Beatriz entrega-se às suas capacidades de visualização para expressar pensamento matemático com uma ferramenta digital, mas os modelos conceptuais que transparecem no final da sua atividade acabam por mostrar que reconhece algumas limitações à sua abordagem visual, pelo que a completa com o recurso à simbolização algébrica ou ao cálculo, ou seja, a abordagens mais 'rigorosas', mais 'matemáticas' (tal como Borba e Villarreal, 2005 encontraram nos estudos analisados).

De um modo geral, nestas soluções Beatriz mostra ser capaz de construir imagens de noções matemáticas através do uso de vários *media*, em particular de algumas ferramentas digitais, e de as utilizar para produzir pensamento matemático essencial à resolução dos problemas. Estas são evidências das suas capacidades de visualização. Em particular, Beatriz possui alguma propensão para lidar com as propriedades visuais e pictóricas de objetos matemáticos, dando grande relevo ao uso da cor, pelo que a usa para expressar associações e relações entre diferentes elementos. Beatriz tem, pois, traços de um *visualizador de objetos*, tal como apontado na literatura (e.g., em Blazhenkova & Kozhevnikov, 2010).

Não menos importante é o tipo de pensamento que Beatriz desenvolveu aquando da sua produção da solução do problema 'Uma troca de bolas'. A jovem encontrou muitas dificuldades em reconhecer a relação de covariação inerente à situação, pelo que a sua atividade foi muito marcada por impasses, por tentativas frustradas, pelas dificuldades em coordenar os dois trajetos. Na verdade, as experimentações com números são todas realizadas sem que Beatriz perceba que as variáveis existentes se podem simplificar. No percurso de ida, o Bernardo desloca-se ao dobro da velocidade do Afonso, de onde Beatriz retira que se a velocidade do Afonso for x, a do Bernardo será $2x$. A segunda condição refere que, no percurso de volta, o Afonso se desloca ao dobro da velocidade do Bernardo, isto significa que se o Bernardo se estava a deslocar à velocidade de $2x$, então o Afonso desloca-se agora à velocidade de $4x$, o que deixa Beatriz num impasse. Beatriz só consegue apreender esta segunda condição e a forma de a simplificar em relação com a anterior ao apropriar-se do esquema que lhe foi fornecido. Isto é, só então percebe que a segunda condição significa, na prática, que se o Afonso se desloca ao dobro da velocidade do Bernardo, então o Bernardo desloca-se a uma velocidade que é metade da do Afonso – como que indexando sempre os percursos à velocidade do Bernardo e não à do Afonso.

No entanto, a solução surge apenas com a construção do esquema ampliado, pelo que é a partir daí que se pode considerar que a jovem passa a conseguir 'coordenar as variáveis', o primeiro dos cinco níveis de pensamento covariacional definidos por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen e Hsu (2002). Este tipo de dificuldades, também documentadas na literatura, é com frequência ultrapassada com a elaboração de esquemas ou diagramas que procuram, de alguma forma, "reproduzir a natureza dinâmica da situação" (Carreira, Amado, Ferreira, Jacinto, Nobre & Amaral, 2013, p. 59).

8.4.2 Resolver-e-exprimir problemas de matemática com tecnologia

Tendo por base esta coleção de evidências, torna-se agora possível clarificar aquilo que designei atrás por *abordagem usual* de Beatriz aos problemas do SUB14, pelo que esta subseção tem o propósito de retratar de forma mais genérica os processos de resolução de problemas com tecnologias desta jovem.

Por norma, Beatriz acede a cada novo problema no dia em que recebe feedback sobre a solução anteriormente submetida e em resposta ao convite da equipa do SUB14. Não imprime o enunciado, mas como tenta de imediato perceber em que consiste o problema, acaba por reter as ideias principais que caracterizam a situação em causa. Da observação da sua atividade foi ainda possível identificar outros aspetos que Beatriz tenta mapear logo na primeira leitura do problema, tais como o reconhecimento de alguma conexão a um tema matemático, ou a associação a determinados métodos de resolução que já conhece com base em experiências anteriores (*captar*).

À medida que se vai apropriando do contexto, com leituras pausadas, Beatriz vai fazendo desenhos com papel e lápis que a auxiliam a dar sentido às condições do problema e à matemática que poderá estar envolvida. É oportuno sublinhar que, nesta etapa inicial, os esquemas em construção suportam diversos propósitos, nomeadamente, recolher e organizar informação relevante do enunciado (*identificar*); avaliar em que medida essa informação esquematizada pode funcionar como recurso matemático que venha a permitir alcançar a solução (*interpretar*); e iniciar uma atividade de natureza exploratória da solução, combinando o recurso esquemático com pensamento matemático (*integrar*). Na produção da solução do problema 'Uma troca de bolas' com papel e lápis, foi possível observar Beatriz a envolver-se em iterações destes dois últimos processos, afinando a sua compreensão das condições do enunciado.

Em ambas as soluções, o processo de integração dos diferentes tipos de recursos foi seguido de uma interação com outros elementos do sistema de atividade de Beatriz (a professora, as amigas, a investigadora[31]) com vista a discutir a produção da solução digital, clarificar noções matemáticas (e.g., o m.m.c.) ou receber dicas (e.g., a professora faculta apenas a solução final, a investigadora faculta um esquema) que possam desbloquear a atividade (*comunicar*). Para além de esta comunicação poder ocorrer noutros momentos da resolução dos problemas, também pode ter diferentes efeitos: no primeiro problema, a troca de ideias sobre a forma de apresentar a solução digital levou-a a avançar para o processo seguinte, mas no segundo problema os processos de comunicação e integração decorreram ciclicamente, o que sugere que a combinação dos recursos para desenvolver uma abordagem exploratória se solidificou mediante a troca de ideias e sua clarificação.

A estas etapas, sucede-se o uso de recursos matemáticos e tecnológicos para iniciar a exploração de um modelo conceptual para obter ou intentar uma explicação das soluções. Num caso, Beatriz decide parar a distribuição de pratos num determinado momento e, ao analisar o panorama, observa que encontrou a solução; no outro, é a ação de construção de um novo esquema com papel e lápis que a impele a analisar o modelo conceptual subjacente a essa família de esquemas (*explorar*). Esta atividade de exploração da integração de recursos matemáticos e tecnológicos pode levar Beatriz a um aprofundamento do modelo conceptual através de ciclos de integração dos novos recursos

[31] Durante a entrevista, enquanto Beatriz se encontrava a resolver o problema 'Uma troca de bolas', a investigadora forneceu-lhe uma sugestão (a construção de um esquema), um pouco à semelhança do papel que a professora desempenha quando lhe oferece dicas para desbloquear uma dificuldade, sem lhe mostrar a resposta no imediato.

e sua análise, como ficou patente na segunda solução (iterações integrar/explorar). Eventualmente, a esta etapa exploratória sucede-se a preparação da explicação da solução (*planear*). Se na segunda solução, Beatriz torna clara uma intencionalidade em replicar no editor de apresentações a atividade anterior com papel e lápis, o planeamento da sua primeira solução digital foi bastante mais complexo, na medida em que decorre de uma interação com os amigos em diferentes contextos e com propósitos ligeiramente distintos (o uso de conjuntos e a exibição da solução final como um todo), ou seja, o processo de planeamento decorreu em estreita ligação com o processo de comunicação.

Segue-se a construção da solução digital que, no caso de Beatriz, é feita preferencialmente no PowerPoint mas também pode incluir o recurso a outras ferramentas, como a Internet e o Word, de forma a veicular o conhecimento matemático desenvolvido sobre a situação (*integrar*). Esta nova etapa de combinação de recursos tecnológicos, agora digitais (como imagens, caixas, cores, setas) e matemáticos (associação entre conjuntos, organização lógica de condições, relações entre quantidades ou entre distâncias/comprimentos, símbolos, cálculo) desencadeiam nova atividade de exploração de um modelo conceptual mais robusto (*explorar*). Estes dois processos voltam a estar fortemente ligados entre si.

Enquanto as informações são organizadas, as construções ganham forma e Beatriz as vai explorando, a solução digital também ganha contornos matemáticos distintos dos inicialmente desenvolvidos com papel e lápis. A recombinação de recursos gera o aparecimento de novos elementos, objetos tecno-matemáticos, no sentido em que veiculam conhecimentos novos sobre aquelas situações: num caso, ao repensar a distribuição de pratos com base no cálculo dos sobrantes e ao uso do sublinhado através dos conjuntos coloridos; no outro caso, a definição de uma incógnita associada ao comprimento de uma seta e os valores correspondentes a meia seta ou ao comprimento total de três setas que lhe permite uma compreensão das condições com base nas suas relações por oposição ao uso de valores concretos (*criar*).

O processo seguinte, coordenado com os anteriores, envolve a redação de uma explicação das suas soluções. No primeiro problema, Beatriz reporta os seus procedimentos, incluindo cálculos e justificações, coordenando as etapas da construção da solução digital com a explicação, através de um código de cores que atravessa as três zonas do *slide* e lhes confere unidade, reforçando a clareza da explicação do seu raciocínio. Na solução do segundo problema, embora a explicação dos procedimentos comece a ganhar forma desde o início da construção (com a inclusão de uma "introdução"), a solução é justificada através de uma manipulação algébrica simples. Em ambos os casos, as construções são elas próprias argumentos visuais que suportam o pensamento matemático desenvolvido, que estão intimamente relacionadas com as inscrições textuais (*verificar*). Os ficheiros contendo cada uma destas soluções só são submetidos à equipa do SUB14 após a inserção de, pelo menos, um slide de capa onde pode ainda mostrar o seu sentido estético com imagens alusivas aos contextos e onde se identifica. Dado o requisito do formulário a preencher na página do SUB14, Beatriz reflete ainda sobre a sua atividade, assinalando se teve ajuda, e fazendo uma apreciação da dificuldade de cada problema e se gostou de os resolver (*disseminação*).

8.4.3 Evidências de Fluência Tecno-matemática de Beatriz

O caso de Beatriz mostra como os recursos disponíveis moldam o pensamento matemático durante a resolução de problemas. Na verdade, os dados sugerem dois momentos da atividade usual da jovem que se podem distinguir pela tecnologia que usa: num primeiro momento, o papel e lápis; num segundo momento, o PowerPoint, embora também recorra ao Word e à Internet.

Do ponto de vista de Beatriz, as ferramentas digitais servem apenas para reproduzir aquilo que faz com o papel e lápis. Mas, se de um primeiro contacto com a jovem ficou patente a sua elevada fluência tecnológica, da análise das suas resoluções e da sua atividade perante um problema expõe-se a sua capacidade em perceber a adequação entre certos recursos matemáticos e determinados recursos tecnológicos, combinando-os para resolver-e-exprimir os problemas. Em particular, estes dados desvelam que o pensamento matemático produzido com papel e lápis pode ser ampliado e aprofundado quando é manifestado através de um uso oportuno de tecnologias digitais, ainda que de índole generalista, como um editor de apresentações. Em ambos os momentos, com papel e lápis e com o PowerPoint, os esquemas – os "desenhos" para a jovem – desempenham papéis fundamentais para resolver-e-exprimir.

Na primeira solução, o recurso ao esquema em papel e lápis visa materializar as informações e as condições identificadas no problema, da forma mais organizada possível para facilitar a solução, pelo que Beatriz cria símbolos para ensaiar a distribuição de pratos seguindo as regras definidas. No decurso desta atividade é gerado um modelo conceptual ainda rudimentar, em que prevalece uma matematização horizontal, suportado na distribuição de todos os pratos pelos colegas e na constatação da solução daí obtida. Beatriz percebe que o problema não está ainda resolvido pois é necessário justificar e explicar a solução encontrada, o que desencadeia o trabalho de replicação daquele esquema num editor de apresentações. Esta replicação ocorre em torno da combinação de diferentes elementos descritivos que a jovem domina, como imagens, símbolos, conjuntos, texto, cálculos simples, que é capaz de relacionar entre si, conferindo-lhes sentido e unidade, através do uso da cor. Beatriz reconhece esta diversidade de *affordances* no PowerPoint e utiliza-as com eficácia como recursos tecno-matemáticos para expressar o seu pensamento sobre esta situação. Esta solução digital não só reporta procedimentos distintos dos ensaiados anteriormente, como inclui aspetos do pensamento matemático que visam justificar os passos que se seguem na sua abordagem, com a referência ao número de pratos distribuídos ou aos cálculos intermédios que permitem aferir os que ainda se encontram disponíveis. Contudo, estes processos – diferentes dos anteriores com o esquema em papel e lápis – dizem já respeito a uma outra solução, ou seja, a matematização desenvolvida resulta num modelo conceptual diferente, mais sofisticado do que o anterior, um *modelo para* explicar a solução.

Na segunda solução, Beatriz elabora e lida com quatro tipos de esquemas. 1) Os primeiros, da sua inteira autoria, visam dar sentido à condição do enunciado que se refere à viagem de ida dos dois amigos, mas a jovem não lhes consegue imprimir com eficácia as condições do regresso a casa nem interpretar convenientemente os resultados que vai obtendo das sucessivas tentativas. Desde cedo, mostra uma preocupação com a abordagem matemática, pelo que vai associando múltiplos de 120, depois tenta trabalhar com o mínimo múltiplo comum. Existe portanto uma primeira tentativa de combinar conhecimento matemático com os recursos que estão ao seu alcance, os esquemas. 2) O segundo esquema, facultado pela investigadora, é acomodado naqueles seus esquemas iniciais bem como nas experiências que realizou com números, permitindo que Beatriz dê sentido ao regresso dos dois amigos a suas casas. Apesar de já conseguir coordenar os dois percursos, isto é, de identificar no esquema as condições matemáticas, ainda não está na posse da solução do problema pois o esquema, apesar de suportado numa grelha quadriculada, tem dimensões que não lhe permitem garantir o local exato em que Bernardo se encontra na rua quando está a 120m de sua casa. 3) A elaboração do esquema ampliado, que requereu a mobilização de conhecimentos sobre o esquema anterior e sobre como ambos se relacionam com as experiências realizadas inicialmente, tem agora dimensões que favorecem a identificação do local preciso em que Bernardo se encontra quando Afonso chega a casa (exatamente a meio da rua). A análise deste esquema não só permitiu a Beatriz encontrar a solução do problema, para aquele caso particular, mas ao voltar ao esquema anterior permitiu que Beatriz alcançasse uma compreensão mais poderosa do problema, melhor dizendo, percebendo a possibilidade de generalização da solução encontrada. 4) A construção do esquema digital, no PowerPoint, tem já este propósito de exibir a generalidade da solução encontrada, pelo que a sua interpretação é mostrada recorrendo à linguagem simbólica, característica da matemática. Beatriz formaliza as suas constatações através do uso de uma variável e da sua associação a uma seta com um comprimento aproximado e, a partir daí, trabalha algebricamente as relações existentes entre os dois percursos dos dois amigos.

Nesta solução, fica igualmente patente uma progressão gradual ao nível da matematização que Beatriz infunde na sua abordagem e que é intrinsecamente apoiada pelos recursos tecno-matemáticos desenvolvidos no decurso dessa atividade: os esquemas (quer os construídos com papel e lápis, quer o construído com o PowerPoint). O uso de esquemas para testar pares de números, o apoderar-se das relações presentes no esquema facultado, a construção de um esquema com medidas que fazem emergir a solução, ou a construção de um esquema digital em que as dimensões são suplantadas pelas legendas de natureza algébrica, permitiram a construção de um modelo matemático formal.

As construções desenvolvem-se a partir de uma matematização horizontal – num caso, centrada na simulação da distribuição de todos os pratos pelos colegas e na constatação da solução daí obtida e, no outro, em experimentações com valores concretos dentro de um espectro de casos exequíveis – e evolui para uma matematização vertical caracterizada pela alteração dos procedimentos, a sua justificação com base em cálculos intermédios, ou a inclusão de relações algébricas. O abandono dos esquemas elementares muito próximos dos contextos, e o aprofundamento do pensamento matemático tem em vista a criação de justificação ou prova matemática que valide aqueles modelos.

De acordo com Villarreal e Borba (2010), diferentes indivíduos com diferentes tecnologias produzem conhecimento matemático qualitativamente diferente. Jacinto e Carreira (2013) e Carreira, Jones, Amado, Jacinto e Nobre (2016), em estudos em que se debruçaram sobre a resolução de problemas com tecnologias no seio do SUB14, encontraram evidências de que diferentes estudantes a resolver um mesmo problema com uma mesma ferramenta e reconhecendo um conjunto idêntico de *affordances* nessa ferramenta, produzem soluções digitais distintas e geram modelos conceptuais distintos da solução encontrada. Este caso de Beatriz mostra que os recursos usados ao longo do processo de resolver-e-exprimir um dado problema determinam o grau de profundidade do modelo conceptual desenvolvido. À medida que os recursos tecno-matemáticos vão sendo apropriados, permitindo a Beatriz pensar-com-esquemas, e estes se tornam mais livres e independentes de dimensões concretas, cada modelo evolui para um grau de formalização maior. À semelhança do defendido na literatura, esta progressão ao nível do pensamento tecno-matemático desenvolvido está ancorada na relação de simbiose entre as capacidades matemáticas da jovem e a sua habilidade em perceber as *affordances* dos recursos que utiliza, isto é, na sua fluência tecno-matemática.

Beatriz percebe a utilidade dos recursos esquemáticos para desenvolver pensamento matemático, ou seja, é capaz de percecionar formas potencialmente úteis de os combinar para obter a resposta aos problemas e ainda ensaiar uma justificação matemática. A sua fluência tecno-matemática evidencia-se pela utilização simultânea de conhecimentos matemáticos e tecnológicos, para aprofundar a sua compreensão dos problemas e ensaiar casos particulares, para formular um conjetura sobre a generalização da solução e ainda para ensaiar uma justificação ou uma prova matemática da solução. Embora os modelos conceptuais desenvolvidos brotem da observação de casos particulares, é a transformação da solução mediante tecnologias digitais expressivas, como o editor de apresentações, que desencadeiam um afastamento do concreto assente na busca de uma explicação da solução de um ponto de vista matemático, isto é, uma matematização vertical. Cada uma destas soluções digitais é uma assinatura pessoal de Beatriz-com-ferramentas-expressivas.

9

CONCLUSÕES

The fact that students seem to learn as well mathematical as technical skills effectively outside the classroom, forces us to ask if there is something wrong inside school as far as the question "how to learn" is concerned.

(Haapasalo, 2007)

Preâmbulo

O facto de que os alunos parecem aprender efetivamente tanto capacidades matemáticas como técnicas fora da sala de aula tem sido uma constatação a brotar da minha proximidade aos Campeonatos de Matemática SUB12 e SUB14. Este inquietar constante lançou-me no empreendimento desta investigação, enquadrada pelos propósitos mais amplos do Projeto Problem@Web. Ainda sem grande rigor na sua definição, o que me despertava mais curiosidade era tentar perceber como surgem aquelas produções dos jovens participantes que aparentam carregar tanto as *capacidades matemáticas como técnicas*, no sentido de tecnológicas, e que surgem *para além da sala de aula*.

Eis, agora, chegado o momento de síntese; de fazer uma retrospetiva sobre as intenções, a pesquisa realizada e os resultados alcançados, mas também de reflexão sobre o seu significado e o seu eventual contributo para o campo da Didática da Matemática. Assim, ao encerrar este relatório começo por retomar o ponto de partida, revisitando o que motivou o estudo e as questões que o nortearam, fazendo também uma breve referência aos conceitos teóricos que enquadram a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias, bem como os procedimentos de ordem metodológica que segui. Nas secções seguintes procurarei condensar a discussão de resultados em torno de cada uma das três linhas que foram ganhando relevo e autonomia ao longo do trabalho: uma caracterização dos sistemas de atividade em que cada jovem se insere, um quadro síntese dos processos de resolução de problemas de matemática com tecnologias, e uma caracterização das suas capacidades de resolver-e-exprimir problemas com tecnologias concretizadas nas suas fluências tecno-matemáticas. Numa última secção pretendo fazer um balanço do trabalho realizado, identificando os limites que balizam este estudo, o que gostaria que tivesse sido possível, antevendo também algumas implicações para a prática e apontando alguns desafios que podem dar continuidade a esta investigação.

9.1 Retomando a matriz do estudo

Propus-me, inicialmente, a estudar *a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias que ocorre no âmbito do campeonato SUB14*, com o intuito de compreender com mais profundidade a forma como estes jovens resolvem problemas de matemática não rotineiros em ambientes que vão para além das suas salas de aula.

Conforme expliquei no Capítulo 1, as questões de investigação foram sendo reformuladas ao longo dos primeiros tempos, por um lado ao sabor de uma extensa revisão da literatura e, por outro, da colaboração com a equipa do Projeto Problem@Web. Retomo pois as três questões, na sua formulação final, que foram o motor da operacionalização do processo de investigação: a) *Como se carateriza o sistema de atividade de jovens participantes numa competição de resolução de problemas baseada na Internet?*; b) *Como se (re)configura a resolução de problemas de matemática quando os jovens recorrem, de forma espontânea, ao uso de ferramentas tecnológicas?*; e c) *De que forma a capacidade de resolver problemas de matemática e exprimir as suas soluções pode ser entendida a partir da relação dos jovens com as tecnologias?*

A revisão da literatura constituiu-se uma oportunidade para reflexões mais focadas em determinados conceitos que viriam, posteriormente, a ser desenvolvidos no quadro conceptual. Destaco, por exemplo, os conceitos de atividade, mediação, sistema de atividade, surgiram como adequados à compreensão dos aspetos de natureza sociocultural que marcam a participação dos jovens no Campeonato. A perspetiva de que resolver um problema de matemática e expressar a sua solução são processos indissociáveis, ganha neste estudo novos contornos pois essa fronteira pode tornar-se ainda mais enevoada quando existe a possibilidade de recorrer a tecnologias digitais, pelo que, aqui resolver um problema de matemática é sinónimo de *resolver*(o problema)*-e-exprimir*(a solução).

A metáfora 'humanos-com-media' ilustra, genericamente, a relação simbiótica entre coletivos de seres humanos e tecnologias com o propósito de desenvolver pensamento matemático, perspetiva que leva a considerar o agregado indivíduo/tecnologia como a unidade de análise.

Perante este cenário, determinado fortemente pelas questões de investigação e conceitos teóricos de base, enveredei por uma investigação de tipo qualitativa integrada no paradigma interpretativo. A escolha de três casos foi guiada por um conjunto de critérios, de entre os quais sublinho a identificação de uma certa propensão para o uso de uma determinada ferramenta tecnológica. A recolha de dados socorreu-se de diferentes instrumentos, desde a recolha de diferentes tipos de documentos, considerando naturalmente soluções produzidas pelos jovens, a realização de entrevistas semiestruturadas com o recurso à retrospetiva estimulada (*stimulated recall*), ou à gravação de ecrãs durante a resolução de problemas. A realização de entrevistas clínicas associadas à proposta de resolução de um problema foi uma opção de fundo por permitir observar de forma direta essa atividade num dos seus ambientes naturais que é o ambiente doméstico de cada jovem.

A análise desses dados seguiu-se a uma longa e aturada etapa de organização e tratamento da diversidade de documentos coligidos, de onde destaco as extensas horas de visionamento de vídeos da atividade de resolução de problemas e de transcrição de entrevistas. O processo de análise de dados realizou-se em três níveis, tal como foi projetado através da sintetização do quadro conceptual num quadro de análise subdividido em três níveis ou camadas: primeiro, procurei compreender os aspetos que moldam a atividade de resolução de problemas com tecnologias no seio do Campeonato, recorrendo à noção de sistema de atividade, uma ferramenta teórica providenciada pela Teoria Histórico-Cultural da Atividade (Capítulo 3, Figura 3.6); depois, num nível mais aprofundado, procurei descrever para compreender os processos de resolução de problemas de matemática com tecnologias através de uma ferramenta de análise construída para este efeito (Capítulo 3, Figura 3.7) e cuja génese é discutida na Secção 3.3 do Capítulo 3; e, num nível de profundidade ainda maior, discuti a capacidade destes jovens em resolver-e-exprimir problemas de matemática com tecnologias em termos da sua fluência tecno-matemática, um conceito adaptado da literatura mas que ganha especial relevo nesta atividade e neste contexto (Capítulo 3, Figura 3.8).

Após trazer à memória os principais traços deste estudo, importa agora avançar para uma síntese de resultados, que procuro organizar, mantendo a mesma lógica de aprofundamento que anteriormente explicitei. Fazendo uso da metáfora da aplicação de lentes com diferente *zoom*, diria que a primeira questão de investigação foi abordada através da Teoria da Atividade, uma ferramenta teórica que permite uma lente macroscópica, no sentido de abrangente; a segunda questão foi dissecada mediante o modelo de resolução de problemas de matemática com tecnologias (RPMT); enquanto a terceira questão do estudo foi estudada a partir de uma lente microscópica que permite descrever esta capacidade de resolver-e-exprimir com tecnologia, a sua fluência tecno-matemática, a partir da relação simbiótica que os jovens desenvolvem com as tecnologias.

9.2 Participar numa competição de resolução de problemas de matemática baseada na Internet

9.2.1 A atividade de Jéssica-com-ferramentas-de-geometria

O caso de Jéssica é, assumidamente, prototípico. As soluções produzidas por Jéssica-com-ferramentas-de-geometria, em particular, o GeoGebra, foram escrutinadas sob diferentes perspetivas com o intuito de ajustar uma operacionalização dos conceitos teóricos enquanto ferramentas efetivamente úteis à análise pretendida.

A proposta de um problema matemático, pelo SUB14, desencadeia a atividade de resolução de problemas de Jéssica, o que é natural e expectável tendo em conta a natureza desta competição. Contudo, a atividade de Jéssica-com-ferramentas-de-geometria é espoletada pelos problemas que envolvem determinados conteúdos matemáticos – os que apelam a noções geométricas – pelo que o objeto desta sua atividade se encontra repartido pelo desafio que cada problema proporciona mas também pela matemática que lhe está associada. Desta forma, a matemática – e os conceitos relacionados com geometria – surgem como um recurso fundamental na sua atividade.

O interesse pela resolução de problemas prende-se com o interesse pela matemática envolvida na resolução.

Os instrumentos que fazem a mediação da atividade de Jéssica na resolução dos problemas são, regra geral, convencionais (e.g., o papel e o lápis, e a calculadora) muito por influência da sua experiência escolar. Embora os problemas de geometria sejam pouco frequentes no SUB14, podem gerar oportunidades para recorrer a um AGD, pelo que Jéssica surge como um caso de interesse precisamente por recorrer ao GeoGebra para resolver alguns desses problemas.

A participação da jovem no SUB14 reflete as suas facetas pessoais (e.g., responsabilidade, pontualidade), mas também a sua perceção das regras no campeonato (e.g., grande cuidado na explicação rigorosa e detalhada do seu pensamento, ênfase nas justificações com recurso à matemática formal, valorização do GeoGebra). Para Jéssica, o SUB14 é um campeonato 'de matemática', portanto procura incorporar as suas experiências com a matemática escolar nesta atividade.

A comunidade reforça o papel do GeoGebra enquanto instrumento legítimo da atividade de resolução de problemas.

Embora Jéssica seja muito independente na produção das suas soluções, ficou patente que a comunidade corrobora o estatuto que a jovem atribui ao GeoGebra, reforçando o seu papel enquanto instrumento legítimo da atividade de resolução de problemas, em particular, dos problemas de geometria. Por um lado, a professora utiliza o GeoGebra nas aulas para abordar conteúdos de geometria, o que lhe confere reconhecimento enquanto ferramenta matemática convencional e aceitável para estudar certos conceitos matemáticos em sala de aula. Por outro lado, o próprio SUB14 permite e incentiva o recurso a qualquer tipo de ferramenta e, em particular, valoriza o uso do GeoGebra.

O papel que Jéssica atribui ao GeoGebra tem uma dupla faceta. Sendo encarado como uma ferramenta indicada para explorar soluções de problemas de geometria que são, posteriormente, compostas no editor de texto, Jéssica reconhece que prefere os problemas de geometria porque lhe dão oportunidade para usar o GeoGebra. Apesar de a jovem submeter soluções em diferentes formatos eletrónicos (e.g., Word, GeoGebra), a linguagem matemática formal e o rigor das justificações, relacionados com o objeto e as regras da atividade, são um denominador comum. No entanto, à medida que nos vamos inteirando da atividade de Jéssica, a relação que ela estabelece com o GeoGebra enquanto lida com problemas de geometria torna-se mais nítida.

Embora o GeoGebra seja valorizado e tenha legitimidade como ferramenta para resolver problemas, a matemática formal é vista como indispensável na resolução e expressão da solução.

Neste caso, o produto da atividade de Jéssica-com-ferramentas-de-geometria é cada solução tecno-matemática desenvolvida no decurso da utilização do GeoGebra. A completude destas soluções advém da combinação entre as construções geométricas, as explicações detalhadas dos processos seguidos, as justificações matemáticas e o uso da linguagem algébrica. Só quando contempla estas características, a solução tecno-matemática de um problema de geometria fica completa e correta, na perceção de Jéssica. De certo modo, a construção geométrica com base no GeoGebra não é suficiente. Embora o programa seja encarado como uma ferramenta matemática legítima, a finalidade da sua utilização é permitir a experimentação; o GeoGebra é usado como uma ferramenta empírica para formular conjeturas e testá-las, sendo a justificação ou prova remetida para uma explicação textual com forte ênfase na matemática formal. Esta sua forma de encarar a resolução de problemas do SUB14, mediante o uso de tecnologias digitais, traduz-se em abordagens que são fortemente marcadas pelas suas aprendizagens matemáticas escolares.

9.2.2 A atividade de Marco-com-ferramentas-de-visualização

A participação de Marco na competição SUB14 é motivada, em primeiro plano, pelo prazer do desafio que os problemas propostos lhe proporcionam. A esse motivo, alia-se um certo fascínio pelo mundo tecnológico que Marco tem oportunidade de concretizar ao realizar uma atividade matemática desafiadora num ambiente que tem uma forte componente tecnológica.

A vertente tecnológica da competição motiva a atividade de resolução de problemas e esta, por seu lado, é uma oportunidade para o uso de tecnologias digitais.

A comunidade envolvente enquadra e fomenta a atividade de Marco-com-ferramentas-de-visualização. O estatuto conferido ao GeoGebra encontra a sua génese na experiência escolar na aula de matemática, o que lhe confere legitimidade enquanto ferramenta matemática. Por outro lado, a ação vigilante do pai e, até certo ponto, o seu gosto pessoal pela folha de cálculo, levam Marco a valorizar esta ferramenta para resolver problemas de matemática. A organização do SUB14, validando e incentivando o recurso a qualquer tecnologia, mostra-se recetiva à criatividade e a resoluções pouco comuns, ou seja, o estimular do recurso a métodos e a instrumentos não convencionais vai precisamente ao encontro das características de Marco, um jovem muito

A comunidade é recetiva a resoluções que envolvem métodos e instrumentos não convencionais.

curioso, com uma atitude bastante competitiva e irreverente, precisamente, nos seus métodos de obter as soluções dos problemas. Para além disso, a relativamente longa experiência de participação de Marco no campeonato ocasiona uma certa empatia com a organização, o que lhe permite assumir uma postura bastante descontraída, não só em termos do cumprimento de prazos, mas também na originalidade dos métodos ou ferramentas que utiliza, optando por abordagens e explicações com elementos visuais.

Na verdade, ao longo da sua atividade, Marco recorre a uma diversidade de ferramentas tecnológicas digitais, como se se tratasse de selecionar aquela que lhe é mais útil de entre as que estão disponíveis numa 'caixa de ferramentas'. Essa seleção parece estar ancorada na vasta experiência de Marco com cada uma dessas ferramentas, isto é, na sua familiaridade com elas, e ainda na possibilidade de aprender a usar uma determinada funcionalidade mediante uma pesquisa na Internet. Geralmente, resolve os problemas no computador com o recurso a esses programas, atitude que faz eco da sua atração pela resolução de problemas baseada na tecnologia.

Os instrumentos que suportam a sua atividade de resolução de problemas são, por norma, a folha de cálculo e algumas ferramentas de edição de imagem (que usa de forma combinada), sendo que também recorre ao GeoGebra e, grosso modo, à Internet. Embora mostre conhecer várias potencialidades da folha de cálculo, aprendidas por influência do pai, e seja capaz de as utilizar em momentos críticos das suas abordagens aos problemas, o uso mais comum que confere a essa ferramenta é o de uma 'tela' onde é possível fazer uma 'composição' da sua resposta a partir de parcelas que podem incluir texto, fórmulas, e imagens criadas ou editadas noutros programas.

A manipulação hábil de figuras permite explorar conceitos matemáticos através de abordagens e métodos visuais.

As suas soluções tecno-matemáticas destacam-se, precisamente, pelas explicações visuais que Marco incorpora nos ficheiros que submete ao SUB14. A obtenção destas soluções é marcada pela manipulação hábil de figuras através dos programas de edição de imagem que melhor domina, atividade esta que o leva a explorar os conceitos matemáticos envolvidos nos problemas mediante o desenvolvimento de abordagens e de métodos visuais.

9.2.3 A atividade de Beatriz-com-ferramentas-de-expressividade

O reconhecimento público das soluções motiva a atividade de resolução de problemas com ferramentas tecnológicas expressivas.

Da mesma forma que nos casos anteriores, Beatriz aprecia cada um dos problemas propostos no SUB14 pelo que a sua atividade de resolução de problemas é motivada, em primeira instância, pelo gozo em ultrapassar os desafios. Contudo, o objeto da sua atividade está também associado à possibilidade de reconhecimento público das suas soluções através da sua eventual seleção e publicação na página do SUB14. Esta possibilidade em integrar o conjunto de 'resoluções admiráveis' desencadeia a produção de resoluções em que Beatriz deixa fluir o seu sentido estético, colocando uma grande ênfase no aspeto gráfico e na apresentação das suas soluções.

A relação que a jovem mantém com os membros da comunidade molda igualmente a sua participação no campeonato e serve dois propósitos: por um lado, pode recorrer às dicas e aos pequenos desafios lançados pela professora para ultrapassar dificuldades na obtenção das soluções; por outro, discute e troca ideias com as amigas, algumas também a participar na competição, de forma a arquitetar formas de expressão das suas soluções.

A interação com membros da comunidade cumpre dois propósitos: ultrapassar dificuldades na obtenção da resposta e apoiar a conceção de formas de expressão da solução.

A independência e a irreverência de Beatriz são dois traços pessoais que explicam o seu gosto muito particular pelas tecnologias de cunho social, o que a leva a participar ativamente em redes sociais. Mais importante é o facto de esta sua faceta levá-la a transportar a atividade de resolução de problemas para ambientes sociais que se estendem para lá do lar ou da sala de aula (e.g., nas saídas com os amigos). Deste modo, Beatriz discute formas de resolver e exprimir os problemas do SUB14 numa multiplicidade de locais e em interação com várias outras pessoas.

A comunidade aceita e valoriza a expressividade das soluções.

O facto de a organização aceitar e valorizar a expressividade das soluções, nomeadamente quando as considera 'resoluções admiráveis', é percebido por Beatriz que investe nesse aspeto. Procurando oferecer explicações, a jovem encontra no editor de apresentações PowerPoint a ferramenta adequada para aproveitar a oportunidade de usar o seu sentido estético.

Os instrumentos da atividade de Beatriz são variados e incluem os mais convencionais, como o papel e lápis, ou o computador e os programas de edição de texto, de apresentações ou de imagem. Contudo, é o uso do PowerPoint que dá o mote para o caso de Beatriz-com-ferramentas-expressivas no sentido em que a jovem utiliza este programa, com relativa frequência, como ferramenta preferencial para exprimir soluções dado que lhe permite valorizá-las com o recurso a elementos descritivos, visuais e gráficos, como o recurso à cor e à ilustração ou à elaboração de esquemas.

As primeiras soluções produzidas com papel e lápis evidenciam matematizações que se transformam, em função do modo de exprimir com as tecnologias.

A produção das soluções tecno-matemáticas envolve, numa fase inicial, o recurso a papel e lápis para elaborar esquemas e, numa fase posterior, o recurso ao editor de apresentações para enfatizar a expressividade da resolução. No entanto, a resolução digital não é uma mera reprodução da respetiva solução com papel e lápis, já que o retomar das resoluções com a ferramenta tecnológica estimula uma reformulação das soluções, transformando-as. Enquanto as primeiras abordagens evidenciam uma matematização elementar e muito focada nos contextos subjacentes ao problema, a passagem para o ambiente digital e a ênfase nas suas potencialidades expressivas estimulam uma transformação ao nível do pensamento matemático desenvolvido que se caracteriza pelo completar das abordagens visuais com o recurso ao cálculo ou à simbolização algébrica, procurando oferecer uma justificação ou prova matemática que valide as soluções.

9.2.4 A concluir

Estes três casos, cada qual com as suas idiossincrasias, evidenciam a repercussão dos aspetos sociais, e até culturais, associados à participação no campeonato SUB14 na atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias. As experiências de participação de cada um destes jovens no SUB14 reflete as suas próprias experiências escolares e extraescolares e as aprendizagens que desenvolvem nesses ambientes, uns mais outros menos, marcados por tecnologias digitais. Em particular, no contexto extraescolar que é o SUB14, estes jovens lidam com a comunidade envolvente com a consciência de que este é um campeonato de matemática, que as soluções que produzem estão sujeitas a determinadas regras e se destinam a uma audiência muito própria.

As regras que regem a participação no SUB14 podem ser explícitas (e.g., em cada problema surge a recomendação 'Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução') ou implícitas (e.g., é permitido usar o PowerPoint) uma vez que os jovens acabam por fazer uma leitura de outras regras não declaradas e assumi-las como importantes. Estas regras de participação acabam, assim, por se tornar regras que regem a atividade de resolução de problemas com tecnologias neste ambiente extraescolar. Por conseguinte, o objeto da atividade pode dividir-se em duas componentes: um objeto explícito, partilhado pelos três jovens, que consiste no problema que é preciso resolver e cuja resolução tem que ser enviada para a organização; e um objeto implícito, que é específico para cada jovem participante, num caso a matemática inerente a cada problema, num outro, a vertente tecnológica do campeonato, e no terceiro caso, a eventualidade de reconhecimento público pela solução produzida.

Relativamente ao uso de instrumentos, todos estes jovens utilizam ferramentas tecnológicas no decurso da sua atividade, o que seria expetável dado que esta competição é baseada na Internet, ou seja, na participação através do envio das resoluções por via eletrónica. Contudo, estes jovens revelam certas tendências para o uso de determinados instrumentos e, em simultâneo, identifica-se uma presença bastante diversificada de ferramentas digitais, sendo possível distingui-las enquanto ferramentas convencionais e não convencionais (Jacinto, Carreira & Mariotti, 2016) mas, sem dúvida, ferramentas para a resolução e expressão de problemas de matemática. Jéssica sabe que pode usar o GeoGebra, porque é uma ferramenta matemática autorizada, mas sente necessidade de ser rigorosa nas suas explicações e de formalizar matematicamente as suas respostas pois está preocupada com a autoridade académica que as vai apreciar. Para Marco, desde que a resposta esteja correta, o que importa é oferecer uma explicação, por isso, qualquer caminho é aceitável, qualquer método é válido, qualquer ferramenta tecnológica é autorizada, até mesmo as abordagens e as tecnologias menos convencionais. Já Beatriz toma como primordial o facto de a organização valorizar os aspetos gráficos nas resoluções admiráveis, o que a impele a recorrer a um editor de apresentações para enriquecer as suas soluções com elementos visuais e esquemáticos. Em síntese, cada um destes jovens não só resolve os problemas e exprime as soluções à luz da sua própria interpretação das regras do SUB14, como da audiência que imaginam que as suas produções poderão ter.

Por fim, salienta-se que esta atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias é distribuída no tempo, nos meios que a suportam, bem como, no espaço. É distribuída no tempo, tal como já foi assinalado, dado que os jovens dispõem de quinze dias para resolver cada problema e apresentar a sua resolução. É uma atividade que não só se ampara na utilização de vários instrumentos, desde o papel e lápis, passando pelas tecnologias de uso doméstico até às ferramentas matemáticas, como na integração de produtos parcelares que encerram pensamento ou processos matemáticos complementares e que, no final, compõem a resolução a submeter. E esta atividade também se encontra distribuída no espaço dado que para além de estes jovens abordarem habitualmente os problemas em sua casa – o local mais esperado – podem também fazê-lo na escola e nas suas aulas de matemática (com ou sem o conhecimento do professor), ou ainda em locais completamente inesperados – como na esplanada de um café. De certa forma, estes casos ilustram o prazer de lidar com um problema de matemática, concebendo soluções rigorosas e engenhosas com recurso às tecnologias digitais.

9.3 Resolver Problemas de Matemática com Tecnologia

9.3.1 Resolver-e-exprimir-com-tecnologias

Filtrados os aspetos que caracterizam os sistemas de atividade dos três casos empíricos – e percebida a constelação de conceitos e relações que gravitam em torno da atividade de resolver os problemas matemáticos do SUB14 e exprimir as suas soluções – importa focar atenções nas abordagens desenvolvidas para obter as soluções dos problemas com tecnologias: *como se (re)configura a resolução de problemas de matemática quando os jovens recorrem, de forma espontânea, ao uso de ferramentas tecnológicas?*

No aprofundamento das noções teóricas que permitem enquadrar este fenómeno de resolução de problemas de matemática com tecnologias, considerei como ideia central a impossibilidade de estabelecer com clareza as fronteiras entre o processo de resolver um problema e o processo de reportar a solução obtida. Tal como Carreira et al. (2016) discutem, resolver um problema é um processo síncrono de matematização e expressão do pensamento matemático envolvido ou, mais concretamente, de desenvolvimento de estruturas conceptuais que suportam simultaneamente a obtenção da solução do problema e a sua explicação.

Esta noção, designada por ‘resolver-e-exprimir’, ganha especial relevância neste contexto em que a atividade é mediada por tecnologias digitais, já que estes jovens desenvolvem modelos conceptuais enquanto recorrem às tecnologias para encontrar a solução, mas envolvem-se de forma igualmente ativa na conceção de uma explicação dessa solução ou, mesmo, de uma outra versão aprofundada dessa solução matemática, como ficou patente nos dados e discutirei adiante. Portanto, este é um dos aspetos em que a presença de tecnologias altera a atividade de resolução de problemas de matemática: a impossibilidade de distinguir as fases que, tradicionalmente, se podem designar por obtenção da solução e reprodução do processo seguido, percebe-se com grande nitidez quando a tecnologia é utilizada.

Resolver-e-exprimir descreve o processo síncrono de matematização e expressão do pensamento matemático na resolução de problemas de matemática com tecnologias: a solução explica-se a si própria.

A ideia de que resolver e expressar são duas faces de *um* mesmo processo, que é síncrono, está bem presente nos casos descritos. Por exemplo, o caso de Jéssica-com-ferramentas-de-geometria mostra que a atividade de construção com o GeoGebra faz emergir conjeturas ou relações entre objetos que são elementos essenciais de matematização, mas as próprias construções também documentam o processo de desenvolvimento dos modelos conceptuais. Um outro exemplo é o caso de Marco-com-ferramentas-de-visualização: todas as ações do jovem revelam a sua intencionalidade em ‘produzir uma solução’ que se explique a si própria, o que leva a considerar que o resolver-e-exprimir-com-tecnologias resume a atividade de Marco desde que inicia a sua abordagem aos problemas até que submete as soluções produzidas à organização do campeonato SUB14.

O caso de Beatriz-com-ferramentas-de-expressividade também alimenta este argumento, embora se possa considerar que a sua atividade compreende duas etapas em que a jovem recorre a ferramentas diferentes (ver Figuras 8.15 e 8.25, Capítulo 8). Numa primeira etapa, Beatriz recorre ao papel-e-lápis para obter a solução dos problemas e, em certa medida, também se pode considerar que utiliza aqueles instrumentos para esboçar essa versão preliminar das soluções. Contudo, a atividade que desenvolve com o recurso ao editor de apresentações impele um aprofundamento do modelo conceptual de cada solução: enquanto procura uma forma de exprimir com o PowerPoint, aprofunda-se a sua compreensão matemática da solução e alcança uma resolução ‘diferente’ da anterior.

Beatriz apropria-se dos modelos conceptuais subjacentes às soluções destes problemas durante o processo de resolver-e-exprimir-com-PowerPoint.

Resolver um problema de matemática com recurso às tecnologias digitais envolve tirar partido dessas ferramentas – ou seja, das suas potencialidades relacionadas com a representatividade, ou o uso da imagem e da cor, ou ainda a manipulação – o que acentua a impossibilidade de distinguir uma fronteira entre as ações de resolver e de expressar o processo de resolução. Desta forma, resolver-e-exprimir-com-tecnologias é uma noção que indica que, quando as tecnologias estão disponíveis, o seu uso atravessa o processo integral de desenvolvimento de um modelo conceptual e sua correspondente exteriorização.

9.3.2 Os processos envolvidos

A extensa revisão da literatura focada na resolução de problemas de matemática levou-me a observar que grande parte dos modelos e quadros teóricos existentes assumem a experiência e o conhecimento matemáticos como recursos cognitivos primários dessa atividade. Deste modo, a utilização desses recursos teóricos poderia levar a uma compreensão truncada do fenómeno que pretendia analisar, por não permitir contemplar o papel das ferramentas tecnológicas em toda a sua extensão e profundidade. Emergiu, assim, a necessidade de construir um referencial exequível para analisar e descrever os processos de resolução de problemas de matemática, mediados por ferramentas tecnológicas, tal como ocorrem na competição SUB14.

O modelo RPMT surge da sintetização de dois modelos existentes e é desenhado à luz de uma perspetiva teórica e aperfeiçoado a partir da sua utilização num caso prototípico.

A partir de um conjunto de conceitos e argumentos fundacionais – humanos-com-media, resolver-e-exprimir, perceção das *affordances*, resolução de problemas enquanto desenvolvimento de modelos conceptuais – e com base na combinação entre o modelo de resolução de problemas tecnológicos de Martin e Grudziecki (2006) e o modelo de resolução de problemas de matemática de Schoenfeld (1985). No pressuposto de que a sua conjugação permite iluminar as duas facetas desta atividade, o uso de recursos matemáticos e o de recursos tecnológicos, suprindo insuficiências parcelares, desenhei um modelo descritivo que compreende dez processos envolvidos na resolução de problemas de matemática com tecnologias (RPMT).

O modelo RPMT foi desenvolvido a partir de uma estreita articulação entre o quadro conceptual e a análise do caso de Jéssica-com-ferramentas-de-geometria. Os processos que o compõem foram reformulados ao longo de várias etapas, daí surgindo uma formulação que foi aplicada na análise dos processos de resolução de problemas com tecnologias de Marco e Beatriz. Porém, há agora um entendimento mais abrangente sobre os aspetos que constituem cada um desses processos, e que importa registar na medida em que permitem uma definição mais detalhada e mais clara de cada um.

O processo inicial, *Captar*, diz respeito ao primeiro contacto que se estabelece com o problema, isto é, à apropriação das condições do problema e das primeiras ideias sobre o que o problema envolve. Através da leitura do enunciado, o indivíduo apropria-se do tema matemático envolvido, faz uma apreciação da sua familiaridade com esse assunto, identifica possíveis semelhanças com outros problemas já resolvidos, pondera possíveis abordagens, reconhece a natureza dinâmica que pode estar envolvida na situação problemática. Nuns casos, a familiaridade e o grau de confiança sentido em relação ao problema podem conduzir de imediato aos processos seguintes, mas o problema também pode ser abandonado e retomado mais tarde.

Identificar é um processo que se caracteriza por uma tentativa de compreender o que está em causa, isto é, tanto as noções matemáticas que poderão ser relevantes como as ferramentas tecnológicas que virão a ser necessárias. Nesta etapa, o indivíduo procura clarificar o seu entendimento sobre as condições do problema, antecipando os conceitos matemáticos que estão envolvidos e identificando possíveis ferramentas tecnológicas a que consegue aceder e que lhe poderão ser úteis. Este processo faz, naturalmente, a transição entre o anterior e o seguinte, embora não aparente fronteiras bem delimitadas, como que interpondo-se entre eles.

Interpretar refere-se ao percecionar *affordances* nos recursos tecnológicos enquanto se ponderam formas de abordar a solução de um ponto de vista matemático. Neste processo, o indivíduo envolve-se numa análise mais minuciosa das condições do problema, fazendo uma avaliação daquilo que é capaz de fazer com os recursos matemáticos e os recursos tecnológicos que estão à sua disposição. Esta análise pode fazer emergir conhecimentos específicos sobre a utilização dos recursos (e.g., saber efetuar a divisão de um segmento de reta em duas partes iguais com o GeoGebra, elaborar esquemas rudimentares com papel-e-lápis, ou decompor uma figura geométrica num editor de imagem), que fazem uma transição para o processo seguinte.

No processo *Integrar*, ocorre a combinação de recursos tecnológicos e matemáticos com a perspetiva de desenvolvimento de uma abordagem exploratória da solução. Esta fase inclui a organização dos recursos para desempenhar ações concretas num determinado ambiente tecnológico sob um ponto de vista matemático, isto é, com uma intencionalidade matemática que desencadeia uma atitude investigativa em relação à solução, mas que apenas se irá concretizar na etapa seguinte (e.g., fazer uma construção geométrica robusta recorrendo às ferramentas do GeoGebra impele a manipulação da figura e a consequente observação dos invariantes; fazer a decomposição de uma figura impele a tentativa de sobreposição para verificar se são semelhantes; submeter um esquema com papel e lápis a um teste numérico de pares de valores relacionados pode levar à deteção de erros ou afinação do esquema; ou ainda a construção de um esquema digital leva à utilização de elementos expressivos).

O processo que se segue e está em estreita articulação com o anterior, *Explorar*, engloba a utilização dos recursos tecnológicos e dos recursos matemáticos para desenvolver uma atividade exploratória em torno de um modelo conceptual que torne possível obter uma solução para o problema. Esta atividade caracteriza-se pela utilização de recursos tecnológicos e matemáticos para realizar a produção de conjeturas (e.g., manipulação de objetos livres nas construções e constatação de propriedades invariantes; análise de relações que emergem da atividade de construção; análise de esquemas e perceção da possibilidade de generalização; manipulação de figuras para efetuar demonstração visual de uma propriedade observada), para analisar os resultados dessas experiências, eventualmente, passando pela sua reformulação, até à obtenção de uma possível resposta para o problema ou de uma forma produtiva de a alcançar.

Segue-se o processo *Planear*, que diz respeito ao delinear de uma abordagem para obter uma solução, tendo por base a análise das conjeturas exploradas previamente e ponderando os recursos tecnológicos à disposição para exprimir essa solução. Esta etapa pode ser assinalada através da intenção em enveredar por uma abordagem algébrica; através da inclusão de um novo objeto que visa acrescentar um sentido à exploração realizada anteriormente, desvelando o plano para obter a solução (e.g., o acrescentar de um objeto numa construção revela a forma como se está a conceber um caminho até à solução); ou ainda através do reconhecimento da necessidade de recorrer a outra ferramenta tecnológica para dar continuidade ao plano (e.g., a ‘digitalização’ do esquema produzido com papel e lápis pode ser conseguida com o recurso ao editor de apresentações).

O processo *Criar* caracteriza-se pelo desenvolvimento da abordagem delineada, através de um recombinar dos recursos, tecnológicos e matemáticos, de formas potencialmente novas e que tornem possível obter a solução. Este recombinar de recursos tecno-matemáticos gera novos objetos de conhecimento – novas formas de olhar para e entender a solução, que podem assumir a forma de estratégias, representações, modelos conceptuais – que irão contribuir para resolver-e-exprimir o problema. A implementação do plano traçado inclui uma matematização mais estruturada, que se afasta das experimentações anteriores, do contexto inerente à situação problemática, da visualização, isto é, uma matematização que passa a estar ancorada na abstração, na generalização, ou na utilização de uma linguagem algébrica (e.g., constatação de novas propriedades nas construções decorrente da exploração dos invariantes; a definição de variáveis para estabelecimento de relações entre objetos ou para manipulação algébrica; a inserção de objetos adicionais nas figuras). Os modelos conceptuais, até aqui em desenvolvimento, ganham agora a consistência de *modelos para* explicar a solução, o que ocorre na etapa que se segue.

Verificar é um processo que resume o envolvimento em atividades de explicação e justificação da solução encontrada, tendo por base a utilização de recursos tecno-matemáticos. Neste processo, o indivíduo documenta os seus procedimentos (e.g., regista um relato dos passos seguidos; apresenta cálculos; relaciona texto com objetos geométricos ou construções através de legendas), mas também produz explicações detalhadas dos aspetos do pensamento matemático que subsistiram à obtenção da solução, isto é, o relato também tem em vista oferecer uma justificação da solução ou a prova de uma conjetura. Estes relatos incluem os novos objetos de conhecimento produzidos com os recursos tecno-matemáticos pelo que, para além de texto ou cálculos, as construções geométricas, as imagens editadas e transformadas, as etiquetas, a cor, os esquemas, sustentam o pensamento matemático desenvolvido. Por vezes, e apesar das explorações anteriores terem induzido a implementação de um determinado plano, a solução só fica completamente desvendada para o indivíduo quando este se envolve no processo de verificar a solução, o que, como já referido, reforça a ideia de que o ato ‘resolver’ está intimamente relacionado com o de ‘exprimir’ – são atividades simultâneas de matematização que culminam na obtenção da solução tecno-matemática.

Disseminar é o processo que inclui a apresentação da solução a outros de especial relevância e que envolve ainda uma reflexão pessoal acerca do sucesso do processo de resolução do problema com tecnologias. A submissão da solução tecno-matemática, por via eletrónica, engloba naturalmente os ficheiros digitais produzidos, mas pode também incluir texto contendo explicações ou justificações para a solução ou ainda algumas indicações sobre como aceder à totalidade da solução, em particular, algum programa que seja necessário. Relativamente à reflexão sobre o trabalho desenvolvido, esta pode estar mais ou menos visível no produto submetido, sendo que o seu envio pressupõe um certo grau de confiança de que a atividade de resolução-e-expressão foi bem-sucedida. No contexto desta competição, esta apreciação é feita através do preenchimento obrigatório do breve questionário incluído no formulário de resposta disponibilizado na página do SUB14 e que solicita a opinião dos participantes relativamente à ajuda recebida durante a resolução, o gosto pelo problema, e o grau de dificuldade do problema.

Comunicar é o processo que diz respeito à interação com outros indivíduos de relevância enquanto decorrem os processos de resolução-e-expressão dos problemas. Esta comunicação pode ser estabelecida com outros membros da comunidade, como por exemplo, com os familiares mais próximos – que supervisionam a atividade, ajudam a sistematizar ideias, ensinam a usar certos programas; os amigos – com quem se trocam ideias sobre formas de exprimir uma solução; os professores de matemática (ou a investigadora) – que colocam desafios, dão dicas, esclarecem significados de noções matemáticas. Inclui-se ainda neste processo as trocas de correspondência com a organização do campeonato, bem como as pesquisas feitas *online* sobre um determinado tópico matemático relacionado com os problemas ou a consulta de resoluções publicadas na página do campeonato e relacionadas com os problemas entre mãos.

9.3.3 A existência de microciclos

O modelo RPMT compreende um conjunto de dez processos que permitem identificar, descrever e compreender as várias componentes da resolução de problemas de matemática com tecnologias, no âmbito do campeonato extraescolar SUB14. A utilização deste modelo enquanto ferramenta de análise dos processos desenvolvidos em diferentes momentos por cada um dos três casos escolhidos permitiu reformular o modelo, detalhando os aspetos que compõem cada um dos processos delineados inicialmente com base na literatura.

Com efeito, este modelo permite analisar a resolução de problemas de matemática com tecnologias, tanto a partir dos produtos finais submetidos pelos participantes (os ficheiros contendo as soluções tecno-matemáticas), como a partir da observação da própria atividade. Uma análise com base no ficheiro pode levar a admitir que os processos se sucederam de forma linear, tal como patente na síntese dos processos de Jéssica-com-ferramentas-de-geometria a resolver e exprimir o problema ‘A marcação do canteiro’ (Capítulo 6, Figura 6.10) e na síntese dos processos de Marco-com-ferramentas-de-visualização a resolver-e-exprimir o problema ‘Unidos e Cortados’ (Capítulo 7, Figura 7.17). Todavia, ao analisar soluções produzidas com programas que, de alguma forma, permitem guardar registo de uma eventual sequência de passos efetuados (e.g., o protocolo de construção do GeoGebra) o modelo RPMT sugere a existência de movimentos de vai-e-vem entre os processos integrar/explorar – o que ficou a descoberto na solução do problema ‘Um quadrado dividido’ produzida por Jéssica com recurso ao GeoGebra (Capítulo 6, Figura 6.16). O processo de integrar origina uma atividade exploratória que, por sua vez, conduz a uma nova etapa de integração de recursos tecnológicos e matemáticos e assim por diante, até à obtenção de um modelo conceptual com potencial para ser concretizado e permita obter a solução.

A resolução de problemas de matemática com tecnologias inclui múltiplas sequências de processos que se repetem de forma iterativa (microciclos).

É, contudo, na análise combinada dos dados que provêm de múltiplas fontes de evidência (e.g., o protocolo de construção do GeoGebra, o relembrar da atividade através da retrospeção estimulada, ou a observação da própria atividade), que o modelo se revela mais proveitoso, especialmente porque possibilita identificar momentos críticos da atividade, caracterizados pela existência de microciclos entre pares de processos. Tal como anteriormente observado no caso de Jéssica, os processos integrar-explorar também surgem em associação na atividade de Marco ao resolver-e-exprimir o problema ‘Motivo decorativo’: o processo de usar ferramentas de edição de imagem para criar triângulos semelhantes entre si (integrar) leva à tentativa de sobreposição das figuras (explorar), enquanto a análise dessa experiência e constatação de que há uma impossibilidade técnica conduz a uma nova utilização combinada de recursos matemáticos e tecnológicos (integrar) para em seguida procurar outra forma de demonstrar a semelhança identificada (explorar). A atividade de Beatriz volta a revelar a natureza cíclica destes dois processos na medida em que a utilização de recursos tecnológicos para desenvolver pensamento matemático (e.g., a construção de um esquema no editor de apresentações) espoleta uma atividade de exploração e análise das suas potencialidades enquanto sustentação de um modelo conceptual que permita obter a solução pretendida (e.g., estudar a utilidade da decomposição de um segmento orientado em duas partes iguais). Portanto, o processo que envolve a integração de recursos tecnológicos e matemáticos tem em vista o desenvolvimento de uma abordagem exploratória e a análise dessa exploração (e.g., manipulação, conjetura, cálculos, entre outros) pode estimular a integração de novos recursos tecnológicos ou matemáticos e, novamente, voltar a desencadear um processo de exploração.

Para além destes, existem outros pares de processos que também se desenrolam de forma iterativa. Por exemplo, na atividade de Beatriz a resolver-e-exprimir o problema ‘Uma troca de bolas’, o processo interpretar surge interligado com o processo integrar e, este, com o processo comunicar (interpretar/integrar/comunicar). Existem pois vários microciclos a considerar: num primeiro momento, Beatriz procura dar sentido às condições do problema (interpretar) através da construção de um esquema e mediante o teste de determinados valores (integrar), que procura depois melhorar, consultando as resoluções admiráveis (comunicar); e num segundo, momento, dado que não consegue avançar com a simulação da segunda parte do trajeto, aceita uma dica (comunicar) que prontamente procura confrontar com os seus esquemas (integrar) embora volte a necessitar de clarificar alguns aspetos e aceite o desafio de construir um outro esquema (comunicar), o que acaba por fazer e lhe permite detetar erros na sua construção inicial (integrar):

Interpretar → Integrar → Interpretar → Integrar → Comunicar
→ Integrar → Comunicar → Integrar → Comunicar → Interpretar
→ Integrar → Comunicar → Interpretar → Comunicar → Integrar

Outro exemplo, este na atividade de Marco a resolver-e-exprimir o problema ‘Motivo decorativo’ (Capítulo 7, Figura 7.24), mostra que os processos identificar e interpretar ocorrem de forma reiterada, isto é, cada tentativa de compreensão das noções matemáticas e das ferramentas tecnológicas que lhe poderão ser úteis é seguida de uma interpretação daquilo que o próprio é capaz de fazer com aqueles recursos e da sua utilidade para a obtenção da solução.

Esta natureza cíclica dos processos de resolução de problemas de matemática tem sido reconhecida em diversos estudos (e.g., Schoenfeld, 1985; Carlson & Bloom, 2005; Lesh & Harel, 2003; Hamilton, Lesh, Lester, & Yoon (2007); Marcou & Lerman, 2006; Yimer & Ellerton, 2010). Embora com outros pressupostos teóricos ou abordagens, os resultados obtidos por estes investigadores levaram-nos a enfatizar a não linearidade dos passos seguidos pelos participantes nos seus estudos no decurso da resolução de um problema de matemática. Mas, apesar de esta constatação não ser nova nem recente, não parece estar suficientemente estudada na medida em que os trabalhos que a reportam não se debruçam explicitamente sobre esta questão da não linearidade nem se detêm na discussão sobre a ocorrência destes microciclos. Quer isto dizer que os ciclos são identificados mas o seu significado no processo global de resolução de um problema não fica explicado. De um modo geral, não se sabe o que faz com que surjam esses ciclos, de que forma surgem ou como funcionam. Um dos possíveis motivos para esta ausência nos estudos é o facto de os investigadores se centrarem na utilização de um modelo base de resolução de problemas como o mais imediato instrumento de análise dos seus dados e tendo em conta o que cada estudo pretende conhecer, não se colocando a necessidade explícita de compreender os referidos microciclos.

Por exemplo, Schoenfeld (1985) identificou esta natureza cíclica ao esquematizar o tempo despendido em cada etapa do modelo e registou momentos em que o indivíduo volta atrás para ler novamente o enunciado, ou para reanalisar a situação e avança em seguida na sua solução. Carlson e Bloom (2005), investigando a atividade de resolução de problemas de 12 matemáticos, concluíram sobre a existência de múltiplos ciclos dentro do modelo que desenvolveram, isto é, ciclos que envolvem três fases distintas do modelo. Para além desses ciclos entre processos, as autoras identificaram ainda um subciclo ‘conjeturar-imaginar-avaliar’ aquando da etapa de planeamento que resultava numa aceitação ou rejeição da conjetura. Marcou e Lerman (2006) estudaram o papel dos processos de aprendizagem autorregulada na tomada de decisões durante a resolução e problemas e também aí observaram a sua natureza cíclica. Yimer e Ellerton (2010) propuseram um modelo de cinco fases para descrever as abordagens cognitivas e metacognitivas de futuros professores na resolução de problemas não rotineiros e, a partir da sua aplicação, identificaram uma variedade de trajetos que podem ser adotados ao longo dos processos de resolução de problemas, e que não são lineares nem unidirecionais. Por outro lado, esta ideia de microciclos entre os processos de resolução de problemas foi recentemente questionada. Czocher (2014) reportou um estudo com foco na resolução de problemas geradores de modelos (*modeling-eliciting problems*) em que descreve os processos seguidos por alunos de um curso superior de engenharia como não sendo nem cíclicos nem iterativos: os estudantes apresentavam um comportamento desordenado (*messy behavior*) enquanto completavam essas tarefas. A investigadora advogava ainda a necessidade de se obter um modelo mais preciso que tenha em consideração este tipo de comportamento durante a resolução deste tipo de problemas, que requerem o envolvimento numa atividade de modelação.

O trabalho que aqui reporto acaba por se diferenciar neste aspeto dado que, ao adotar o modelo de resolução de problemas de matemática com tecnologias como um quadro de análise dos processos desenvolvidos pelos jovens, não só fui encontrando e descrevendo estes microciclos, como fui procurando dar-lhes sentido no contexto global de construção de uma solução, naturalmente, com auxílio das restantes ferramentas teóricas que incluem o quadro conceptual do estudo.

Neste momento, parece legítimo colocar a hipótese de que os microciclos emergentes na atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias envolvem o processo *Integrar*, à luz do que foi detetado na atividade dos três jovens participantes neste estudo (ver sínteses dos processos: Figura 6.18, Figura 7.24, Figura 8.15 e Figura 8.25). Este facto sugere que o *Integrar* é um processo chave nesta atividade simultânea de matematização e expressão de pensamento matemático por meio de ferramentas tecnológicas, ou seja, é aqui que a tecnologia é aliada aos conceitos matemáticos para examinar ou testar possíveis modelos conceptuais das soluções. Uma vez que o processo *Integrar* surge na maioria dos microciclos identificados, como que em *loop* com outros processos, é plausível que a construção da solução do problema decorra em função da relação entre a matemática e a tecnologia, ou seja, estes microciclos caracterizam-se por uma utilização eficaz da tecnologia para ultrapassar as barreiras ou obstáculos que constituem o problema. Assim, estes microciclos, que envolvem o processo *Integrar*, antecedem avanços subsequentes, em direção à solução.

O processo de Integrar surge como um processo chave na atividade simultânea de matematização e de expressão de pensamento matemático, com recurso a ferramentas tecnológicas.

O processo *Integrar*, ao estar associado ao *Explorar*, mostra que os jovens procuram conscientemente introduzir a tecnologia adequada para apoiar o seu pensamento matemático e que essa tecnologia desencadeia nova atividade exploratória.

Para além disso, os microciclos que se descrevem em torno dos processos *Integrar-Explorar* são também nucleares nesta atividade de resolução de problemas com tecnologias: é deste microciclo composto pela integração de recursos tecno-matemáticos e a exploração que daí se gera (a manipulação de objetos, a observação, a conjetura) que a solução se desvela, de certo modo, a situação problemática fica sob controlo. O facto de o modelo conceptual se tornar mais definido permite passar para as fases seguintes de planeamento e de criação da solução. Portanto, o facto de nestes dados o processo *Integrar* estar associado ao *Explorar* significa, por um lado, que os jovens procuram conscientemente uma forma de introduzir a tecnologia adequada ao desenvolvimento do seu pensamento matemático e, por outro, que essa introdução desencadeia uma atividade exploratória indispensável à construção de um modelo conceptual da solução.

9.3.4 A concluir

A discussão de resultados apresentada ao longo desta secção sustenta o argumento de que a resolução de problemas de matemática se reconfigura quando o uso espontâneo de ferramentas tecnológicas é possível. Esta reconfiguração sucede, desde logo, porque o processo de matematização decorre de forma síncrona ao processo de expressão do pensamento matemático. O facto de a utilização de ferramentas tecnológicas atravessar o processo integral de desenvolvimento de um modelo conceptual e a correspondente construção de uma solução, que se explique a si própria, pode ser entendido à luz da noção de resolver-e-exprimir-com-tecnologias.

A tecnologia permeia todos os processos de resolução de problemas: resolver-e-exprimir-com-tecnologias ilustra a atividade síncrona de matematização e expressão do pensamento matemático, mediada pela tecnologia.

Um outro contributo deste estudo diz respeito ao modelo que foi criado para investigar, analisar e explicar a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias, no contexto de um campeonato baseado na Internet, muito particularmente focado nos processos dessa atividade que congregam conhecimentos matemáticos e tecnológicos para desenvolver modelos conceptuais e, assim, resolver-e-exprimir as soluções dos problemas. O modelo de Resolução de Problemas de Matemática com Tecnologias, que compreende dez processos, permite compreender várias configurações desta atividade de matematização e expressão de pensamento matemático por meio das tecnologias que os jovens escolhem utilizar. Muito em particular, o modelo permite perceber a importância do processo de *comunicação* durante a atividade de resolução-e-expressão dos problemas. Para além de poder surgir em qualquer momento da atividade de resolução de problemas com tecnologias, facto inicialmente assumido no modelo, a comunicação também pode ocorrer por diversas vezes e com diferentes propósitos: assistir na identificação das condições do enunciado (como no caso de Marco a resolver-e-exprimir o problema 'Motivo decorativo'), auxiliar na interpretação e na integração de recursos tecnológicos e matemáticos (como no caso de Beatriz a resolver-e-exprimir o problema 'Uma troca de bolas'), ou mapear possibilidades de apresentação da solução que subsidiam o planeamento da estratégia a desenvolver (como no caso de Beatriz a resolver-e-exprimir o problema 'Almoço de amigos'). Embora transversal, a *comunicação* assume-se assim como um processo de relevo nesta atividade, o que está em sintonia com o que havia sido reconhecido anteriormente por via da análise dos sistemas de atividade destes jovens.

Perante estas evidências de que a tecnologia reconfigura a atividade de resolução de problemas de matemática, parece oportuno questionar se a natureza dos problemas se altera na presença de tecnologias, ou seja, em que medida um problema conserva a sua qualidade inalterada quando é possível recorrer a tecnologias digitais. E ainda em função do que foi exposto nas seções anteriores, poder-se-ia igualmente indagar o que se considera ser um bom solucionador de problemas de matemática com tecnologias, em linha com o que em tempos motivou inúmeros estudos que visavam identificar as características de um indivíduo com um desempenho excecional da resolução de problemas de matemática.

Esta ideia de que a tecnologia reconfigura a atividade e o pensamento matemático não é nova e já foi trazida à discussão através dos trabalhos de Marcelo Borba e Mónica Villarreal, que colocam o âmago da sua argumentação na relação de simbiose entre o ser humano e os media ao seu dispor, concretizada na noção de seres-humanos-com-media. De facto, Villarreal e Borba (2010) defenderam que o pensamento matemático tem características diferentes consoante a ferramenta tecnológica que o suporta. O modelo de resolução de problemas de matemática com tecnologias que construí ao longo do estudo vem revelar os aspetos intrínsecos ao uso de tecnologia que potenciam essa reconfiguração. Um exemplo está patente na atividade de Beatriz em que o recurso a uma tecnologia digital, cujo propósito é a expressividade, altera a solução produzida no papel na medida em que o microciclo integrar/explorar com papel e lápis é bastante diferente do microciclo integrar/explorar com o PowerPoint. Enquanto o pensamento matemático que Beatriz produz com o papel e lápis encerra uma matematização horizontal, concretizado na compreensão e elaboração de esquemas, o pensamento matemático produzido com o editor de apresentações revela uma maior abstração e um grau de formalismo maior, em que os esquemas assumem uma relevância secundária para dar maior visibilidade às relações identificadas algebricamente, ou seja, este modelo conceptual passa a possuir traços de uma matematização vertical. Portanto, é a natureza do pensamento matemático que se desenvolve com a tecnologia que se altera, enquanto se resolve-e-exprime o problema. O que se observa é que a tecnologia abre mais vias de exploração, abordagens essas que estão muito centradas na interatividade com os objetos, na sua manipulação, e na observação do *feedback* devolvido pela tecnologia.

A natureza do pensamento matemático desenvolvido com a tecnologia altera-se: a tecnologia abre mais vias de exploração, manipulação, observação, conjetura, prova ou demonstração.

No que concerne à segunda questão atrás levantada, vários investigadores procuraram compreender o que distingue um bom desempenho na atividade de resolução de problemas de matemática, nas últimas décadas (Dreyfuss & Eisenberg, 1996; Goos, 2002; Lester, 1994; Schoenfeld, 1985, entre outros). É consensual que o conhecimento matemático está na base dessa capacidade para resolver problemas com sucesso. Todavia, os mesmos estudos revelam que, para esse bom desempenho, contribui ainda o ser-se capaz de utilizar fluentemente uma multiplicidade de representações ou representações mais formais, ou o ser-se capaz de utilizar algoritmos sofisticados. Os casos que descrevi e analisei mostram desempenhos de sucesso, em diferentes situações problemáticas, em que a utilização da tecnologia integrada com o conhecimento matemático é fundamental na matematização progressiva das soluções. Para além das soluções produzidas por Jéssica com o GeoGebra, cuja matematização é suscitada pela construção e manipulação

A tecnologia suporta a matematização progressiva das soluções, i.e., o desenvolvimento de um modelo de uma situação concreta num modelo para compreender a situação de um ponto de vista matemático.

de objetos geométricos e a observação das suas propriedades, esta questão está bem presente nas soluções de Beatriz cuja matematização se torna gradualmente mais formal mediante a passagem para um ambiente com recurso a tecnologias expressivas. De certa forma, e na mesma linha, as soluções produzidas por estes jovens indiciam a sua preocupação em "obter soluções 'elegantes' para os problemas", tal como Lester (1994, p. 665) já havia indicado ser uma característica de um bom desempenho. Neste estudo, cada jovem confere às suas soluções a sua própria visão de uma 'solução elegante', preferências essas que podem ser melhor compreendidas através da teia de relações que compõem os seus sistemas de atividade.

De acordo com Schoenfeld (1985, 1992, 2013), o sucesso na resolução de problemas depende em grande medida de um conjunto de fatores, de entre os quais se destaca o conhecimento matemático de um individuo (para além dos recursos matemáticos, essa lista inclui ainda o uso de heurísticas ou estratégias de resolução de problemas; estratégias metacognitivas, como estratégias de monitorização e autorregulação; e um sistema pessoal de crenças), sobre o qual o investigador refere: "relativamente [ao conhecimento matemático], muito pouco há a dizer; o conhecimento matemático de um indivíduo é claramente um importante determinante do seu sucesso ou fracasso" (Schoenfeld, 2013, p. 11). Também Carlon e Bloom (2005) apontam que o sucesso na resolução de problemas alcançado pelos matemáticos envolvidos no seu estudo dependeria de um "grande reservatório de conhecimentos bem-conectados, heurísticas e factos, bem como da capacidade de gerir as suas respostas emocionais" (p. 45). No entanto, o sucesso dos jovens-com-media na resolução de problemas de matemática do SUB14 aproxima-se mais da perceção enunciada por Resnick (1989, citado por Schoenfeld, 1992, p. 19), nomeadamente, de que "tornar-se um bom solucionador de problemas – tornar-se um bom pensador em qualquer domínio – pode bem ser tanto uma questão de aquisição de hábitos e disposições de interpretação e de atribuição de sentido como de aquisição de qualquer conjunto de skills, estratégias ou conhecimento". Inclusivamente, Schoenfeld (1992) ajuda o leitor na interpretação desta visão referindo que o desenvolvimento de um ponto de vista pessoal desta natureza (como o pensamento matemático) tem por base um processo de aculturação, muitas vezes em contextos

Os recursos tecnológicos e os recursos matemáticos são igualmente indispensáveis à atividade de resolução-e-expressão dos problemas de matemática com tecnologias.

escolares, que envolve a participação numa comunidade com uma determinada prática (pp.31-32). Isto sugere-me que o envolvimento, mais ou menos prolongado, na atividade de resolução de problemas com tecnologias que o campeonato SUB14 potencia, munido das mais diversas ferramentas tecnológicas, pode conduzir ao desenvolvimento de um tipo de pensamento matemático que é fortemente marcado pelas tecnologias que possam estar ao alcance destes jovens.

Os dados apresentados e discutidos neste estudo fazem emergir a tecnologia como um importante recurso para a resolução-e-expressão dos problemas de matemática, a par do conhecimento matemático indispensável ao desenvolvimento de um modelo conceptual da solução. Assim, a disponibilidade, a acessibilidade e a efetiva utilização de tecnologias (digitais) não só transforma a atividade de resolução de um problema numa atividade de resolução-e-expressão, como permite uma reconceptualização desse sujeito que resolve-e-exprime – passa a ser o jovem-com-media. Mais ainda, desloca a tónica da utilização de conhecimento matemático para o reconhecimento e utilização simultânea de recursos tecnológicos e matemáticos, potencialmente úteis. Ao tomar os recursos tecnológicos em pé de igualdade com os recursos matemáticos, torna-se necessário discutir de que forma estes conhecimentos são trazidos à atividade e, recorrendo à explicação de Schoenfeld, procurar compreender esta questão em termos das experiências de 'aculturação' que envolvem necessariamente as suas experiências escolares e as extraescolares, com as tecnologias à sua disposição.

9.4 A capacidade de resolver-e-exprimir problemas de matemática à luz da Fluência Tecno-matemática

9.4.1 Ainda o resolver-e-exprimir-com-tecnologias

Considerar que um problema de matemática só fica integralmente resolvido quando se consegue explicar essa solução, isto é, quando se é capaz de comunicar com eficácia a solução encontrada, tem sido uma tónica nesta discussão. Conforme argumentei, o uso espontâneo de ferramentas tecnológicas para abordar os problemas reconfigura a própria atividade de resolução de problemas de matemática e acentua a dificuldade em separar um momento explícito de resolução de um dado problema, de outro momento explícito de expressão da solução desse problema. A partir dos três casos empíricos, parece tão possível quanto oportuno descrever este vínculo para além da sua imediata constatação: *de que forma a capacidade de resolver problemas de matemática e exprimir as suas soluções pode ser entendida a partir da relação destes jovens com as tecnologias?*

Os casos empíricos retratam atividades de resolução de problemas com tecnologias com características muito distintas, não só em termos das ferramentas a que cada jovem recorre com mais frequência, mas pelo uso que lhes confere, isto é, pela utilidade que encontra nelas e pelo que consegue fazer com elas no âmbito da resolução-e-expressão dos problemas do SUB14. Aliás, constata-se que até o recurso a uma mesma ferramenta tecnológica pode servir diferentes propósitos: no caso de Marco, o GeoGebra é utilizado como uma ferramenta-de-visualização, enquanto no caso de Jéssica o mesmo programa é usado como uma ferramenta-de-geometria. Não se trata de Marco não possuir conhecimento suficiente da ferramenta para conferir robustez ou rigor às suas construções com o GeoGebra, mas apenas de tal não lhe ser necessário para desenvolver o seu modelo conceptual da solução. Ao invés, a robustez e o rigor das construções com o GeoGebra são imprescindíveis nos modelos conceptuais que Jéssica desenvolve pois é a partir deles que infere relações fundamentais para obter as soluções e justificá-las convenientemente. Na atividade de Beatriz, as tecnologias assumem especial relevo enquanto ferramentas-de-expressividade mas, ao usá-las dessa forma, a jovem repensa e reconstrói matematicamente as suas soluções. Está então aqui patente uma capacidade – a fluência tecno-matemática – que envolve o recurso eficiente a ferramentas tecnológicas para desenvolver pensamento matemático durante a atividade de resolução-e-expressão dos problemas do SUB14.

A utilização que é dada a cada ferramenta tecnológica para resolver-e-exprimir sustenta-se nas *affordances* que são reconhecidas nessa ferramenta e que são úteis à atividade, isto é, naquilo que cada jovem é capaz de fazer com a ferramenta e que lhe parece ser o mais útil e adequado para desenvolver um modelo conceptual da solução em construção. Esta perceção das *affordances* das tecnologias para desenvolver pensamento matemático parece assim ser uma chave para compreender o desempenho dos jovens nesta atividade de resolução de problemas e encontra-se, por sua vez, fundeada em duas âncoras: o conhecimento matemático e o conhecimento da tecnologia. Com efeito, os participantes obtêm soluções para os problemas colocados e são capazes de as exprimir, o que quer dizer que são fluentes no uso de uma linguagem que é simultaneamente tecnológica e matemática, embora com ‘dialetos’ diferentes.

Para além disso, a escolha de uma ou mais ferramentas tecnológicas para abordar determinado problema assenta não só nas *affordances* nelas identificadas mas também nas preferências individuais de cada jovem. Em primeiro lugar, estas preferências encontram explicação nos aspetos de natureza social atrás discutidos, nomeadamente, o que motiva a participação, a interpretação das regras de participação, o estabelecimento de colaboração entre membros da comunidade e a perceção dos seus papéis, que validam ou não determinados comportamentos. Igualmente importantes no moldar dessas opções são os aspetos de natureza cultural e histórica, como as experiências escolares anteriores onde determinadas ferramentas foram legitimadas para trabalho escolar (e.g., o GeoGebra, o PowerPoint), ou experiências familiares em que o acesso à tecnologia faz parte do dia-a-dia de algum membro da família e os jovens se vão apropriando de ferramentas e hábitos (e.g., o uso da folha de cálculo, o aprender a contornar as regras nos limites do consentido).

A conjugação destes aspetos – experiências com tecnologias e conhecimentos aprendidos pela via informal, e conhecimentos matemáticos e tecnológicos aprendidos pela via da instrução ou em contextos formais – fundamenta a simbiose existente entre cada um destes jovens e as ferramentas que preferem para desenvolver pensamento matemático no âmbito da sua atividade de resolução de problemas de matemática no Campeonato SUB14. A unidade jovem-com-media surge quando cada jovem identifica o(s) media adequado(s) à atividade que pretende desenvolver, e que lhe permita empregar a sua fluência tecno-matemática de forma eficiente para resolver-e-exprimir os problemas.

Assim, a fluência tecno-matemática destes jovens-com-media manifesta-se na atividade de resolver-e-exprimir os problemas do SUB14, isto é, durante a produção de soluções tecno-matemáticas e percebendo formas úteis de combinar conhecimentos sobre a tecnologia (cortar, colar, ampliar, colorir, construir, calcular) com conhecimentos matemáticos (conceitos, factos, fórmulas, procedimentos).

9.4.2 A Fluência Tecno-matemática de Jéssica

Os aspetos que caracterizam a fluência tecno-matemática (FTm) de Jéssica começam a perceber-se quando se traça um perfil do seu sistema de atividade. As suas facetas pessoais, como a versatilidade ou a responsabilidade; o motivo da sua atividade, isto é, os problemas e, sobretudo a matemática que envolvem; a sua interpretação das regras, como a valorização do GeoGebra ou a ênfase na linguagem matemática formal, indiciam um cuidado deliberado com o rigor e a completude das suas soluções tecno-matemáticas.

As soluções produzidas por Jéssica numa atividade mediada especialmente pelo GeoGebra mostram uma jovem em simbiose com esta ferramenta de geometria no sentido em que a usa como uma extensão do seu próprio pensamento para compreender a essência dos problemas, projetar um caminho para obter as soluções, formular conjeturas, tornar visível o trajeto percorrido e ensaiar uma prova matemática. Para além de conhecer uma diversidade de possibilidades de ação com o GeoGebra, Jéssica sabe em que ocasiões elas podem ser melhor rentabilizadas para desenvolver a sua abordagem matemática aos problemas do SUB14, o que quer dizer que a jovem não só possui conhecimento sobre a tecnologia como possui conhecimento sobre a matemática que consegue alcançar com aquela tecnologia e as formas pelas quais, conjugando estes dois tipos de conhecimento, consegue construir novos objetos de conhecimento tecno-matemático úteis para encontrar as soluções e justificá-las. Sublinho que este conhecimento tecno-matemático é parte desta entidade que é 'Jéssica-com-GeoGebra'.

A fluência tecno-matemática de Jéssica está patente ao longo dos processos de resolução-e-expressão-com-o-GeoGebra, espelhada na forma como procede à construção de figuras geométricas robustas e que espoletam o desenvolvimento de formas produtivas de pensar matematicamente sobre a solução, o que significa que a sua fluência assenta na sua capacidade de desenvolver pensamento geométrico por meio daquela ferramenta. A elevada fluência tecnológica com o GeoGebra conjuga-se com a sua capacidade de desenvolver pensamento geométrico e, combinadas, originam um pensamento tecno-matemático indispensável à matematização progressiva das situações problemáticas. Os modelos conceptuais desenvolvidos por Jéssica-com-GeoGebra afastam-se da visualização de casos particulares pelo que, ao suscitar a generalização, a explicação e a prova, revelam traços de uma matematização vertical.

A FTm de Jéssica assenta na sua capacidade de desenvolver pensamento geométrico durante a atividade de resolução-e-expressão-com-GeoGebra.

9.4.3 A Fluência Tecno-matemática de Marco

A capacidade de Marco para usar uma diversidade de ferramentas tecnológicas para resolver-e-exprimir os problemas do SUB14 também se começa a delinear a partir do seu sistema de atividade. Marco é um jovem curioso e irreverente, cuja participação é motivada, sobretudo, pela vertente tecnológica do campeonato. Na sua atividade recorre a várias tecnologias para desenvolver abordagens que estão assentes em métodos visuais. A comunidade em que se insere é também responsável pelo uso que faz de ferramentas tecnológicas convencionais e outras que não são habitualmente conotadas com a aprendizagem da matemática.

A fluência tecno-matemática de Marco revela-se ao longo dos vários processos de resolução-e-expressão com recurso a diversas ferramentas tecnológicas, sem que o jovem abandone o ecrã do computador ou recorra a outras ferramentas exteriores. Uma das ferramentas de eleição de Marco é a folha de cálculo, pelo que o jovem aparenta ser bastante fluente na sua utilização, embora recorra com frequência a outros programas, como o GeoGebra ou programas de edição de imagem, e combine estes *outputs* para obter as suas soluções tecno-matemáticas dos problemas. É através dessa conjugação entre objetos elaborados ou transformados, por vezes, por meio de ferramentas não convencionais, que Marco alcança níveis mais profundos de compreensão das noções matemáticas envolvidas nos problemas e as utiliza para desenvolver as suas abordagens.

Para além da folha de cálculo e dos programas de edição de imagem, o jovem também reconhece diversas possibilidades de ação com o GeoGebra, nomeadamente, a construção de objetos, e recorre à folha de cálculo embutida. A construção e a manipulação de figuras possibilitam uma materialização dos aspetos visualizados por Marco, pelo que a sua fluência tecno-matemática assenta no reconhecimento das *affordances* dessas ferramentas para ampliar a sua perceção visual dos conceitos envolvidos na resolução-e-expressão dos problemas. Marco conjuga, assim, conhecimentos matemáticos com conhecimentos de diversas ferramentas tecnológicas que concretizam e ampliam as suas capacidades de visualização de forma a obter figuras que veiculam um conhecimento tecno-matemático sobre a solução. Este conhecimento, assente na capacidade de visualização e de natureza tecno-matemática, é parte da entidade 'Marco-com-ferramentas-de-visualização'.

A FTm de Marco assenta na sua capacidade de desenvolver pensamento visual durante a atividade de resolução-e-expressão-com-ferramentas-de-visualização.

A elevada fluência tecnológica de Marco, que se revela na utilização de ferramentas de construção e edição de imagem, conjugada com as suas capacidades de visualização, possibilita-lhe obter figuras transformadas que resultam em novos objetos de conhecimento, argumentos visuais que usa para explicar as relações matemáticas identificadas. Esta atividade síncrona de matematização e expressão do pensamento visual, mediada pelas ferramentas de visualização, permite que Marco desenvolva modelos conceptuais elementares e bastante próximos do contexto nos quais prevalece uma matematização horizontal sustentada nos argumentos visuais construídos.

9.4.4 A Fluência Tecno-matemática de Beatriz

À semelhança dos casos anteriores, é da caracterização do sistema de atividade de Beatriz que começa a emergir a sua capacidade de fazer uso de ferramentas tecnológicas, em particular o PowerPoint, para resolver-e-exprimir as soluções dos problemas do SUB14. O facto de a sua atividade ser motivada pela resolução dos problemas mas também pelo reconhecimento público das suas soluções tecno-matemáticas, a sua irreverência associada a um elevado sentido estético, a ênfase que coloca no aspeto gráfico das suas produções e o cuidado com a apresentação do seu trabalho, ou a valorização do editor de apresentações para exprimir as soluções, são as facetas primordiais do seu sistema de atividade que ajudam a compreender a natureza da sua fluência tecno-matemática – muito centrada na expressividade.

Embora Beatriz recorra a diferentes tecnologias, é o editor de apresentações PowerPoint que adquire uma maior relevância na sua atividade, na medida em que é usado como uma ferramenta-para-exprimir pensamento matemático. A fluência tecno-matemática, isto é, a sua capacidade para utilizar em simultâneo conhecimentos matemáticos e conhecimentos sobre a tecnologia, está latente desde os primeiros processos de resolução de problemas: Beatriz pode começar a desenvolver as suas abordagens com papel e lápis, mas tem sempre presente que essa abordagem irá ser transformada com recurso ao PowerPoint na produção da solução tecno-matemática a submeter ao campeonato. Com efeito, o pensamento produzido por meio de papel e lápis acaba por ser ampliado e aprofundado quando Beatriz procura formas de o expressar com a ferramenta tecnológica digital, ou seja, encontra determinadas *affordances* no PowerPoint que lhe permitem continuar a desenvolver os seus modelos conceptuais das soluções, conferindo-lhes uma matematização mais sofisticada.

A diversidade de possibilidades de ação efetivamente empregadas no desenvolvimento de uma solução (e.g., a inserção e combinação de imagens, o uso da cor, de símbolos, conjuntos, mas também texto e cálculos simples) indica que a fluência tecno-matemática de Beatriz assenta numa forte componente relacionada com a expressividade de ideias matemáticas através do PowerPoint, o que envolve a atribuição de sentido matemático aos objetos digitais, assim como a comunicação adequada desse conhecimento tecno-matemático. Este conhecimento, assente nas capacidades de visualização e pensamento covariacional, é parte da entidade 'Beatriz-com-ferramentas-de-expressividade'.

A FTm de Beatriz assenta na sua capacidade de desenvolver pensamento visual e covariacional durante a atividade de resolução-e-expressão-com-ferramentas-de-expressividade.

O facto de os esquemas produzidos durante a atividade de resolução-e-expressão apresentarem características distintas em termos do nível de desenvolvimento dos modelos conceptuais que encerram, indiciam uma progressão gradual ao nível da matematização que Beatriz-com-papel-e-lápis e Beatriz-com-PowerPoint lhes conseguem imprimir. Para além de permitirem um aprofundamento da compreensão da situação e da solução de cada problema, as ferramentas digitais potenciam uma atividade que, ao afastar-se de modelos concretos, leva a um pensamento matemático assente nas relações, à tentativa de generalização, ao uso de linguagem simbólica, à procura de justificação ou prova matemática que valide os modelos.

9.4.5 A concluir

A fluência tecno-matemática para resolver-e-exprimir problemas do SUB14 é uma capacidade que envolve conhecimento da tecnologia e conhecimento matemático mobilizável com essa tecnologia, e ainda o ser-se capaz de encontrar formas produtivas de utilizar aqueles dois tipos de conhecimento, de forma concomitante, para criar novos objetos de conhecimento. Assim, esta fluência envolve a conjugação entre dois tipos de conhecimento que são necessários quando se resolve problemas de matemática com ferramentas tecnológicas.

O pensamento matemático desenvolvido em cada um dos casos analisados – geométrico, visual e covariacional – flui ao longo dos vários processos de resolução-e-expressão dos problemas, mas é moldado pelas tecnologias que são escolhidas e usadas nessas abordagens. As soluções tecno-matemáticas, autoexplicativas, revelam a fluência tecno-matemática de cada um dos jovens a partir dos seus dialetos tecno-matemáticos. Uma vez que um dos pilares desta fluência é o reconhecimento das possibilidades de ação com as ferramentas e que é impraticável separar essas *affordances* da tecnologia das capacidades do indivíduo, estes diferentes dialetos decorrem naturalmente das particularidades de cada um, dos seus sistemas de atividade, o que envolve ainda o seu conhecimento matemático, o conhecimento de diferentes ferramentas tecnológicas e de como utilizá-los para resolver-e-exprimir os problemas de forma eficiente (em Jacinto e Carreira, 2017, também me debruço sobre esta noção embora tenha por base um outro conjunto de dados empíricos recolhidos no âmbito do projeto Problem@Web).

Conforme referi, esta fluência emerge ao longo da atividade de resolução de problemas, de forma implícita a cada processo do modelo RPMT. Embora possa assumir um papel menos percetível em determinados processos, como que num estado latente, são as preferências dos participantes que auxiliam a escolha desta ou daquela ferramenta, ou os usos que lhes dão, que denunciam essa sua fluência tecno-matemática. Portanto, esta fluência pode manifestar-se tanto na utilização oportuna de uma multiplicidade de ferramentas tecnológicas e sua conjugação para resolver-e-exprimir os problemas (isto é, na identificação de possibilidades de ação indispensáveis com cada ferramenta, mas muito específicas), como na utilização de uma única ferramenta embora envolva um conhecimento aprofundado das suas *affordances*.

A fluência tecno-matemática envolve conhecimento da tecnologia, conhecimento matemático mobilizável com essa tecnologia e formas produtivas de os conjugar para produzir novos objetos de conhecimento.

As ferramentas tecnológicas convencionais para trabalhar aspetos matemáticos estão impregnadas de conhecimento matemático que, à partida, estará acessível ao utilizador através da sua utilização (Mariotti, 2000, p. 37). É, pois, mediante o seu uso efetivo, frequente e consciente que se amplia o universo de possibilidades de ação com essas ferramentas matemáticas e se desenvolve *fluência* (Kuuti, 1996; Nardi, 1996). Uma hipotética consequência é a transferência, para outros contextos, desse conhecimento matemático que pode gerar-se mediante uma dada tecnologia, nomeadamente, para um contexto de resolução de problemas (tal como também argumentou Barrera-Mora, 2013). Todavia, este estudo mostra ainda que, para além da fluência no uso de ferramentas convencionais para resolver-e-exprimir problemas de matemática, é também possível desenvolver fluência no uso de outras ferramentas, menos habituais ou menos presentes em ambientes que envolvam matemática, e que essa fluência é igualmente indispensável para resolver-e-exprimir problemas de matemática. Na verdade, essas ferramentas computacionais também permitem e estimulam o desenvolvimento de pensamento matemático, embora este se possa revestir de atributos empíricos ou com cariz mais visual.

O facto de estes jovens-com-media mostrarem ser capazes de desenvolver abordagens tecno-matemáticas poderosas, alguns deles criando verdadeiros modelos matemáticos das situações em causa, mas outros obtendo as soluções dos problemas com base numa atividade de construção, da manipulação ou da interatividade com a tecnologia, sugere que o 'saber coisas' (factos ou procedimentos matemáticos, que ferramentas usar num determinado ambiente digital) é tão indispensável quanto o 'saber fazer coisas' com esses conhecimentos, isto é, perceber formas úteis de os utilizar em simultâneo ou de forma combinada para desenvolver o pensamento matemático necessário à resolução-e-expressão dos problemas.

Parece-me oportuno sublinhar a complementaridade entre este estudo e os trabalhos de investigação que realizei no âmbito do Projeto Problem@Web e que estão em sintonia com os resultados obtidos nestes três casos, particularmente, no que se refere à compreensão da fluência tecno-matemática enquanto capacidade que brota da relação que os jovens desenvolvem e mantêm com as ferramentas tecnológicas da sua preferência. Efetivamente, os casos de Jéssica, Marco e Beatriz mostram que estes jovens têm uma propensão para recorrer a um determinado tipo de ferramenta tecnológica para abordar os problemas do SUB14 e isso acontece, grosso modo, porque a conhecem, conseguem aceder-lhe, entendem para que serve, e sabem utilizá-la e tirar partido dela para concretizar abordagens aos problemas. Um exemplo é o caso de Marco: o jovem demonstra uma propensão para a utilização da folha de cálculo, ferramenta que aprendeu a usar com o pai e sabe que é encarada como uma ferramenta matemática, por isso utiliza a folha de cálculo com muita frequência – mesmo quando não precisa de efetuar cálculos ou até quando esta ferramenta é disponibilizada por outros programas, como o GeoGebra. Para além disso, a preferência por uma ferramenta não convencional não impede o desenvolvimento do pensamento matemático, nem a sua sofisticação, o que fica patente nos casos de Marco e de Beatriz que, ao recorrerem a ferramentas não convencionais, também revelam a sua fluência tecno-matemática para resolver-e-exprimir os problemas.

Num dos estudos que desenvolvi no âmbito do Problem@Web (Jacinto & Carreira, 2013), analisei quatro abordagens a um mesmo problema de geometria do SUB14 produzidas com uma mesma ferramenta tecnológica, o GeoGebra, tendo observado que os modelos conceptuais que tinham sido desenvolvidos nas soluções tecno-matemáticas eram qualitativamente diferentes. Em Carreira, Jones, Amado, Jacinto e Nobre (2016) essas diferenças são explicadas em termos das *affordances* que cada jovem percecionava e era efetivamente capaz de pôr em ação com o GeoGebra para desenvolver pensamento geométrico útil à resolução-e-expressão do problema. Mais recentemente, em Jacinto e Carreira (2017), de novo com foco no uso do GeoGebra para abordar um mesmo problema, agora do campeonato SUB12, reportei três casos de jovens-com-media que geraram diferentes modelos conceptuais da solução desse problema, o que me permitiu caracterizar a sua fluência tecno-matemática em termos da conjugação dos seus conhecimentos matemáticos e tecnológicos para matematizar a situação.

Tanto os casos aqui descritos, como os resultados destes estudos-satélite, mostram que as ferramentas tecnológicas que são trazidas à atividade de resolução-e-expressão dos problemas, e, portanto, incorporadas na unidade 'jovem-com-media', estão fortemente relacionadas com as características de cada indivíduo e as do seu sistema de atividade. Na verdade, esta noção de fluência tecno-matemática ajuda a compreender a natureza dessa entidade, na medida em que um jovem com uma certa tecnologia à disposição, digamos uma folha de cálculo, só se torna um jovem-com-folha-de-cálculo a resolver um dado problema matemático se possuir os conhecimentos adequados sobre esse programa para, com ele e através dele, desenvolver pensamento matemático. Possuir este conjunto de 'conhecimentos adequados' implica experiências anteriores mediadas pela tecnologia que levaram o jovem a processos de apropriação (Leont'ev, 1978) do conhecimento impregnado, isto é, como funciona ou as suas possibilidades de ação.

Quero com isto sugerir que existe uma intencionalidade na génese da unidade 'humano-com-media', isto é, a preferência que pode ser observada assenta na perceção de utilidade matemática na ferramenta tecnológica para abordar uma situação problemática: o indivíduo vê na ferramenta o que a ferramenta pode fazer pelo indivíduo para resolver-e-exprimir o problema. Esta unidade torna-se então *mais hábil* do que o indivíduo sem a ferramenta, aliás, estes casos mostram que a incorporação intencional de uma tecnologia na atividade de resolução de problemas de um indivíduo torna esta unidade, jovem-com-media, *fluente*. O conhecimento sobre a ferramenta e as formas de a utilizar convenientemente são incorporados pela entidade que passa a desenvolver um tipo de pensamento que tem traços matemáticos e tecnológicos – um pensar-matematicamente-com-a-ferramenta. Uma elevada fluência tecno-matemática indica que a relação de simbiose identificada – entre o indivíduo e a ferramenta que escolhe usar na sua atividade – torna desnecessária a separação existente no vértice superior do sistema de atividade: a tecnologia que faz a mediação é 'absorvida' pela entidade que age, pelo que o 'sujeito' da atividade é o jovem-com-media. Desta forma, é possível conjeturar que a fluência tecno-matemática é indispensável à capacidade de resolver e exprimir problemas de matemática com tecnologias.

Na secção anterior teci algumas considerações sobre a necessidade de esta discussão incluir, para além dos recursos matemáticos, os recursos tecnológicos de forma a reconhecê-los como igualmente indispensáveis a esta atividade de resolução-e-expressão de problemas. Em continuidade com a conceptualização desta atividade aqui presente, o conhecimento matemático individual, de que Schoenfeld (1985, 1992, 2013), Carlson e Bloom (2005) falavam, envolve também o conhecimento sobre as ferramentas tecnológicas com *affordances* matemáticas, as que possibilitam desenvolver pensamento matemático independentemente de serem habitualmente conotadas como ferramentas matemáticas ou não. Na realidade, e como ficou patente nas soluções de Jéssica, saber que o GeoGebra é a 'ferramenta tecnológica' adequada para resolver um determinado problema não significa que se saiba, de antemão, qual a 'ferramenta matemática' que se vai usar nesse processo. Logo, parece ser a adequação entre conhecimentos sobre estes dois tipos de recurso que determina o sucesso na atividade: o conhecimento tecno-matemático do indivíduo, aquilo que é capaz de resolver com a matemática e a tecnologia que conhece e tem ao seu dispor. No caso de Marco, a tecnologia facultou o acesso a noções sobre semelhança de triângulos, embora apenas tivesse uma ideia inicialmente vaga sobre elas. Ao utilizar uma combinação entre várias ferramentas tecnológicas e o conhecimento matemático (que, à partida, pode ser insuficiente para obter solução), o pensamento matemático desenvolve-se e amplia-se: a tecnologia transforma essas ideias matemáticas de forma a serem usáveis e aplicáveis às situações em causa.

9.5 Um balanço final

9.5.1 O estudo nos limites que o cingem

Encetar uma reflexão final sobre o trabalho planeado, o desenvolvido, os resultados obtidos e as aprendizagens que este envolvimento me proporcionou, leva-me também a identificar alguns aspetos que delimitam o estudo e que merecem algumas considerações. Estes aspetos são, essencialmente, de ordem metodológica.

A seleção dos casos deste estudo teve por base a necessidade de investigar a atividade de jovens participantes no SUB14 que utilizassem tecnologias digitais para resolver os problemas de matemática – necessidade esta que decorre naturalmente do problema em estudo e das questões de investigação. Ao longo de cada edição do campeonato, centenas de jovens participantes envolvem-se em atividades com essas características. Todavia, a identificação de um conjunto de jovens cuja participação pudesse fornecer uma quantidade de dados comportável no horizonte temporal estabelecido para a realização deste trabalho, levou-me a considerar a seleção de um número de casos bastante reduzido que, de modo algum pretende esgotar a diversidade de atividades de participação no SUB14 ou de fluências tecno-matemáticas dos seus participantes. Um outro aspeto diz respeito às soluções que selecionei para ilustrar e analisar as atividades de resolução de problemas com tecnologias de cada um destes três casos. Com efeito, os três jovens participaram em duas ou mais edições dos campeonatos, pelo que resolveram muitos mais problemas do que aqueles que foram trazidos a este relatório. Estou em crer que uma outra seleção de casos levaria a resultados relativamente semelhantes no sentido em que iria continuar a ser possível caracterizar os sistemas de atividade desses casos, a descrever os seus processos de resolução de problemas por meio do modelo RPMT, a identificar os aspetos das suas fluências tecno-matemáticas e a justificá-las a partir da relação que esses jovens manteriam com as tecnologias da sua preferência.

Para além disso, estes jovens estudantes foram selecionados intencionalmente e aderiram à participação neste estudo de forma voluntária e com autorização dos seus encarregados de educação. Assim, é também de considerar que a sua motivação para resolver estes problemas de matemática com tecnologias possa ser superior à de um qualquer aluno indeterminado. Da mesma forma, e apesar do apelo constante para seguirem os seus procedimentos habituais, enquanto participantes no SUB14, durante o momento de observação direta da atividade de resolução de problemas, essa motivação pode ter influenciado o empenho e o desempenho de cada jovem. E, pelo contrário, a presença da investigadora e o aparato de investigação (e.g., sistema de áudio e vídeo) também podem ter constituído um inibidor de comportamentos destes jovens.

Uma outra questão que se coloca é a de que nem sempre o vídeo, a gravação de ecrãs e o registo áudio conseguem captar todos os pequenos avanços e recuos do pensamento desenvolvido, como foi possível verificar no caso de Beatriz. Este episódio sugere que pode haver caminhos explorados pelos jovens durante a sua atividade mas que não foram considerados relevantes e, portanto, não foram reportados nas soluções produzidas. Apesar de as resoluções submetidas ao SUB14 terem sido perscrutadas com entrevistas em profundidade e de no caso dos ficheiros GeoGebra ser possível aceder ao protocolo de construção, a análise destas evidências baseou-se na minha interpretação e nas inferências que fiz. É um facto que a participação no SUB14 e as soluções tecno-matemáticas produzidas pelos jovens foram o embrião desta investigação. Contudo, e apesar de todos os constrangimentos em termos do acesso aos dados, uma investigação futura que se debruce sobre a 'atividade de resolução de problemas com tecnologias' deve abarcar mais casos que, na sua génese, contenham a observação direta dessa atividade.

Por fim, gostaria de voltar a aludir ao longo e árduo processo de construção do modelo de resolução de problemas de matemática com tecnologias, bem como à sua utilização para codificar os dados recolhidos. Apesar de o modelo ter sido alvo de reformulações informadas a partir da sua implementação, alguns processos continuam a aparentar fronteiras ténues. No decurso do trabalho, e consciente desta dificuldade, procurei contorná-la com um adensar dos descritores de cada processo que o modelo envolve, tal como incluí nas secções conclusivas. No entanto, para além de esta questão ter sido amplamente discutida ao longo do estudo e de a versão refinada do modelo ter sido submetido ao escrutínio de diversos especialistas no campo da Educação Matemática (em particular, os painéis de revisores do *International Journal of Science and Mathematics Education*, do ICME, do CERME e do PME), considero que uma codificação independente dos dados poderia trazer vantagens à investigação, por exemplo, procurando rever terminologias como forma de auxiliar no estabelecimento de fronteiras mais claras entre os vários processos.

A identificação destes limites foi tendo lugar à medida que o estudo foi sendo desenvolvido. De certa forma, estas são as dificuldades remanescentes e para as quais não foi possível encontrar formas de contornar no contexto e no decurso desta investigação. Não obstante, penso que os resultados alcançados contribuem para uma melhor compreensão das questões subjacentes à 'atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias', que constituíram as questões de investigação formuladas.

9.5.2 O estudo nos terrenos que o estendem

Agora que me permito um distanciamento maior sobre as preocupações inerentes à condução de uma investigação desta envergadura, procuro refletir sobre os contributos deste trabalho e de possíveis ilações para a minha prática enquanto docente de matemática, que desenvolveu um olhar mais compreensivo sobre o complexo papel das tecnologias digitais na resolução de problemas de matemática.

Desta reflexão decorre, naturalmente, uma tentativa de elencar os contributos desta investigação. A encabeçar surge, desde logo, o fomentar de uma discussão em torno de dois temas de grande atualidade, vitalidade e relevância na aprendizagem do século XXI – a resolução de problemas e a utilização de tecnologias digitais – a que acresce o facto de se revestirem de grande atualidade, vitalidade e relevância à vida para além da sala de aula, num mundo tecnológico constantemente permeado por grandes desafios, uma era onde a matemática tende a estar cada vez mais camuflada mas é, absolutamente, indispensável. Em meu entender, esta é uma discussão que tem que ser ampliada e reverberada para a sociedade – para os professores e os seus representantes, os decisores políticos, as famílias e os alunos, e os demais parceiros educativos – na medida em que os documentos curriculares que regulam o ensino e a aprendizagem devem conter na sua génese a premissa de que *aprender-matemática-com-tecnologia é um direito para todos os cidadãos do século XXI*, precisamente porque o que caracteriza este mundo é o facto de estar impregnado de matemática e tecnologia (e problemas).

Esta investigação mostra também que a atividade de resolução de problemas com tecnologias no âmbito do campeonato SUB14 é moldada por uma teia de relações entre diversos atores – os jovens, os pais, os amigos e/ou colegas, e os professores – bem como os papéis que desempenham nessa 'comunidade'. Como docente, constato que a aproximação entre as escolas e as famílias constitui um problema já bastante debatido, mas apesar de inúmeras tentativas e projetos que vão surgindo nas escolas, continua a não estar resolvido. Uma possibilidade de aproximação talvez passe pela criação de uma comunidade que permita um elo de ligação entre os vários elementos em torno de um motivo mais focado nas aprendizagens formais, mas onde os intervenientes sejam chamados a desempenhar papéis explícitos. A resolução de problemas de matemática, com ou mesmo sem tecnologias, pode ser um veículo para essa ligação entre a escola (a aprendizagem da matemática) e a família. A título de exemplo, a minha colaboração em edições anteriores do SUB14 motivou a criação de um Caderno da Turma com Problemas de Matemática, com base em problemas adaptados dos publicados no SUB14. Cada aluno era chamado a resolver um problema específico do Caderno com o apoio dos familiares, em casa. Um apelo idêntico ao do SUB14 solicitava a apresentação do raciocínio numa linguagem clara e contendo todas as justificações necessárias, bem como o registo de quem colaborou nessa resolução. Ao devolver o Caderno, cada resolução era classificada e, no caso de não estar correta ou estar incompleta, registava um feedback apropriado que ajudasse o aluno e os demais intervenientes a encontrar a solução. Assim que a resolução fosse correta, um novo problema era colocado no Caderno, mas ajustado às capacidades do aluno que se lhe seguisse. Diversos daqueles problemas foram trabalhados em sala de aula, dado que era possível utilizá-los para abordar determinados conteúdos no âmbito do PMEB (2007). Os alunos que não conseguiram qualquer apoio em casa eram apoiados na escola por um professor de Ciências Naturais que aderiu com satisfação ao desafio.

Um outro aspeto que caracteriza a resolução de problemas de matemática no SUB14, e a distingue da que pode ocorrer na sala de aula, é o facto de os problemas poderem ser resolvidos ao longo de um período de tempo considerável. Por oposição, quando um problema é proposto na aula, tanto o tempo disponível, como as ferramentas e as estratégias permitidas são bastante limitados. Com efeito, nos casos apresentados neste relatório é bastante notório que os jovens consultam o problema num determinado momento, mas acabam por demorar algum tempo a matutar nas condições ou nas maneiras de as abordar, ou até na forma de criar a solução. Para além de poderem trocar impressões com os outros membros da comunidade, conforme referi acima, podem abordar os problemas pelas formas que forem da sua preferência e têm um conjunto muito diversificado de ferramentas tecnológicas à sua disposição. Este é um dos factos que me continua a perturbar enquanto docente: estes jovens, trazendo toda a sua fluência digital, entram nas nossas escolas com pequenos computadores nos bolsos, ligados constantemente à Internet, mas em certa medida estão obrigados (sobretudo, pelas orientações curriculares) a ignorar as *affordances* dos seus dispositivos móveis para aprender matemática e, em particular, para resolver problemas de matemática. A 'modernização', a 'inovação', a 'transformação' dos espaços escolares e das aprendizagens (conforme a *nuance* política) passa, necessariamente, por uma consciencialização e reconhecimento explícito de que estes jovens trazem conhecimentos, saberes e modos de agir aprendidos a partir de experiências de aprendizagem informais ou exteriores à sala de aula, de que o SUB14 é exemplo. "A cultura escolar necessita de uma reorientação gradual das suas práticas para obter acesso aos novos hábitos da mente e aos novos ambientes que resultam de uma forte presença de tecnologias digitais" (Moreno-Armella & Santos-Trigo, 2013, p. 4). Um dos maiores desafios na educação matemática é, pois, conseguir tirar partido desses conhecimentos nas aulas (Bryant, 2009, citado por Watson, Jones & Pratt, 2013). Não pode o professor do século XXI fazer tábua rasa desses conhecimentos mas deve, ao invés, poli-los e colocá-los ao serviço de aprendizagens integradas, ao caso, do desenvolvimento de um conhecimento tecno-matemático.

Deste estudo também concluo que, quando os recursos tecnológicos são permitidos, estão disponíveis e acessíveis, a tecnologia permeia todos os processos de resolução de problemas de matemática. Embora possa ter menos visibilidade num dado momento, a tecnologia é trazida à ação nos vários processos e com uma utilidade específica, que vai muito para além da representação das condições do problema, no início da atividade, ou da apresentação da solução, numa etapa final. A tecnologia assume papéis preponderantes na construção de um modelo conceptual da solução de cada problema: desde o permitir uma compreensão flexível da situação problemática, à construção e manipulação de objetos matemáticos numa atividade exploratória que antecede a formulação de conjeturas, à procura de uma justificação ou prova matemática. Assim, e tal como a preconização que tem sido dada à tecnologia para desenvolver tarefas de exploração ou de investigação em diversas orientações curriculares que têm em conta a aprendizagem da matemática no século XXI, as tecnologias digitais também devem ser incorporadas nas atividades de resolução de problemas de matemática em sala de aula, quer como um fim em si mesmo, quer como atividade que visa o desenvolvimento conceptual. Enquanto professora, não posso deixar de frisar o elevado potencial da utilização de ferramentas tecnológicas na resolução de problemas de matemática em sala de aula nestas duas vertentes: envolver os alunos nesta atividade é proporcionar-lhes a oportunidade para desenvolver a sua fluência tecno-matemática – possuir conhecimentos matemáticos, conhecimentos tecnológicos e perceber formas úteis de combiná-los para alcançar um propósito matemático; a atividade gera soluções que se podem constituir como veículo para desencadear discussões matemáticas produtivas, com vista a uma matematização progressiva de um determinado conceito em foco.

Para além disso, a proposta que aqui elaborei em torno da noção de fluência tecno-matemática pode ser articulada com a resolução de problemas em sala de aula com recurso a tecnologias digitais e, de uma forma mais abrangente, com a aprendizagem da matemática num ambiente digital. Resultados provenientes de um corpo compreensivo de investigação, ao longo nas últimas décadas, indicam que o uso de tecnologias digitais na aprendizagem da matemática reconfigura o pensamento matemático no sentido em que favorece abordagens experimentais e exploratórias, promove o sentido crítico e capacidades de investigação, permite uma variedade de abordagens e estratégias, desencadeia a geração de conjeturas ou auxilia na demonstração ou prova matemática. Ora, a tecnologia desempenha igualmente um papel decisivo na atividade de resolução de problemas dos estudantes pelo que esta capacidade para combinar de forma eficaz dois tipos de conhecimento – o matemático e o tecnológico – tem que encontrar um lugar na sala de aula de matemática, na medida em que estes conhecimentos são essenciais ao desenvolvimento de novas formas de conhecer, compreender e comunicar pensamento matemático. Desenvolver a fluência tecno-matemática em sala de aula significa aprender a explorar as *affordances* de diferentes tecnologias, matemáticas ou não convencionais, o que pode ser conseguido a partir da utilização dessas ferramentas para resolver problemas não rotineiros, de forma intencional. Isto quer dizer que as aprendizagens matemáticas devem ser desenvolvidas tendo por base a integração destes dois tipos de conhecimento na atividade dos alunos – o que pode implicar ter em consideração a fluência tecno-matemática de forma explícita na planificação das aulas, nas tarefas propostas e, necessariamente, na avaliação das aprendizagens. Estudos recentes apontam num sentido idêntico, no de proporcionar oportunidades aos jovens de conjugar conhecimentos matemáticos e tecnológicos em sala de aula, vindo reforçar esta ideia de integração das tecnologias, quer na perspetiva da aprendizagem e dos alunos (e.g., Bray & Tangney, 2016[32]), quer na

[32] Decorrente da tese de doutoramento da primeira autora, Bray e Tangney (2016) desenvolveram um conjunto de heurísticas alinhadas com os pressupostos da corrente da Educação Matemática Realista e do modelo de aprendizagem para o século XXI denominado Bridge21, de forma a criar atividades matemáticas

perspetiva do ensino e do desenvolvimento profissional dos professores, nomeadamente, em iniciativas de formação contínua (e.g., Oliveira, 2015[33]).

Um pouco por todo o mundo, diversas reformas curriculares têm deslocado a tónica do ensino e aprendizagem de conceitos para o desenvolvimento de capacidades que se prefiguram como prioridades para o século XXI. A OCDE (2016), por exemplo, está mesmo a designá-las por "competências globais para um mundo inclusivo". A par da OCDE (2013, 2016), outras entidades internacionais têm mantido um discurso idêntico – como o projeto *Partnership for 21st Century Learning*[34], ou o *The Learning Curve*, da editora Pearson[35] – em que, para além da resolução de problemas ou a literacia digital, consideram indispensáveis capacidades como a colaboração e a comunicação. Sendo a *comunicação* uma capacidade central na aprendizagem da matemática (ME, 2007), a noção que traduz a simultaneidade entre a matematização e a expressão de pensamento matemático, ou de outra forma, entre o resolver um problema e comunicar a sua solução – o *resolver-e-exprimir-com-tecnologias* – pode ser também transportada para a sala de aula no sentido em que encontrar formas adequadas e convincentes de apresentar e justificar conjeturas, descobertas, conclusões constituem traços de uma elevada capacidade de resolução de problemas (Lesh, 1981) que ganha uma nova dimensão quando essas atividades podem ser mediadas por tecnologias digitais. Os casos aqui reportados ilustram formas de tirar partido da expressividade, do poder representacional, da interatividade e manipulação, do poder de justificação que estes jovens conseguem extrair das tecnologias que melhor conhecem na sua atividade de resolução de problemas.

Numa outra perspetiva, embora interligada com implicações no ensino e na aprendizagem da matemática, este trabalho também traz acréscimos ao campo da investigação em Educação Matemática. Apesar de existirem modelos teóricos robustos que permitem descrever os processos de resolução de problemas de matemática, ou os

com recurso às tecnologias móveis do quotidiano que promovessem um maior envolvimento dos alunos nas aprendizagens e aumentasse a sua confiança perante a disciplina.

[33] Num estudo desenvolvido no âmbito de um projeto de formação de professores com foco no uso de tecnologias convencionais para a aprendizagem da matemática, Gerson Oliveira (2015) observou que, à medida que os professores desenvolviam a sua fluência tecnológica com o GeoGebra e o SuperLogo, aumentava o seu desempenho na resolução das tarefas. Para além disso, o investigador concluiu que essa fluência resultou na produção de um tipo de pensamento que passou a incorporar a matemática relativa aos problemas e as tecnologias usadas.

[34] http://www.p21.org/

[35] http://thelearningcurve.pearson.com/2014-report-summary/

processos envolvidos no uso de ferramentas tecnológicas na resolução de tarefas comuns, o modelo RPMT foi sintetizado para servir como uma ferramenta para descrever os processos de resolução de problemas com tecnologias, fazendo emergir a combinação entre conhecimentos matemáticos e das tecnologias ao longo de todos os processos que o compõem. Baseado num quadro conceptual mais abrangente, este modelo permite alcançar níveis de descrição desta atividade em que o papel das tecnologias na resolução de problemas de matemática se torna visível, mesmo quando essas ferramentas aparentam estar despojadas de *affordances* matemáticas. Atualmente, a atividade de resolução de problemas no mundo real está fortemente impregnada de tecnologias digitais, o que requer uma estrutura conceptual bastante abrangente, capaz de suportar as especificidades das tecnologias digitais em termos das suas *affordances* para desenvolver o pensamento matemático necessário para alcançar soluções elegantes e a sua eficaz comunicação.

9.5.3 Desafios para o futuro

Esta reflexão não estaria completa sem um exercício de projetar um 'depois', os passos que se podem seguir. Alguns destes desafios para o futuro foram assomando ao longo da investigação, outros ganharam expressão a partir de discussões de segmentos deste trabalho, por exemplo em conferências. Passarei a resumir um conjunto de questões, umas de continuidade, outras novas, que emergem dos resultados deste estudo.

Uma extensão óbvia desta investigação passaria por dar continuidade ao processo de análise de dados recolhidos a partir de novos casos, quer com semelhanças aos que aqui reportei, quer outros ainda mais contrastantes. Tendo por base os mesmos pressupostos teóricos, esses casos poderiam vir a ampliar a diversidade aqui apresentada em termos da caracterização dos seus sistemas de atividade, dos seus processos de resolução de problemas com tecnologias e das suas fluências tecno-matemáticas.

O modelo de resolução de problemas de matemática com tecnologias foi sintetizado de forma a permitir descrever a atividade que decorre num contexto muito particular: uma competição matemática baseada na Internet e na comunicação a distância assíncrona. Todavia, os pressupostos teóricos que subsistiram à sua génese (onde se incluem considerações teóricas sobre o ensino e a aprendizagem da matemática escolar, em particular, da resolução de problemas ou do papel da tecnologia) e o seu grau de generalidade motivam averiguar se este modelo também permitirá captar outras atividades de resolução de problemas com tecnologias, por exemplo, em contexto de sala de aula. Caso tal seja viável, surgem outras questões: existirão processos em que o papel da tecnologia se torna mais relevante? Nessa atividade também será possível identificar microciclos de processos? Estarão esses microciclos centrados nos mesmos processos que reportei nesta atividade extraescolar ou noutros, e em quais?

Num estudo anterior, com base no mesmo campo empírico, observei que os participantes identificavam grandes diferenças entre a resolução de problemas de matemática que lhes era proposta nas suas salas de aula e aquela que eram convidados a experimentar no âmbito do SUB14 (Jacinto, 2008; Jacinto & Carreira, 2012). Esta investigação debruça-se explicitamente sobre a atividade de resolução de problemas com tecnologias para além da sala de aula. Uma possível extensão poderia passar pelo estudo dos sistemas de atividade de jovens a resolver problemas de matemática com tecnologias na sala de aula e no âmbito de uma iniciativa semelhante ao SUB14. Como se caracterizam e o que distingue esses sistemas de atividade? Como se relacionam e o que constitui objetos de fronteira entre esses sistemas de atividade?

Relativamente à noção de fluência tecno-matemática, e embora seja possível defini-la em traços gerais não dependentes da matemática concreta nem da tecnologia específica em utilização, esta capacidade emergiu com 'tonalidades' bastante diferentes em cada um destes três casos. Considero, pois, que um estudo futuro podia lançar-se na compreensão do que caracteriza a fluência tecno-matemática com uma determinada tecnologia. O que caracteriza a fluência tecno-matemática com o Paint (ou com o PowerPoint ou com o Excel) para resolver problemas de matemática? O que distingue a fluência tecno-matemática com o GeoGebra da fluência tecno-matemática com o Paint para resolver um dado problema de matemática?

A fechar este relatório, gostaria ainda de registar um 'desafio para o futuro' que passei a sentir como muito pessoal, apesar de se prender tacitamente com o desenvolvimento desta investigação. Este ciclo de aprendizagens gratificantes que me trouxe até à conclusão desta investigação também foi extenuante. E agora, findo o trabalho, de que forma me transformam estas aprendizagens? É certo que comungava já de muitas das premissas que constam desta investigação e que isso se deve às inúmeras experiências profissionais que tive oportunidade de trilhar – como docente em escolas de várias regiões do país, em ações de formação (enquanto formanda e formadora), em projetos locais, regionais ou nacionais de formação (Escol@Interativa, Projeto CEM, PMII e NPMEB), no mestrado em Informática Educacional, no curso de formação avançada que antecedeu esta investigação. Todavia, o desenvolvimento desta investigação trouxe-me um novo entendimento sobre o ensino e a aprendizagem da matemática escolar – que atualmente considero um sistema que permanece fechado sobre si próprio e os seus produtos, com precedências impeditivas de qualquer recuperação, que conduz a uma culpabilização unilateral pelo insucesso e, em última instância, à segregação de jovens. Esta visão renovada, dizia, surge ao aperceber-me através do SUB14 que – não obstante – há tantos jovens que optam por passar parte dos seus tempos livres a pensar e a fazer 'outra matemática', a resolver 'outros problemas', a usar 'outras ferramentas', e fazem-no de forma tão perspicaz, habilidosa, criativa, que qualquer professor gostaria de os ter nas suas salas de aula. Mas será que não os temos já sentados à nossa frente diariamente?

Há muito que a tecnologia deixou de ser vista como meio motivacional na aprendizagem da matemática. Embora há menos tempo, o papel da tecnologia também deixou de ser o de mero facilitador de cálculo ou de auxiliador de representações rigorosas, e é vista pela comunidade de educadores matemáticos como fundamental na aprendizagem de vários tópicos, sobretudo no que ao desenvolvimento conceptual diz respeito. Mas este estudo mostra-me que, para além de tudo isso (a tecnologia motiva, a tecnologia substitui, a tecnologia amplifica), a utilização de tecnologias digitais é também um importante veículo de exploração do pensamento matemático individual, da criatividade e da expressividade dessas capacidades. Aspetos que esta escola e este currículo não acolhem e, não os reconhecendo, não os robustecem.

Uma faceta deste 'desafio para o futuro', mais pessoal, passa pois por alterar as minhas práticas enquanto docente, com o intuito de acolher e reconhecer os diferentes jovens-com-media que entram na sala de aula, procurando que desenvolvam a sua fluência tecno-matemática não só para resolver problemas de matemática ou aprender novos conceitos, mas também para melhor se relacionarem com o mundo que nos rodeia e melhor compreender os aspetos matemáticos nele incrustados.

A outra face deste desafio, que me parece complementar a anterior, resume-se na observação de que "todos os professores fazem pesquisa na sala de aula" (Serrazina & Oliveira, 2002, p. 285). Efetivamente, ao longo dos anos e com o acumular de experiências, fui desenvolvendo um hábito de refletir sobre a minha prática com o propósito de a melhorar. Contudo, vejo agora, essa atitude baseava-se num questionamento *naïf*. E é aqui que constato que esta experiência investigativa me proporcionou aprendizagens que vão além dos resultados do estudo e além do conhecimento teórico aqui resumido. Agora reconheço a existência de uma diversidade de ferramentas metodológicas e conceptuais que possibilitam abordar um determinado problema que carece de explicação, quer a nível de escola, quer a nível da minha própria prática. Melhor dizendo, essas ferramentas podem ajudar a abandonar aquele questionamento *naïf* e encetar uma pesquisa séria e com rigor científico. Este é um movimento que sinto que me *empodera* enquanto docente.

No campo da Educação Matemática, há muito que não se perspetiva um professor como um mero aplicador de um currículo prescrito. E, precisamente porque este período em que vivemos é marcado por rápidas mudanças políticas e económicas, acompanhadas também por grandes tensões políticas, económicas e sociais, os professores enfrentam uma série de desafios como nunca, dos quais destaco apenas dois: i) os professores contribuem para a construção e o desenvolvimento dos projetos educativos das suas escolas, que brotam da comunidade em que se inserem e para ela devem estar virados, *mas estas escolas não podem ficar mal vistas* nos rankings, que se alimentam dos resultados da avaliação externa; ii) os professores pautam os processos de ensino e aprendizagem por programas e metas curriculares que impõem formalismos desproporcionados e a vã memorização de definições, *mas o país não pode ficar mal visto* nos estudos internacionais que apreciam competências e capacidades mais abrangentes, como a literacia matemática. Estas incoerências têm contribuído para uma certa fragmentação de ideias e um extremar de posições, em que cada fação se agarra ao que de mais radical consegue encontrar[36].

Como professora, mas também investigadora, na verdade, como professora-investigadora não posso permanecer indiferente. Uma parte das tensões e conflitos que existem em torno das questões do ensino e aprendizagem da matemática pode ser explicada, a meu ver, pelo não reconhecimento de legitimidade ou validade à investigação produzida pela Educação Matemática, embora o recurso a métodos científicos seja uma

[36] Ideia proferida pelo Sr. Secretário de Estado da Educação, Dr. João Costa, no encerramento da Conferência Internacional Currículo para o Século XXI – "Pensar a Matemática" (organizada pela DGE no Centro Cultural de Belém, em 13 de janeiro de 2017) ao referir-se às dificuldades e tensões entre a APM e a SPM e urgindo a um diálogo construtivo.

constante. Esta posição é, com frequência, um caso particular de um não reconhecimento das Ciências Sociais, no geral, enquanto área de conhecimento. Esta visão hierárquica e segregadora acaba por se difundir pelas mais diversas discussões em que esta parte do conflito é chamada a intervir. Outra parte é explicada quando se olha com condescendência para a profissão docente, desprofissionalizando-a, porque o professor não domina terminologias (o que é mesmo o 'sentido do número'? e o que é isso de 'resolver-e-exprimir'? 'fluência tecno-matemática'?), porque não frequenta encontros e congressos, porque não se reúne em associação, porque decide não abrir as portas da sala de aula a peritos e especialistas. Entre conflitos, tensões políticas ou educativas, entre mundos, o professor-investigador tem um papel privilegiado porque não pode ficar indiferente. O professor-investigador tem acesso ao campo empírico e tem acesso ao conhecimento, no sentido em que tanto se move na comunidade docente como pode participar na comunidade científica. Este grande desafio, que vai além do desenvolvimento profissional pessoal, é o de ser chamado a estabelecer pontes de diálogo entre professores, investigadores e comunidade, pois o diálogo entre a investigação e a prática é a sua linguagem. E, porque somos cada vez mais, essa responsabilidade é também crescente.

Lista de Publicações Vinculadas ao Estudo

Livros e capítulos de livros

Carreira, S., & Jacinto, H. (no prelo). *A model of mathematical problem solving with technology: the case of Marco solving-and-expressing two geometry problems.* (Aceite para publicação em volume da série ICME-13 Monographs, editado por P. Liljedahl e M. Santos-Trigo). Springer.

Jacinto, H., Nobre, S., Carreira, S., & Amado, N. (no prelo). Different levels of sophistication in solving-and-expressing mathematical problems with digital tools. In N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving: a focus on technology, creatvity and affect.* [Research in Mathematics Education]. Springer.

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H. & Nobre, S. (2016). *Youngsters solving mathematics problems with technology*. *The Results and Implications of the Problem@Web Project.* [Mathematics Education in the Digital Era]. New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-24910-0_2.

Carreira, S., Jacinto, H., Nobre, S., & Amado, N. (2014). *Mathematical Problem Solving with Digital Technologies in a Web-Based Mathematics Competition*. Monografia não publicada (Projeto Problem@Web, PTDC/CPE-CED/101635/2008).

Carreira, S., Amado, N., Ferreira, R. A., Rodriguez, J., Silva, J. C., Jacinto, H., Amaral, N., Nobre, S., Martins, I., Reis, S., & Mestre R. B. (2012). *Um olhar sobre uma competição matemática na Web: Os SUBs*. Faro, Portugal: Universidade do Algarve. ISBN: 978-989-8472-19-9.

Artigos em revistas científicas

Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). Diferentes Modos de Utilização do GeoGebra na Resolução de Problemas de Matemática para Além da Sala de Aula: Evidências de Fluência Tecno-Matemática. *Bolema - Boletim de Educação Matemática, 31*(57), (pp. 266-288). https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2016). Mathematical Problem Solving with Technology: the Techno-Mathematical Fluency of a Student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education. International Journal of Science and Mathematics Education*. Advance online publication. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9728-8.

Artigos em conferências com revisão por pares

PME - International Group for the Psychology of Mathematics Education

Jacinto, H., Carreira, S., & Mariotti, M. A. (2016). Mathematical Problem Solving with Technology Beyond the Classroom: The use of Unconventional Tools and Methods. In Csíkos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 3, pp. 27–34). Szeged, Hungary: PME.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2013). Beyond-school mathematical problem solving: a case of students-with-media. In A. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 3, pp. 105-112). Kiel, Germany: PME.

CERME - European Society for Research in Mathematics Education

Jacinto, H., & Carreira, S. (2015). A framework for describing techno-mathematical fluency in beyond-school problem solving. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *CERME 9 Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp. 2509-2516). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Jacinto, H., Amado, N., & Carreira, S. (2009). Internet and mathematical activity within the frame of "Sub14". In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1221–1230). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

ICME - International Committee for Mathematical Instruction

Jacinto, H., & Carreira, S. (2016). Mathematical Problem Solving with Technology: The case of Marco solving-and-expressing on the screen. *International Congress on Mathematics Education – ICME 13,* Hamburg, Germany: ICMI.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2012). Problem solving in and beyond the classroom: perspectives and products from participants in a web-based mathematical competition. *International Congress on Mathematics Education - ICME 12,* (pp. 2933-2942). Seoul: ICMI.

ICTMT – International Conference on Technology in Mathematics Teaching

Jacinto, H., & Carreira, S. (2015). Solving problems on the screen: Digital tools supporting solving-and-expressing. In N. Amado, & S. Carreira (Eds.), *Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching - ICTMT12*, (pp. 412-420). Faro, Portugal: University of Algarve.

Nobre, S., Jacinto, H., Amado, N., & Carreira, S. (2015). The Problem@Web Project: Digitally Solving and Expressing Problems Beyond the Classroom. In N. Amado, & S. Carreira (Eds.), *Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching - ICTMT12*, (pp. 535-537). Faro, Portugal: University of Algarve.

Jacinto, H., Carreira, S., & Amado, N. (2011). Home technologies: how do they shape beyond-school mathematical problem solving activity? In M. Joubert, A. Clark-Wilson, & M. McCabe (Eds.), *The 10th International Conference on Technology in Mathematics Teaching - ICTMT10*, (pp. 159-164). Portsmouth, UK: University of Portsmouth.

Seminário de Investigação em Educação Matemática – Grupo de Trabalho de Investigação da APM

Jacinto, H., & Carreira, S. (2015). Resolver problemas no ecrã: o recurso à visualização para resolver-e-exprimir. In A. P. Canavarro, L. Santos, C. C. Nunes, & H. Jacinto (Eds.), *Atas do XXVI Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 204-217). Évora, Portugal: APM. ISBN: 978-972-8768-59-1.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2013). "Ah, boa! Geometria! Vou pôr isto tudo direitinho." - Literacia tecno-matemática na resolução de problemas com o GeoGebra. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco, & F. Viseu (Orgs.), *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 513-527). Braga, Portugal: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2012). Literacia tecno-matemática na resolução de problemas com tecnologias. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, & C. Nunes (Eds.), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*, pp. 677-691. Coimbra, Portugal: APM. ISBN: 978-972-8768-53-9.

Carreira, S., & Jacinto, H. (2011). Tecnologias e recursos no ensino e aprendizagem da Matemática. In A. Henriques, C. Nunes, A. Silvestre, H. Jacinto, H. Pinto, A. Caseiro & J. P. Ponte (Orgs.), *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 747-750). Lisboa, Portugal: APM.

Outros

Jacinto, H. (2014). Beyond-school mathematical problem solving with technologies: bringing forth techno-mathematical literacy. *YERME Summer School 7*, Kassel, Alemanha.

Jacinto, H., Nobre, S., Carreira, S., & Amado, N. (2014). The use of digital tools in web-based mathematical competitions: degrees of sophistication in problem solving-and-expressing. (Keynote Address). In S. Carreira, N. Amado, K. Jones & H. Jacinto (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving*, (pp. 14-15). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2012). Digital representations mediating students' problem solving: Results from a web-based mathematical competition. *La didactique des mathématiques: approches et enjeux. Hommage à Michèle Artigue. Atelier 6: Tecnhologies numériques pour l'enseignement des mathematiques*, (pp. 40-42). Paris, França: Université Paris Diderot.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2012). Estratégias de resolução de problemas de matemática: que lugar no desenvolvimento do currículo? In T. Estrela et al. (2012). *Revisitar os Estudos Curriculares. Onde Estamos e Para Onde Vamos?* Lisboa, Portugal: EDUCA/Secção Portuguesa da AFIRSE. ISBN: 978-989-8272-14-0.

Jacinto, H., & Carreira, J. (2011). Nativos digitais em actividade de resolução de problemas de matemática. In A. Andrade, C. Lajoso, J. Lagarto, & L. Botelho (Eds.), *COIED 2011 - 1ª Conferência Online de Informática Educacional*, (pp. 69-77). Lisboa, Portugal: Universidade Católica Portuguesa. ISBN: 978-989-8366-05-4.

Artigos em revistas pedagógicas profissionais

Jacinto, H. (2014). O GeoGebra na Resolução de Problemas: diferentes abordagens e suas potencialidades. [Tecnologias na Educação Matemática]. *Educação e Matemática*, *130*, 60-63.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2014). Resolver problemas de matemática: um desafio ao alcance de todos, fora e dentro da sala de aula. *Educação e Matemática*, *130*, 71-77.

Referências

Aarsand, P. (2007). *Around the Screen Computer activities in children's everyday lives*. Tese de doutoramento, Linköping University. Disponível em http://liu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:23606.

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só) … . *Educação e Matemática , 8*, 7-10 e 35.

Ahmed, A., Gimenez, J., Keitel, C., Klakla, M., Kraemer, J.-M., & Porfirio, J. (2001). *Mathematical literacy in the digital era: research, teacher education and classroom practice aimed at a mathematics education for all*, Paper presented at CIEAEM 53, Verbania, Italy.

Almeida, C. (1995). Contribuição para uma ética de investigação educacional: Alguns exemplos e sugestões. *Quadrante, 4*(2), 123-131.

Almeida, L., & Freire, T. (2003). *Metodologia da Investigação em Psicologia e Educação*. [3ª Ed]. Braga, Portugal: Psiquilíbrios Edições.

Amado, J. (2015). *Manual de investigação qualitativa em educação*. [E-book]. Coimbra, Portugal: Imprensa da Universidade de Coimbra.

Amado, N., Carreira, S., & Ferreira, R. (2016). *Afeto em competições matemáticas inclusivas. A relação dos jovens e suas famílias com a resolução de problemas.* Belo Horizonte, Brasil-MG: Autêntica.

Amado, N., Ferreira, R., & Carreira, S. (2014). *A relação afetiva dos jovens e suas famílias com a matemática e a resolução de problemas no contexto de competições matemáticas inclusivas*. Monografia não publicada.

Amaral, N., & Carreira, S. (2012). An essay on students' creativity in problem solving beyond school – proposing a framework of analysis. In *Pre-Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education – ICME 12 – Topic Study 3*, (pp. 1419-1428). Seoul, South Korea: ICMI.

Amaral, N., & Carreira, S. (2014). *A criatividade matemática na resolução de problemas no contexto do campeonato de matemática Sub12*. Monografia não publicada.

Amit, M., & Fried, M. N. (2005). Authority and authority relations in mathematics education: A view from an 8th grade classroom. *Educational Studies in Mathematics, 58,*145-168.

APM (1988/2009). *Renovação do Currículo da Matemática*. Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

APM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

Applebaum, M., Kondratieva, M., & Freiman, V. (2012). Gender-related issues in mathematical competitions: participation in the virtual mathematical marathon. In *Pre-Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education - ICME 12* (pp. 6804- 6813). Seoul, South Korea: ICMI.

Araújo, J., & Borba, M. C. (2004). Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In M. C. Borba & J. Araújo (Orgs.), *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *5*, 25-45.

Artigue, M. (2007). Digital technologies: a window on theoretical issues in mathematics education. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of CERME 5*, (pp. 68-82). Cyprus: Cyprus University Editions.

Artigue, M. & Bardini, C. (2010). New didactical phenomena prompted by TI-nspire specificities – The mathematical component of the instrumentation process. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6*, (pp. 1171-1180). Lyon, France: INRP.

Babbie, E. (2007). *The practice of social research* [11ª ed.]. Belmont, NJ: Wadswoth.

Babbie, E., & Mouton, J. (2007). The practice of social research.Oxford, UK: University Press.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2009). Conjecturing and proving in dynamic geometry: the elaboration of some research hypotheses. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. 231-240). Lyon, France: CERME.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*, 225-253.

Bakker, A., & Akkerman, S. (2014). A boundary-crossing approach to support students' integration of statistical and work-related knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 223-237.

Barbeau, E., & Taylor, P. (2009). *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI Study*. New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09603-2_1.

Barrera-Mora, F., & Reyes-Rodríguez, A. (2013). Cognitive processes developed by students when solving mathematical problems within technological environments. *The Mathematics Enthusiast*, *1-2*, 109-136.

Barron, B., Martin, C., & Roberts, E. (2007). Sparking self-sustained learning: report on a design experiment to build technological fluency and bridge divides. *International Journal of Technology and Design Education*, *17*(1), 75-105.

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Begle, E. G. (1973). Lessons learned from SMSG. *Mathematics Teacher*, *66*, 207-214.

Bélisle, C. (2006). Literacy and the Digital Knowledge Revolution. In A. Martin, & D. Madigan (Eds.), *Digital Literacies for Learning* (pp. 51-67). London, UK: Facet.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, (pp. 5-23). Heidelberg, Germany: Springer.

Blazhenkova, O., & Kozhevnikov, M. (2010). Visual-object ability: A new dimension of non-verbal intelligence. *Cognition, 117*(3), 276-301.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto, Portugal: Porto Editora.

Bonoma, T. (1985). Case research in marketing: opportunities, problems, and a process. *Journal of Marketing Research*, *22*, 199-208.

Bonotto, C. (2002). Suspension of sense-making in mathematical word problem solving: A possible remedy. In I. Vakalis, D. H. Hallett, C. Kourouniotis, D. Quinney & C. Tzanakis (Orgs.), *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*. Crete, Greece: Wiley & Sons Publishers.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 125-141.

Borba, M., & Villarreal, M. (1998). Graphing calculators and reorganization of thinking: the transition from functions to derivative. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (vol 2, pp. 136-143). Stellenbosch, South Africa: IGPME.

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. New York, NY: Springer.

Borralho, A. (1991). Resolução de problemas – metacognição: um possível modelo. In P. Abrantes, & A. Silva (Orgs.), *ProfMat90 – Actas*, (vol II, pp. 165-174). Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

Borralho, A., Fialho, I., & Cid, M. (2015). A Triangulação Sustentada de Dados como Condição Fundamental para a Investigação Qualitativa. *Revista Lusófona de Educação*, *29*, 53-69.

Brady, C., Eames, C., & Lesh, R. (2015). Connecting Real-World and In-School Problem-Solving Experiences. *Quadrante*, vol. XXIV, *2*, 5-38.

Bray, A., & Tangney, B. (2016). Enhancing student engagement through the affordances of mobile technology: a 21st century learning perspective on Realistic Mathematics Education. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(1), 173-197.

Brockmann-Behnsen, D., & Rott, B. (2014). Fostering the Argumentative Competence by Means of a Structured Training. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, (vol. 2, pp. 193-200). Vancouver, Canada: PME.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brown, P. (2008). A Review of the Literature on Case Study Research. *Canadian Journal for New Scholars in Education. 1*(1), 1-13.

Brown, J., Stillman, G., & Herbert, S. (2004). Can the notion of affordances be of use in the design of a technology enriched mathematics curriculum? In I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010, Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (vol. 1, pp. 119 - 126). Sydney, Australia: MERGA.

Busse, A., & Borromeo Ferri, R. (2003). Methodological reflections on a three-step-design combining observation, stimulated recall and interview. *ZDM, 35*(6), 257-264.

Čadež, T., & Kolar, V. (2015). Comparison of types of generalizations and problem-solving schemas used to solve a mathematical problem. *Educational Studies in Mathematics, 89*(2), 283-306.

Cai, J. (2010). Commentary on Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics: A Representational Discussion. In B. Sriraman, & L. English (Eds.) *Theories of Mathematics Education*, (pp. 251-260). New York, NY: Springer.

Cai, J., Mamona-Downs, J., & Weber, K. (2005). Mathematical problem solving: What we know and where we are going. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 217-220. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.014.

Calder, N. S. (2007). Visual perturbances in pedagogical media. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: essential tools, essential practice, (Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart),* (pp.172—181). Sydney, Australia: MERGA.

Cardoso, T., Alarcão, I., & Celorico, J. (2010). *Revisão da literatura e sistematização do conhecimento*. Porto, Portugal: Porto Editora.

Carlson, M., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics, 58*, 45-75.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology, 3*, 21-29.

Carraher, D. & Schliemann, A. (2000). Lessons from Everyday Reasoning in Mathematics Education: Realism versus Meaningfulness. In D. Jonassen & S. Land (Eds.), *Theoretical Foundations of Learning Environments*, (pp. 172-195). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Carreira, S. (2005). Ecos de Amesterdão. O ambiente de aprendizagem e o potencial da relação entre a Matemática e o mundo real. *Educação e Matemática: caminhos e encruzilhadas. Actas do encontro internacional de homenagem a Paulo Abrantes.* (pp. 121-138). Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

Carreira, S. (2007). Do castelo de Marvão à cidade do Sado - Trilhos da Matemática Escolar. *Educação e Matemática*, *92*, 3-9.

Carreira, S. (2015). Mathematical problem solving beyond school: digital tools and students mathematical representations. In S. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, (pp 93-113). Switzerland: Springer.

Carreira, S., Amado, N., Ferreira, R., Jacinto, H., Nobre, S., & Amaral, N. (2013). O Projeto Problem@Web: perspetivas de investigação em resolução de problemas. In J. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco & F. Viseu (Orgs.), *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 51-71). Braga, Portugal: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Carreira, S., Amado, N. (Coords.), Ferreira, R. A., Rodriguez, J., Silva, J. C., Jacinto, H., Amaral, N., Nobre, S., Martins, I., Reis, S., & Mestre R. B. (2012). *Um olhar sobre uma competição matemática na Web: Os SUBs.* Faro, Portugal: Universidade do Algarve. Disponível em http://hdl.handle.net/10400.1/2733.

Carreira, S., Ferreira, R., & Amado, N. (2013). Young students solving challenging mathematical problems in an inclusive competition: enjoyment vis-à-vis help seeking. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8*, (pp. 1289-1298). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Carreira, S., & Jacinto, H. (no prelo). *A model of mathematical problem solving with technology: the case of Marco solving-and-expressing two geometry problems.* (Aceite para publicação em volume da série ICME-13 Monographs, editado por P. Liljedahl e M. Santos-Trigo). Springer.

Carreira, S., Jacinto, H., Nobre, S., & Amado, N. (2014). *Mathematical Problem Solving with Digital Technologies in a Web-Based Mathematics Competition*. Monografia não publicada.

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2016). *Youngsters solving mathematical problems with technology: The results and implications of the Problem@Web Project.* New York, NY: Springer.

Charles, R., & Lester, F. (1984). An evaluation of a process-oriented mathematical problem-solving instructional program in grades five and seven. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(1), 15-34.

Che, M., Wiegert, E., & Threlkeld, K. (2012). Problem Solving Strategies of Girls and Boys in Single-Sex Mathematics Classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 311-326.

Chemero, A. (2001). What we perceive when we perceive affordances. *Ecological Psychology*, *13*, 111-116.

Chemero, A. (2003). An outline of a theory of affordances. *Ecological Psychology*, *15*(2), 181-195.

Chen, C., & Herbst, P. (2013). The interplay among gestures, discourse, and diagrams in students' geometrical reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 83*(2), 285-307.

Chen, I-C., & Hu, S.-C. (2013). Applying Computerized Concept Maps in Guiding Pupils to Reason and Solve Mathematical Problems: The Design Rationale and Effect. *Journal of Educational Computing Research*, *49*(2), 209-223.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Problem Solving and Problem Posing in a Dynamic Geometry Environment. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *2*(2), 125-143.

Cifarelli, V., & Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open-ended problem-solving situations. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(3-4), 302-324.

Cobb, P. (1985). An investigation of young children's academic arithmetic contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 109-124.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2005). *Research Methods in Education*. [5ª ed.] London, UK: Taylor & Francis, e-library.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education.* [6ª Ed]. London, UK: Routledge.

Cole, M., & Engeström, Y. (1993). A cultural-historical approach to distributed cognition. In G. Salomon (Ed.), *Distributed cognitions* (pp. 1-46). New York, NY: Cambridge University Press.

Comissão Europeia. (2010). *Europa 2020 - Estratégia para um crescimento inteligente, sustentável e inclusivo*. Bruxelas: COM(2010).

Confrey, J., & Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. In R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 1, pp. 57-63). Blacksburg, VA: PME-NA.

Cotton, T. (2002). The club that rejects me is the club I want to join: identity, mathematics learning and mathematics education research. In P. Valero & O. Skovsmose (Eds.), *Proceedings of the 3rd International MES Conference,* (pp. 1-12). Copenhagen, Denmark: Centre for Research in Learning Mathematics.

Creswell, J. W. (2003). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. [2ª ed.]. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Creswell, J. W. (2005). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Creswell, J. W. (2011). *Educational Research: Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research*. Boston, MA: Pearson Education.

Creswell J., & Plano Clark, V. (2011). *Designing and conducting mixed method research* [2ª ed.]. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Crockett, L., Jukes, I., & Churches, A. (2012). *Literacy is NOT enough: 21st century fluencies for the digital age.* New York, NY: Corwin Press.

Czocher, J. (2014). Toward building a theory of mathematical modeling. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36,* (vol. 2, pp. 353-360). Vancouver, Canada: PME.

de Corte, E., Verschaffel, L., & Op 't Eynde, P. (2000). Self-regulation: A characteristic and a goal of mathematics education. In P. Pintrich, M. Boekaerts & M. Zeidner (Eds.), *Self-regulation: Theory, research, and application,* (pp. 687-726). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Deliberação n.º 453/2016 de 15 de março do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Diário da República: 2ª série, Nº 52 (2016). Acedido em http://www.ie.ulisboa.pt/pls/portal/docs/1/564658.PDF.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (2003). *Strategies of qualitative inquiry*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Doerr, H., & Zangor, R. (2000). Creating Meaning for and with the Graphing Calculator. *Educational Studies in Mathematics, 41*(2), 143-163.

Dooley, L. (2002). Case Study Research and Theory Building. *Advances in Developing Human Resources*, *4*(3), 335-354.

Dörfler, W. (1993). Computer Use and Views of the Mind. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, (pp. 159-186). Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Drijvers, P., & Doorman, M. (1996). The graphics calculator in mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 425-440.

Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V., & Trouche, L. (2013). One episode, two lenses; A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 23-49. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9416-8.

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M.-A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A., & Meagher, M. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology - Rethinking the terrain* (pp. 89-132). New York, NY: Springer.

Duffin, J., & Simpson, A. (2000). When does a way of working become a methodology? *Journal of Mathematical Behavior, 19*(2), 175-188.

Eichelberger, R. T. (1989*). Disciplined inquiry: Understanding and doing educational research*. New York, NY: Longman.

Eisenhart, M. (1988). The Ethnographic Research Tradition and Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(2), 99-114.

Eisenhart, M. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education researchers. In R. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 1, pp. 202- 219). Blacksburg, VA: PME-NA.

Engeström, Y. (1987). *Learning by Expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki, Finland: Orienta-konsultit.

Engeström, Y. (1991). Activity theory and individual and social transformation. *Multidisciplinary Newsletter for Activity Theory. 7*(8), 6-17.

Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, *14*, 133-156.

English, L. (1996). Children's construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 81-112.

English, L., Lesh, R., & Fennewald, T. (2008). *Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development.* Paper presented at ICME11. Monterrey, México: ICMI.

English, L., & Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21st century. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers*, (pp. 263-290). Berlin/Heidelberg, Germany: Springer.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London, UK: The Falmer Press.

Ernest, P. (1993). Mathematical Activity and Rhetoric: Towards a Social Constructivist Account. In N. Nohda (Ed.), *Proceedings of 17th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 2, pp. 238-245), Tsukuba, Japan: University of Tsukuba.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 317-333.

Fernandes, E. (2004). *Aprender Matemática para Viver e Trabalhar no Nosso Mundo*. Tese de Doutoramento não publicada. Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Francisco, J., & Maher, C. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(3-4), 361-372.

Freiman, V., & Applebaum, M. (2011). Online Mathematical Competition: Using Virtual Marathon to Challenge Promising Students and to Develop Their Persistence, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *11*(1), 55-66. https://doi.org/10.1080/14926156.2011.548901.

Freiman, V., & Lirette-Pitre, N. (2009). Building a virtual learning community of problem solvers: Example of CASMI community. *ZDM*, *41*(1-2), 245-256.

Freiman, V., Vézina, N., & Gandaho, I. (2005). New Brunswick pre-service teachers communicate with schoolchildren about mathematical problems: CAMI project. *ZDM*, *37*(3), 178-189. https://doi.org/10.1007/s11858-005-0007-3.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Fujita, T., Jones, K., & Miyazaki, M. (2011). Supporting students to overcome circular arguments in secondary school mathematics: the use of the flowchart proof learning platform. In Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 2, pp. 353-360). Ankara, Turkey: PME.

Gallardo-Echenique, E., Oliveira, J., Marqués-Molias, L., & Esteve-Mon, F. (2015). Digital Competence in the Knowledge Society. *MERLOT Journal of Online Learning and Teaching, 11*(1), 1-16.

Garfield, J., Le, L., Zieffler, A., & Ben-Zvi, D. (2014). Developing students’ reasoning about samples and sampling variability as a path to expert statistical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(3), 327-342.

Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*. *16*(3), 163-176.

Gates, P., & Vistro-Yu, C. (2003). Is mathematics for all? In A. Bishop, M. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education*. (pp. 31-73). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

GAVE (2004). *Resultados do Estudo Internacional PISA 2003*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação.

GAVE (2006a). *Resultados do Exame de Matemática do 9º ano 2005 – 1ª chamada*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação.

GAVE (2006b). *Reflexão dos Docentes do 3º ciclo sobre os Resultados do Exame de Matemática de 2005. Relatório*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação.

GAVE (2009). Projecto Testes Intermédios. Relatório Final 2008-2009. Disponível em http://iave.pt/np4/116.html#1.

GAVE (2010). Projecto Testes Intermédios. Relatório 2010. Disponível em http://iave.pt/np4/115.html#1.

GAVE (2012). Exames Nacionais. Relatório 2011. Disponível em http://iave.pt/np4/108.html#1.

GAVE (2013). Relatório Provas Finais de Ciclo e Exames Finais Nacionais 2012. Disponível em http://iave.pt/np4/111.html#1.

Gee, J. (2004). *Situated Language and Learning. A critique of traditional schooling.* New York, NY: Routledge.

Gibson, J. (1979). The Theory of Affordances. In R. Shaw & J. Bransford (Eds.), *Perceiving, Acting, and Knowing: Toward an ecological psychology* (pp. 67-82). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Gibson, J. (1986). *The ecological approach to visual perception.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Goizueta, M., Mariotti, M. A., & Planas, N. (2014). Validating in the mathematics classroom. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 3, pp. 169-176). Vancouver: PME.

Goos, M., & Galbraith, P. (1996). Do it this way! Metacognitive strategies in collaborative mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *30*(3), 229-260.

Goos, M., Galbraith, P., Renshaw, P., & Geiger, V. (2003). Perspectives on technology mediated learning in secondary school mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(1), 73-89.

Goos, M., Geiger, V., & Dole, S. (2012). Auditing the numeracy demands of the middle years curriculum. *PNA*, *6*(4), 147-158. http://hdl.handle.net/10481/20051.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas – Encontro de homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 83-101). Lisbon, Portugal: APM.

Greeno, J. (1994). Gibson's Affordances. *Psychological Review*, *101*(2), 336-342.

Grugnetti, L., & Jaquet, F. (2005). A Mathematical Competition as a Problem Solving and a Mathematical Education Experience. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 373-384.

Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Educational Communication and Technology Journal*, *29*, 75-91.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N. K. Denzin, & Y.S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 105-117). Thousand Oaks, CA: Sage.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (2005). Paradigmatic controversies, contradictions, and emerging confluences. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (pp. 191-215). Thousand Oaks: Sage, Publications.

Guerreiro, B. J., Batista, P., Silvestre, C., & Oliveira, P. (2013). Globally asymptotically stable sensor-based simultaneous localization and mapping. *IEEE Transactions on Robotics*, *29*(6), 1380-1395.

Guimarães, H. (1991). A pretexto da reforma. *Educação e Matemática* , *19*, *20*, 1-2.

Guimarães, H. (2008). Dois anos depois, vinte anos depois... Renovar o currículo, melhorar o ensino, melhorar a aprendizagem. *Educação e Matemática*, *98*, 1-2.

Hähkiöniemi, M., Leppäaho, H., & Francisco, J. (2013). Teacher-assisted open problem-solving. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *18*(2), 47-69.

Hamilton, E. (2007). What changes are occurring in the kind of problem-solving situations where mathematical thinking is needed beyond school? In R. Lesh, E. Hamilton & J. Kaput, *Foundations for the Future of Mathematics Education* (pp. 1-6). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hamilton, E., Lesh, R., Lester, F., & Yoon, C. (2007). The use of reflection tools to build personal models of problem-solving. In R. Lesh, E. Hamilton, & J. Kaput (Eds.), *Foundations for the Future in Mathematics Education* (pp. 347-365). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hammersley, M. (2006). Ethnography: problems and prospects. *Ethnography and Education*, *1*(1), 3-14, https://doi.org/10.1080/17457820500512697.

Hammersley, M. (2013). *What is Qualitative Research?* London, UK: Bloomsbury Academic.

Hammersley, M., & Traianou, A. (2012). *Ethics and Educational Research*, British Educational Research Association on-line resource. Acedido em https://www.bera.ac.uk/wp-content/uploads/2014/03/Ethics-and-Educational-Research.pdf.

Harskamp, E., & Suhre, C. (2007). Schoenfeld's problem solving theory in a student controlled learning environment. *Computers & Education*, *49*(3), 822-839.

Haspekiam, M. (2005). An "Instrumental Approach" to Study the Integration of a Computer Tool into Mathematics Teaching: The Case of Spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(2), 109-141.

Haug, R. (2012). Can students learn problem solving with a dynamic geometry environment (DGE)? In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 4, pp. 273). Taipei, Taiwan: PME.

Hersh, R. (1993). Humanistic Mathematics and the Real World. In A. White (Ed.), *Essays in Humanistic Mathematics.* (pp. 15-18). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Hersh, R. (1997). *What is Mathematics, Really?* New York: Oxford University Press.

Hershkowitz, R. (2014). Looking at visual thinking and visual communicating in mathematics learning through the lens of examples. In M. Fried & T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground*, (pp.198-204). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Hino, K. (2012). Students creating ways to represent proportional situations: in relation to conceptualization of rate. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 2, pp. 283-290). Taipei, Taiwan: PME.

Holzl, R. (2001). Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations – a case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 63-86.

Hong-chan, S., & Hee-chan, L. (2006). Discovering a rule and its mathematical justification in modeling activities using spreadsheet. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 5, pp. 137-144), Prague, Czech Republic: PME.

Hoyles, C., & Lagrange, J.-B. (Eds.). (2010). *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics* *education* (pp. 323-349). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hoyles, C., Noss, R., Kent, P., & Bakker. A. (2010). *Improving mathematics at work: The need for techno-mathematical literacies.* London, UK: Routledge.

Hoyles, C., Wolf, A., Molyneux-Hodgson, S., & Kent, P. (2002). *Mathematical skills in the workplace: final report to the Science Technology and Mathematics Council*. London, UK: Institute of Education, University of London; Science, Technology and Mathematics Council.

Huang, H.-M. (2012). An exploration of computer-based curricula for teaching children volume measurement concepts. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 2, pp. 315-322). Taipei, Taiwan: PME.

Huang, H.-M. (2014). Investigating children's ability to solve measurement estimation problems. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, (vol. 3, pp. 353-360). Vancouver, Canada: PME.

Hurme, T.-R., & Järvelä, S. (2005). Students' activity in computer-supported collaborative problem solving in mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*(1), 49-73. https://doi.org/10.1007/s10758-005-4579-3.

Husén, T. (1988). Research paradigms in education. In J. Keeves (Ed.), *Educational research, methodology and measurement: an international handbook*, (pp. 17-20). Oxford, UK: Pergamon.

Hwang, W.-Y., Chen, N.-S., & Hsu, R.-L. (2006). Development and evaluation of multimedia whiteboard system for improving mathematical problem solving. *Computers & Education*, *46*, 105-121.

Hyett, N., Kenny, A., & Dickson-Swift, V. (2014). *Methodology or method? A critical review of qualitative case study reports.* Acedido em https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4014658/

Iranzo, N., & Fortuny, J. (2011). Influence of GeoGebra on problem solving strategies. In L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra* (pp. 91-104). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Jacinto, H. (2008). *Tenho que resolver, vou arranjar maneira!" - A Internet e a Actividade Matemática no Caso do SUB14*. Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática. (Colecção Teses).

Jacinto, H. (2011). *Jovens do século XXI em atividade de resolução de problemas de matemática para além da sala de aula.* Projeto de Tese de Doutoramento em

Educação (Documento não publicado), Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal.

Jacinto, H., Amado, N., & Carreira, S. (2009). Internet and Mathematical Activity within the Frame of "Sub 14". In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6,* (pp. 1221-1230). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2008). Assunto: resposta ao problema do SUB 14 – a Internet e a resolução de problemas em torno da competência matemática dos jovens. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática*, (pp. 434-446). Vieira de Leiria, Portugal: SEM, SPCE.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2010a). A Internet e a actividade matemática no caso do Sub14. In J. Lagarto & A. Andrade (Eds.), *A Escola XXI, Aprender com TIC*. (pp. 105-130). Lisboa, Portugal: Universidade Católica Portuguesa.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2010b). As TIC como artefacto mediador da resolução de problemas de matemática. In H. Gomes, L. Menezes, & I. Cabrita (Eds.), *Actas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2012). Problem solving in and beyond the classroom: perspectives and products from participants in a web-based mathematical competition. In *Pre-Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education - ICME 12 – Topic Study 15*, (pp. 2933-2942). Seoul, South Korea: ICMI.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2013). Beyond-school mathematical problem solving: a case of students-with-media. In A. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the IGPME*, (vol. 3, pp. 105-112). Kiel, Germany: PME.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2015). A framework for describing techno-mathematical fluency in beyond-school problem solving. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the CERME 9*, (pp. 2509-2516). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2016a). Mathematical Problem Solving with Technology: the Techno-Mathematical Fluency of a Student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education.* Advance Online Publication. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9728-8.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2016b). *Mathematical Problem Solving with Technology: The case of Marco solving-and-expressing on the screen.* Paper presented at ICME 13, Hamburg, Germany: ICMI.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). Diferentes Modos de Utilização do GeoGebra na Resolução de Problemas de Matemática para Além da Sala de Aula: Evidências de

Fluência Tecno-Matemática. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), (pp. 266-288). https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13.

Jacinto, H., Carreira, S., & Amado, N. (2011). Home technologies: how do they shape beyond-school mathematical problem solving activity? In M. Joubert, A. Clark--Wilson, & M. McCabe (Eds.), *Proceedings of the 10th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 160-165). Portsmouth: University of Chichester & University of Portsmouth, UK.

Jacinto, H., Carreira, S., & Mariotti, M. A. (2016). Mathematical Problem Solving with Technology Beyond the Classroom: The use of Unconventional Tools and Methods. In Csíkos, C., Rausch, A. & Szitányi, J. (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 3, pp. 27-34). Szeged, Hungary: PME.

Jacinto, H., Nobre, S., Carreira, S., & Amado, N. (2014). The use of digital tools in web-based mathematical competitions: degrees of sophistication in problem solving-and-expressing. [Keynote Address]. In S. Carreira, N. Amado, K. Jones & H. Jacinto (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving*, (pp. 14-15). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Jacinto, H., Nobre, S., Carreira, S., & Amado, N. (no prelo). Different levels of sophistication in solving-and-expressing mathematical problems with digital tools. In N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving: a focus on technology, creatvity and affect.* [Research in Mathematics Education]. Springer.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 55-85.

Jones, K., & Simons, H. (1999). *Online mathematics enrichment: An evaluation of the NRICH project.* Southampton, UK: University of Southampton. http://eprints.soton.ac.uk/11252/.

Jones, K., & Simons, H. (2000). The student experience of online mathematics enrichment. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 3, pp. 103-110). Hiroshima, Japan: PME.

Jukes, I., & Dosaj, A. (2006). *Understanding Digital Children (DKs): Teaching & Learning in the New Digital Landscape*. Retrieved from https://edorigami.wikispaces.com/file/view/Jukes+-+Understanding+Digital+Kids.pdf. The InfoSavy Group.

Kaiser, G. (2002). Educational Philosophies and Their Influence on Mathematics Education – An Ethnographic Study in English and German Mathematics Classrooms. *ZDM*, *34*(6), 241-257.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for research in mathematics education, 8*, 163-180.

Kantowski, M. G. (1981). Problen solving. In E. Fennema (Ed.), *Mathematics education research: Implications for the 80's*, (pp. 111-126). Viginia: NCTM. http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED206460.pdf.

Kantowski, M. G. (1983). The Microcomputer and Problem Solving. *Arithmetic Teacher, 30*(6), 20-21, 58-59.

Kenderov, P., Rejali, A., Bussi, M. G., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Taylor, P. (2009). Challenges beyond the classroom: Sources and organizational issues. In E. J. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI Study* (pp. 53-96). New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09603-2_3.

Kent, P., Noss, R., Guile, D., Hoyles, C., & Bakker, A. (2007). Characterizing the use of mathematical knowledge in boundary-crossing situations at work. *Mind, Culture, and Activity*, *14*(1-2), 64-82.

Ketele, J., & Roegiers, X. (1995). *Metodología para la Recogida de Información*. Madrid, Spain: Editorial La Muralla, S.A.

Kieran, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics, 46*, 187-228.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving* (pp. 1-15). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kilpatrick, J. (2001). Understanding Mathematical Literacy: the contribution of research. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 101-116.

Kim, M., & Hannafin, M. (2011). Scaffolding problem solving in technology-enhanced learning environments (TELEs): Bridging research and theory with practice. *Computers & Education, 56*(2), 403-417.

Koehler, M., & Mishra, P. (2009). What is Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK)? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9*(1), 60-70.

Kolovou, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Köller, O. (2013). An intervention including an online game to improve grade 6 students' performance in early algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(3), 510-545.

Koyuncu, I., Akyuz, D., & Cakiroglu, E. (2015). Investigating plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in technology and paper-and-pencil environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(4), 837-862.

Kozhevnikov, M., Hegarty, M., & Mayer, R. (2002). Revising the Visualizer–Verbalizer Dimension: Evidence for Two Types of Visualizers. *Cognition & Instruction, 20*, 37-77.

Kozhevnikov, M., Kosslyn, S., & Shephard, J. (2005). Spatial versus object visualizers: A new characterization of visual cognitive style. *Memory and Cognition, 33*, 710-726.

Kuuti, K. (1996). Activity Theory as a Potential Framework for Human-Computer Interaction Research. In B. Nardi (Ed.), *Context and Consciousness: Activity Theory and Human-Computer Interaction* (pp. 17-44). Cambridge, MA: MIT Press.

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. In S. Chu, H. Lew, & W. Yang (Eds.), *Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 22-36). Cheong-Ju, South Korea: Korea National University of Education.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strasser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 275-304). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Lange, D. (2012). Cooperation types in problem solving. In Tso, T. Y. (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 3, pp. 27-34). Taipei, Taiwan: PME.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lavy, I. (2007). A case study of dynamic visualization and problem solving. The *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 38*(8), 1075-1092.

Lee, H. S., & Hollebrands, K. F. (2006). Students' use of technological features while solving a mathematics problem. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*(3), 252-266.

Lee, S., & Yang, C. (2013). The effect of instruction in cognitive and metacognitive strategies on Taiwanese students' problem solving performance in probability. In A. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 3, pp. 225-232). Kiel, Germany: PME.

Leikin, R., & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: what makes the difference? *ZDM, 45*, 183-197.

Leikin, M., Waisman, I., Shaul, S., & Leikin, R. (2014). A comparative study on brain activity associated with solving short problems in algebra and geometry. In P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, (vol. 4, pp. 81-88). Vancouver, Canada: PME.

Leont'ev, A. (1974). The Problem of Activity in Psychology. *Soviet Psychology, 13*(2), 4-33.

Leont'ev, A. (1978). *Activity, Consciousness, and Personality*. Disponível em http://www.marxists.org/archive/leontev/works/1978/index.htm.

Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 235-364.

Lesh, R. (2000). Beyond Constructivism: Identifying Mathematical Abilities that are Most Needed for Success Beyond School in an Age of Information. M*athematics Education Research Journal*, *12*(3), 177-195.

Lesh, R. (2008). Directions for future research and development in engineering education. In J. Zawojewski, H. Diefes-Dux, & K. Bowman (Eds.), *Models and modeling in Engineering Education: Designing experiences for all students*, (pp. 271-292) Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Lesh, R., & Doerr, H. (1998). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modelling. In P. Cobb & E. Yackel (Eds.), *Symbolizing, communicating, and mathematizing*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism – Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*, (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Erlbaum Associates.

Lesh, R., & English, L. (2005). Trends in the Evolution of Models & Modeling Perspectives on Mathematical Learning and Problem Solving. *ZDM*, *37*(6), 487-489.

Lesh, R., English, L., & Fennewald, T. (2008). *Methodologies for investigating relationships between concept development and the development of problem solving abilities.* Paper presented at ICME-11, Monterrey, Mexico.

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem Solving, Modeling, and Local Conceptual Development. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(2&3), 157-189.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts & Processes* (pp. 263-343). New York: Academic Press.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing and NCTM.

Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (p. 229-261). Orlando, FL: Academic Press.

Lester, F. K. (2010). On the theoretical, conceptual and philosophical foundation for research in mathematics education. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers*, (pp. 67-85). Berlin/Heidelberg, Germany: Springer Science.

Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1&2), 245-278.

Lester, F. K. (2015). A Procedure for Studying the Cognitive Processes Used during Problem Solving. *The Journal of Experimental Education, 48*(4), 323-327.

Lester, F. K., Garofalo, J., & Kroll, D.L. (1989). *The Role of Metacognition in Mathematical Problem Solving. Final Report.* Bloomington, IN: Indiana University, Mathematics Education Development Centre. (Eric Document Reproduction Service No. ED 3 t 4 255).

Lester, F., & Kehle, P. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism – models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, (pp. 501-517). Mahwah, NJ: Erlbaum Associates.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*, 135-157.

Leung, A., Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 439-460.

Lévy, P. (1994). *As Tecnologias da Inteligência. O Futuro do Pensamento na Era Informática.* Lisboa, Portugal: Instituto Piaget.

Lévy, P. (2000). *Cibercultura*. Lisboa, Portugal: Instituto Piaget.

Lévy, P. (2009). From social computing to reflexive collective intelligence: The IEML research program. *Information Sciences, 180*, 71-94.

Lincoln, Y. S., & Guba, E.G. (1985). *Naturalistic inquiry.* Newbury Park, CA: Sage.

Llinares, S., & Roig, A. (2008). Secondary school students' construction and use of mathematical models in solving word problems. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*, 505-532.

Mackenzie, N., & Knipe, S. (2006). Research dilemmas: Paradigms, methods and methodology. *Issues In Educational Research, 16*(2), 193-205.

Mamede, E. (2001). *O papel da calculadora na resolução de problemas: Um estudo de caso no 1.º ciclo do ensino básico*.Tese de mestrado não publicada. Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Mamona-Downs, J. & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 385-401.

Mariotti, M., Laborde, C., & Falcade, R. (2003). Function and Graph in a DGS environment, In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, (vol. 3, pp. 237 - 244). Hawaii: University of Hawaii, College of Education, CRDG.

Martin, A. (2005). DigEuLit – a European framework for digital literacy: A progress report. *Journal of eLiteracy*, *2*, 130-136.

Martin, A. (2006). A European framework for digital literacy. *Digital Kompetanse*, *2*, 151-161.

Martin, A. (2008). Digital literacy and the digital society. In C. Lankshear & M. Knobel (Eds.), *Digital literacies: Concepts, policies and practices*, (vol. 30, pp. 151-176). New York: Peter Lang.

Martin, A. (2009). Digital literacy for the third age: Sustaining identity in an uncertain world. *eLearning Papers*, *12*, 1-15.

Martin, A., & Grudziecki, J. (2006). DigEuLit: Concepts and tools for digital literacy development. *Innovation in Teaching and Learning in Information and Computer Sciences*, *5*(4), 249-267.

Martinovic, D., Freiman, V., & Karadag, Z. (2013). Visual mathematics and cyberlearning in view of affordance and activity theories. In D. Martinovic, V. Freiman, & Z. Karadag (Eds.), *Visual mathematics and cyberlearning* (pp. 209-238). New York, NY: Springer.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Bristol, UK: Addison-Wesley.

Matos, J. F. (2005). Matemática, educação e desenvolvimento social: Questionando mitos que sustentam opções actuais em desenvolvimento curricular em Matemática. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação e Matemática: caminhos e encruzilhadas. Actas do encontro internacional de homenagem a Paulo Abrantes*, (pp. 69-81). Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

Matos, J. F. (2013). *Que matemática devemos ensinar às gerações de alunos do Século XXI?* Conferência Plenária proferida no ProfMat 2013, 23 de Março, 2013, Albufeira, Algarve.

Matos, J. F., & Carreira, S. (1994). Estudos de caso em educação matemática: Problemas actuais. *Quadrante*, *3*(1), 19-53.

Matos, J. F., & Pedro, A. (2011). O estudo de caso na investigação em educação - em direção a uma reconceptualização. *XI Congresso da SPCE*, (pp.583-587). Guarda, Portugal: SPCE.

Mayer, R. E. (1985). Mathematical ability. In R. J. Sternberg (Ed.), *Human Abilities: An Information Processing Approach* (pp. 127-150). New York, NY: Freeman.

McCain, T. (2005). *Teaching for tomorrow: Teaching content and problem-solving skills* [1.ª ed.] Thousand Oaks: Corwin Press.

ME (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa, Portugal: DGIDC, Ministério da Educação.

MEC (2013). *Programa de matemática do ensino básico.* Lisboa, Portugal: Ministério da Educação e Ciência.

Medina, R., Suthers, D., & Vatrapu, R. (2009). Representational practices in VMT. In G. Stahl (Ed.), *Studying Virtual Math Teams* (pp. 185-205). New York, NY: Springer.

Mellor, N. (2001). Messy method: The unfolding story. *Educational Action Research*, *9*(3), 465-484.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Merriam, S. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossey-Bass.

Merseth, K. K. (1994). *Cases, case methods, and the professional development of educators.* [ERIC Document Reproduction Service No. ED401272]. Acedido em: http://www.ericdigests.org/1997-2/case.htm.

Mertens, D. M. (2009). *Research methods in education and psychology: Integrating diversity with quantitative and qualitative approaches*. [2ª ed.] Thousand Oaks: Sage.

Monaghan, J. M., & Clement, J. (2000). Algorithms, visualization, and mental models: High school students' interactions with a relative motion simulation. *Journal of Science Education and Technology*, *9*(4), 311-325.

Morais, C., & Serrazina, L. (2013). Mental computation strategies in subtraction problem solving. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds), *Proceedings of CERME 8*, (pp. 333-342). Ankara, Turkey: Middle East Technical University, CERME.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S., & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(2), 99-111.

Moreno-Armella, L., & Santos-Trigo, M. (2013). Introduction to International perspectives on problem solving research in mathematics education. *The Mathematics Enthusiast*, *1*, 3-8.

Morrison, K. (1993) *Planning and Accomplishing School-Centred Evaluation*. Dereham, UK: Peter Francis.

Mousoulides, N. (2011). GeoGebra as a conceptual tool for modeling real world problems. In L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-centered learning: Pathways to* *mathematical understanding using GeoGebra* (pp. 105-118). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Nardi, B. (1996). *Studying Context: A Comparison of Activity Theory, Situated Action Models, and Distributed Cognition*. Cambridge, MA: MIT Press.

National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM). (1978). Position paper on basic mathematical skills. *Mathematics Teacher, 71*(2), 147-152.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The council.

Ness, H. M. (1993). Mathematics; an Integral Part of Our Culture. In A. White (Ed.), *Essays in Humanistic Mathematics*, (pp. 49-52). Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

Niss, M. (2010) Modeling students' mathematical competencies. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines and A. Hurford (Eds.), *ICTMA 13 Study*. Springer, New York: ICTMA.

Nobre, S., & Amado, N. (2013). Combining the spreadsheet with paper and pencil: a mixed environment for learning algebraic methods. In E. Faggiano & A. Montone (Eds.), *11th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 226-231). Bari: Università degli Studi di Bari Aldo Moro.

Nobre, S., Amado, N., & Carreira, S. (2012). Solving a contextual problem with the spreadsheet as an environment for algebraic thinking development. *Teaching Mathematics and its Applications, 31*(1), 11-19, https://doi.org/10.1093/teamat/hrr026.

Nobre, S., Amado, N., Carreira, S. & Ponte, J. (2011). Algebraic thinking of grade 8 students in solving word problems with a spreadsheet. In M. Pytlak, E. Swoboda & T. Rowland (Eds.), *Proceedings of CERME 7*, (pp. 521-531). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Nobre, S., Amado, N., & Ponte, J. P. (2015). A resolução de problemas com a folha de cálculo na aprendizagem de métodos formais algébricos. *Quadrante*, *24*(2), 85-109.

Norman, D. (1990). *The Design of Everyday Things.* New York, NY: Doubleday.

Norman, D. (2013). *The design of everyday things. Revised and expanded edition.* New York, NY: Basic Books.

Noss, R. (2001). For a learnable mathematics in the digital cultures. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 21-46.

Noss, R., & Hoyles, C. (2010). Modeling to address techno-mathematical literacies at work. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA 13*. (pp. 75-86). Springer, New York: ICTMA.

NRC (1999). *Being fluent with information technology*. Washington, DC: National Academy Press. Disponível em http://www.nap.edu/openbook.php?record_id=6482&page=2

Oblinger, D., & Oblinger, J. (2005). *Educating the net generation.* [E-book]. EDUCAUSE. Disponível em http://net.educause.edu/ir/library/pdf/pub7101.pdf.

OCDE (2012). *Literacy, Numeracy and Problem Solving in Technology-Rich Environments: Framework for the OECD Survey of Adult Skills*, France: OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264128859-en.

OCDE (2013). *PISA 2015 draft mathematics framework.* Paris: OECD Publishing. https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Mathematics%20Framework%20.pdf.

Olive, J., & Makar, K., with V. Hoyos, L. K. Kor, O. Kosheleva, & R. Straesser (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. In C. Hoyles & J. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology – Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 133-177). New York: Springer.

O'Reilly, M., Karim, K., Taylor, H., & Dogra, N. (2012). Parent and child views on anonymity: 'I've got nothing to hide'. *International Journal of Social Research Methodology*, *15*(3), 211-224.

Paiva. J., Amado, N., & Carreira, S. (2014). The role of peer and computer feedback in student's problem solving. In S. Carreira, N. Amado, K. Jones, & H. Jacinto (Eds.), (2014). *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving*, (pp. 59-70). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Panaoura, A., Deliyianni, E., Gagatsis, A., & Elia, I. (2011). Self-beliefs about using representations while solving geometrical problems. In M. Pytlak, E. Swoboda & T. Rowland (Eds.), *Proceedings of CERME 7*, (pp. 1167-1178). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, *72*, 39-60.

Papadopoulos, I., & Dagdilelis, V. (2008). Students' use of technological tools for verification purposes in geometry problema solving. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*(4), 311-325.

Papert, S., & Resnick, M. (1995). *Technological Fluency and the Representation of Knowledge*. Proposal to the National Science Foundation. MIT Media Laboratory.

Partanen, A.-M., & Kaasila, R. (2015). Sociomathematical norms negotiated in the discussions of two small groups investigating calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(4), 927-946. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9521-5.

Patrick, H., & Middleton, M. (2002). Turning the Kaleidoscope: What We See When Self-Regulated Learning is Viewed With a Qualitative Lens. *Educational Psychologist*, *37*(1), 27-39.

Patton, M. Q (1990). *Qualitative evaluation and research methods*. Newbury Park, CA: Sage.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. [3ª ed.]. Thousand Oaks, CA: Sage.

Pea, R. (1985). Beyond amplification: Using the computer to reorganize mental functioning. *Educational Psychologist*, *20*(4), 167-182.

Pea, R. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 89-122). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Persson, P.-E. (2013). A problem-solving experiment with TI-Nspire. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds), *Proceedings of CERME 8*, (pp. 2674-2683). Ankara, Turkey: Middle East Technical University, CERME.

PIAAC Expert Group in Problem Solving in Technology-Rich Environments (2009), PIAAC Problem Solving in Technology-Rich Environments: A Conceptual Framework, *OECD Education Working Papers*, No. 36, OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/220262483674.

Pitta-Pantazi, D., Sophocleous, P., & Christou, C. (2013). Spatial visualizers, object visualizers and verbalizers: Their mathematical creative abilities. *ZDM*, *45*(2), 199-213.

Polya, G. (1945/1978). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro, Brasil: Interciência.

Polya, G. (1967). *La decouvertes des mathematiques*. Paris, France: Dunnod.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. In J. P. Ponte (Ed.), *Educação matemática: Temas de investigação* (pp. 185-239). Lisboa, Portugal: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, *3*(1), 3-18.

Ponte, J. P. (1999). A investigação em didáctica da matemática pode ser (mais) relevante? In J. P. Ponte & L. Serrazina (Eds.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália* (pp. 327-336). Lisboa, Portugal: SEM-SPCE.

Ponte, J. P. (2000). Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: Que desafios? *Revista Iberoamericana de Educación*, *24*, 63-90

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI. (Ed.) *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM*, *39*, 419-430.

Ponte, J. P., Matos, J. F., Matos, J. M., & Fernandes, D. (Eds.) (1992). *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies.* Heidelberg, Germany: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58142-7.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2009). O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática*, *105*, 2-6.

Powell, A., Francisco, J., & Maher, C. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 405-435.

Prensky, M. (2001). Digital natives, digital immigrants. *On the Horizon*, *9*(5), October, (n/p.). NCB University Press.

Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 297-311.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Pugalee, D. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of students' problem solving processes. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 27-47.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa, Portugal: Gradiva.

Reiss, K., Heinze, A., Renkl, A., & Groß, C. (2008). Reasoning and Proof in Geometry: Effects of a Learning Environment based on Heuristic Worked-Out Examples. *ZDM*, *40*(3), 455-467.

Resnick, M. (2002). Rethinking Learning in the Digital Age. In G. Kirkman (Ed.), *The Global Information Technology Report: Readiness for the Networked World* (pp. 32-37). Oxford: Oxford University Press. Disponível em http://llk.media.mit.edu/papers/mres-wef.pdf.

Rink, R., & Fritzlar, T. (2014): Black and white marbles – older primary students' intuitive conceptions and approaches concerning ratios. In S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, (vol. 3, pp. 121-128). Vancouver, Canada: PME.

Robertson, I. (2001). *Problem solving.* New York, NY: Psychology Press.

Roldão, M. C. (1999). *Gestão curricular – Fundamentos e práticas*. Lisboa, Portugal: DEB.

Roldão, M. C. (2011). Formação de Professores na investigação portuguesa – Um olhar sobre a função do professor e o conhecimento profissional. *Revista Portuguesa de Investigação Educacional*, *10*, 139-155.

Rösken, B., & Rolka, K. (2006). A picture is worth a 1000 words – The role of visualization in mathematics learning. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the IGPME*, (vol. 4, pp. 457-464). Prague, Czech Republic: PME.

Russell, C. L. (2003). Minding the gap between methodological desires and practices. In D. Hodson (Ed.), *OISE Papers in STSE Education*, 4. (pp. 485-504). Toronto, Canada: University of Toronto Press with the Imperial Oil Centre for Studies in Science, Mathematics and Technology Education.

Ruthven, K. (1990). The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics, 21*(5), 431-450.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berensah & W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of thePsychology of Mathematics Education - North America*, (pp. 298-304) Raleigh, NC: North Carolina State University.

Santos, M. P. (2004). *Encontros e esperas com os ardinas de Cabo Verde: aprendizagem e participação numa prática social.* Tese de Doutoramento não publicada. Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal. Disponível em: http://sites.google.com/site/madalenapintosantos/doutoramento

Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM*, *39*, 523-536.

Santos-Trigo, M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Prática. In R. González, B. Alfonso, M. Camacho-Machín & L.J. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática XII/Investigação em educação matemática XII*, (pp. 159-187). Badajoz: SEIEM, SPCE, APM.

Santos-Trigo, M., & Barrera-Mora, F. (2007). Contrasting and looking into some mathematics education frameworks. *The Mathematics Educator*, *10*(1), 81-106.

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, *1&2*, 279-302.

Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M., & Moreno-Moreno, M. (2013). Using dynamic software to foster prospective teachers' problem solving inquiry. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds), *Proceedings of CERME 8* (pp. 2714-2723). Ankara, Turkey: Middle East Technical University, CERME.

Santos-Trigo, M., & Reyes-Rodriguez, A. (2015). The use of digital technology in finding multiple paths to solve and extend an equilateral triangle task. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(1), 58-81.

Schliemann, A. D., & Acioly , N. M. (1989). Numbers and operations in everyday problem solving. In C. Keitel, A. Bishop, P. Damerow & P. Gerdes (Eds.), *Mathematics, Education, and Society*, Document Series No. 35. Paris, France: UNESCO, Science and Technology Education.

Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1992). Proportional reasoning in and out of school. In P. Light & G. Butterworth (Eds.), *Context and Cognition*, (pp. 47-73). Hemel Hempstead, UK: Harvester-Wheatsheaf.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic.

Schoenfeld, A. (1987). Polya, Problem Solving, and Education. *Mathematics Magazine*, *60*(5), 283-291.

Schoenfeld, A. (1991). What's all the fuss about problem solving? *ZDM*, *91*(1), 4-8.

Schoenfeld, A. (1992a). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, NY: Macmillan

Schoenfeld, A. (1992b). On Paradigms and Methods: What Do You Do When the Ones You Know Don't Do What You Want Them To? issues in the Analysis of Data in the Form of Videotapes. *Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 179-214, https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_3.

Schoenfeld, A. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schoenfeld, A. (2002). Research Methods in (Mathematics) Education. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*. (pp. 435-487). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. (2007). Method. In F. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 69-107). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Schoenfeld, A. (2011). *How we think. A theory of goal-oriented decision making and its educational implications*. NY: Routledge, Taylor & Francis Group.

Schoenfeld, A. (2013). Reflections on Problem Solving Theory and Practice. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1&2), 9-34.

Schwandt, T. A. (2000). Three epistemological stances for qualitative inquiry: Interpretivism, hermeneutics, and social constructionism. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research*, (pp. 189-214). Thousand Oaks, CA: Sage.

Scribner, S. (1984). The practice of literacy: where mind and society meet. In E. Tobach, R. Falmagne, M. Parlee, L. Martin, & A. Kapelman (Eds.), *Mind and Social Practice: Selected Writings of Sylvia Scribner*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Serrazina, L., & Oliveira, I. (2002). O professor como investigador: leitura crítica de investigações em educação matemática. In GTI (Eds.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 283-308). Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

Silva, J. S. (1947). Nota. *Gazeta de Matemática*, *32*, 3-4.

Silver, E. A, Leung, S. S., & Cai, J. (1995). Generating multiple solutions for a problem: A comparison of the responses of U.S. and Japanese students. *Educational Studies in Mathematics*, *28*, 35-54.

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2011). Missing value and comparison problems: What pupils know before the teaching of proportion. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 4, pp. 185-192). Ankara, Turkey: PME.

Skovsmose, O., & Valero, P. (2002). Mathematics education in a world apart – Where we are all together. In P. Valero & O. Skovsmose (Eds.), *Proceedings of the Third International MES Conference* (pp. 1-9). Copenhagen, Denmark: Centre for Research in Learning Mathematics.

SPCE (2014). *Instrumento de Regulação Ético-Deontológica. Carta Ética*. Lisboa, Portugal: SPCE.

Stacey, K. (2006). What is mathematical thinking and why is it important. *Progress report of the APEC project: collaborative studies on innovations for teaching and learning mathematics in different cultures (II)—Lesson study focusing on mathematical thinking*. Disponível em https://tinyurl.com/hshw4ps.

Stahl, G. (2009). *Studying Virtual Math Teams*. New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0228-3.

Stahl, G. (2013). *Translating Euclid: Designing a human-centered mathematics.* San Rafael, CA: Morgan & Claypool Publishers.

Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Stake, R. (2000). The case study method in social inquiry. In R. Gomm, M. Hammersley, & P. Foster (Eds.), *Case study method: Key issues, key texts,* (pp. 20-26). London: Sage.

Stake, R. (2005). Qualitative case studies. In N. K. Denzin, & Y.S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research,* (pp. 443-466). Thousand Oaks, CA: Sage.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and* *assessing of mathematical problem solving*, (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM and Lawrence Erlbaum.

Stebbins, R. (2001). *Exploratory research in the social sciences.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Stenhouse, L. (1984). Evaluating curriculum evaluation. In C. Adelman (Ed.) *The Politics and Ethics of Evaluation,* (pp. 77-86). London: Croom Hel.

Stillman, G., & Brown, J. (2014). Evidence of implemented anticipation in mathematising by beginning modellers. *Mathematics Education Research Journal, 26*, 763-789.

Stinson, D., & Bullock, E. (2012). Critical postmodern theory in mathematics education research: a praxis of uncertainty. *Educational Studies in Mathematics, 80*(1), 41-55. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9386-x

Stoffregen, T. (2003). Affordances as properties of the animal-environment system. *Ecological Psychology, 15*(2), 115-134.

Straesser, R. (2002). On the disappearance of mathematics from society's perception. In H.-G. Weigand (Ed.), *Developments in mathematics education in German-speaking countries. Selected papers from the annual conference on didactics of mathematics,* (pp. 124-133). Hildesheim, Germany: Franzbecker.

Straesser, R. (2007). Didactics of mathematics: more than mathematics and school! *ZDM, 39*, 165-171.

Swan, J., & Pratt, J. (2003). *Educational Research in Practice. Making sense of Methodology.* London: Continuum.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2004). Levels of student responses in a spreadsheet-based environment. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* (vol. 2, pp. 423-430). Bergen, Norway.

Tapscott, D. (2009). *Grown up digital: How the Net Generation is changing your world.* New York: McGraw-Hill.

Terceiro, J. B. (1996). *Sociedad digital - Del homo sapiens al homo digitalis*. Madrid, Spain: Alianza Editorial.

Tikhomirov, O. (1981). The psychological consequences of computarization. In J. Wersht (Ed.), *Concept of activity in soviet psychology* (pp. 256-278). New York, NY: M.E. Sharpe.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions, A Model of Goal and Theory Decription in Mathematics Education.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G., & Sacristan, A. I. (2013). Technology-driven developments and policy implications for mathematics education. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education*, (pp. 753-789). New York, NY: Springer.

Tymoczko, T. (1993). Value Judgements in Mathematics: Can We Treat Mathematics as an Art? In A. White (Ed.), *Essays in Humanistic Mathematics* (pp. 67-77). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 9-35.

van den Heuvel-Panhuizen, M., Kolovou, A., & Robitzsch, A. (2013). Primary school students' strategies in early álgebra problem solving supported by an online game. *Educational Studies in Mathematics*, *84*, 281-307.

Veen, W., & Vrakking, B. (2006). *Homo Zappiens, Growing up in a Digital Age*. London, UK: Network Continuum Education.

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995) Cognition and Artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10*(1), 77-101.

Villarreal, M., & Borba, M. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and… notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM*, *42*(1), 49-62.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Waisman, I., Leikin, M., Shaul, & Leikin, R. (2014). Brain activity associated with translation between graphical and symbolic representations of functions in generally gifted and excelling in mathematics adolescents. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(3), 669-696.

Warfield, V. (2014). *Invitation to didactique*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Watson, A., Jones, K., & Pratt, D. (2013). *Key ideas in teaching mathematics: Research-based guidance for ages 9-19*. Oxford, UK: Oxford University Press.

Wedege, T., & Skott, J. (2007). Potential for change of views in the mathematics classroom? In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of CERME 5*, (pp. 389-398). Larnaca, Cyprus: CERME.

Wertsch, J. (1991). *Voices of the mind – A sociocultural approach to mediated action*. London, UK: Harvester Wheatsheaf.

Wheatley, G., Brown, D., & Solano, A. (1994). Long term relationship between spatial ability and mathematical knowledge. In D. Kirshner (Ed.), *Proceedings of the 16th North American chapter of the IGPME*, (vol. 1, pp. 225-231). Baton Rouge, LA: Louisiana State University.

Wijers, M., Jonker, V., & Drijvers, P. (2010). MobileMath: exploring mathematics outside the classroom. *ZDM*, *42*, 789-799.

Yerushalmy, M. (2000). Problem solving strategies and mathematical resources: A longitudinal view on problem solving in a function based approach to álgebra. *Educational Studies in Mathematics*, *43*(2), 25-147.

Yerushalmy, M. (2006). Slower algebra students meet faster tools: Solving algebra word problems with graphing software. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(5), 356-387.

Yin, R. (1989/2009). *Case Study Research. Design and Methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Yin, R. (2003). *Applications of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Yin, R. (2005). Introduction. In R. Yin (Ed.), *Introducing the world of education: A case study reader* (pp. xiii-xxii). Thousand Oaks, CA: Sage.

Yinger, R. (1986). Examining thought in action: a theoretical and methodological critique of research on interactive teaching. *Teaching & Teacher Education*, *2*(3), 263-282.

Zawojewski, J., & Lesh, R. (2003). A models and modeling perspective on problem solving. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 317-336). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Zevenbergen, R., & Zevenbergen, K. (2009). The numeracies of boatbuilding: new numeracies shaped by workplace technologies. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*, 183-206.

Zimmerman, W., & Cunningham, S. (1991). Editors' introduction: What is Mathematical Visualization? In W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*, (pp. 1-7). Washington, DC: MAA.

ANEXOS

Anexo A

Declaração de autorização de participação no estudo

Declaração

Eu, ____, Encarregado(a) de Educação de ____, declaro que autorizo a participação do meu educando num projeto de investigação sobre Campeonatos de Resolução de Problemas, tendo por fim uma dissertação de Doutoramento em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, conforme a seguir assinalo.

	Sim	Não
Autorizo:		
• a captura de ecrãs ---	☐	☐
• a gravação áudio --	☐	☐
• a gravação vídeo --	☐	☐
• a publicação de transcrições em artigos ------------------------------------	☐	☐
• a publicação de transcrições em brochuras e/ou monografias ------------	☐	☐
• a divulgação de excertos do vídeo em conferências e seminários -------	☐	☐
• a publicação de resoluções de problemas ----------------------------------	☐	☐
Pretendo a ocultação do rosto ---	☐	☐

Declaro, ainda, que o som ou as imagens resultantes da recolha de dados não serão utilizados para quaisquer outros fins além dos por mim autorizados, sendo sempre preservado o anonimato do meu educando.

______/______/______

O(A) Encarregado(a) de Educação,

____

Anexo B

Guião da 1.ª entrevista semiestruturada aos participantes

Introdução

- Agradecer a disponibilidade e explicar o propósito do estudo (foco na resolução de problemas de Matemática com tecnologias)
- Explicar o procedimento da entrevista: vou fazer algumas questões relacionadas com o SUB14, mas também com a Escola e as aulas de Matemática.
- Não há respostas certas nem erradas, o que pretendo é conhecer a tua opinião! Nenhum aspeto desta entrevista terá influência na tua participação no SUB14, esta é uma conversa confidencial.

Relação com a matemática e a resolução de problemas (na escola)

- Gostava que começasses por me falar um pouco das tuas aulas de Matemática. O que gostas mais? O que menos gostas nas aulas? Qual o assunto em que costumas ter mais sucesso? Qual o que achas mais difícil? Consideras-te bom aluno a Matemática? Porquê?
- Resolves problemas nas aulas de Matemática? Com que frequência? São parecidos com os do SUB14? Se sim, em que aspeto? Se não, em que diferem?

Relação com as tecnologias (na escola)

- Também gostava que me contasses um pouco mais sobre a tua relação com as tecnologias. Usas o computador/telemóvel há quanto tempo? Costumas usá-los muito? Para fazer que tipo de coisas? Que outras tecnologias usas? E com que finalidade? Quando tens tempo livre, vais para o computador? E como te distrais no computador? O que fazes? O que pesquisas? Com quem conversas?
- Utilizas tecnologias nas aulas de Matemática? Quais e em que situações? Com que finalidade/em que temática? Com que frequência? Pensas que a tecnologia pode ser útil na aprendizagem da matemática?

Relação com os campeonatos SUB12 e SUB14

- Agora vamos falar um pouquinho sobre os Campeonatos de Resolução de Problemas. Há quanto tempo participas? E lembras-te porque é que começaste a participar? Quem é que te incentiva a participar? Imagina que tens um amigo que nunca ouviu falar no

SUB14, se eu te pedisse para convenceres esse amigo a participar no Campeonato, o que é que lhe dirias?

- Também estou à procura de pistas que me ajudem a descrever como é que um participante, como tu, resolve os problemas do SUB14. Normalmente, onde é que resolves os problemas? E como é que os resolves? Usas sempre papel e lápis? Costumas usar a calculadora, o computador? Se sim, com que finalidades? Que programas usas? Como é que procedes?

- Alguém te lembra dos prazos? Quando é que vais ver o problema novo? E tentas resolver logo esse problema, ou ficas um tempo a pensar nele? Conversas com alguém sobre o problema? Se sim, o que é que discutem normalmente? (A tua estratégia de resolução? A Matemática que está envolvida? O modo de apresentar a explicação ou a resolução?) Pedes a alguém que verifique se a tua solução está correta antes de a enviar para o SUB14? E quando não consegues resolver o problema, o que fazes? Pedes ajuda? A quem?

- Normalmente, em que parte da tua resolução é que entram as tecnologias? Qual é a tecnologia que preferes usar para responder aos problemas do SUB14? Reparei que usas muito o GeoGebra/Excel/PowerPoint. Lembras-te de quando ou como é que aprendeste a usar esse programa? Onde é que aprendeste a usá-lo? Quem te ensinou a usá-lo ou ajudou a descobri-lo? E porque motivo é que escolhes esse programa para resolver estes problemas? Quando estás a resolver, em que fase desse processo é que entra o GeoGebra/Excel/PowerPoint? (usas logo desde o inicio/ para fazer um cálculo ou ver como funciona/apenas para apresentar a resposta).

Finalização

- Agradecer a disponibilidade, bem como todas as informações prestadas e a sinceridade nas opiniões. Serão certamente muito úteis para o meu estudo.

Anexo C

Guião da 1.ª entrevista semiestruturada aos encarregados de educação

Introdução

- Agradecer a disponibilidade e explicar o propósito do estudo (foco na resolução de problemas de Matemática com tecnologias)
- Explicar o procedimento da entrevista: vou fazer algumas questões relacionadas com o SUB14, mas também com a Escola e as aulas de Matemática.

Relação pessoal com a matemática escolar

- Gostava de começar por lhe pedir para me contar como era a sua relação com a Matemática, na Escola, enquanto aluno/aluna. Que memórias guarda desse tempo? O que mais o/a marcou? O que mais gostava? Como estudava? Acha que hoje, aprender Matemática é parecido com o que se fazia nessa altura?

Relação pessoal com as tecnologias

- A outra vertente do meu estudo está relacionada com o uso de tecnologias digitais. Que tecnologias costuma usar no seu dia-a-dia? E, profissionalmente, no seu trabalho? Há quanto tempo usa o telemóvel? E o computador? Frequentou algum curso de computadores? Sente-se à vontade para usar qualquer programa?

Acompanhamento das atividades do educando no âmbito do SUB14

- Procuro pistas que me ajudem a descrever como é que os concorrentes, como o/a seu/sua educando/educanda interagem com as ferramentas tecnológicas. Como é que descreveria o/a XXXXX relativamente à utilização das tecnologias?
  - que tecnologias é que ele/ela usa? Com que idade começou a usá-las? Com que finalidades? E agora, em que situações as utiliza?
  - E na Escola, acha que ele/ela também as utiliza? De que ferramentas ouve o/a XXXXX falar? E com que propósitos é que acha que as utiliza? E especificamente para aprender algum tópico matemático nas aulas, ouve o/a XXXXX comentar alguma coisa? Com que frequência? Costuma usá-las para fazer os trabalhos de casa de Matemática?

- Como descreveria o/a XXXXX, enquanto aluno/aluna? Como é que acha que o/a XXXXX aprende Matemática? Como é que ele/ela estuda Matemática? Como é que ele/ela encara a disciplina de Matemática? Sabe qual a área da Matemática que ele/ela mais gosta ou em que tem melhor desempenho? E qual é aquela que menos gosta? Qual é a que tem mais dificuldades? E qual é aquela em que tem mais sucesso?

- Também procuro pistas que me ajudem a descrever como é que os concorrentes, como o/a XXXXX, resolvem os problemas dos Campeonatos (SUB12 e SUB14): como é que descreveria a participação do/da XXXXX nos SUBs?
  - Como é que o/a XXXXX encara a sua própria participação nos SUBs? É responsável, olha para os problemas como um dever, como um desafio, tem prazer em resolvê-los? Está atento/atenta à página do Campeonato? Ao email? Fala dos problemas em casa? E quando publicam resoluções dele/dela na página? Ele/Ela partilha preocupações sobre a dificuldade dos problemas? Costuma pedir ajuda? Como é que lhe presta ajuda?
  - Onde é que o/a XXXXX resolve os problemas? E como é que os resolve? Utiliza papel e lápis ou mais alguma ferramenta? Qual/quais?
  - Costumam discutir a matemática que está envolvida em cada problema? De que forma?
  - Como é que surge a ideia de usar uma determinada estratégia?
  - Como é que o/a XXXXX apresenta as suas resoluções à equipa do SUB14?
  - Que programas informáticos é que o/a XXXXX mais costuma usar para resolver os problemas ou para explicar o seu raciocínio?

Finalização

- Agradecer a disponibilidade e o acolhimento, bem como todas as informações fornecidas e a sinceridade nas opiniões. Serão certamente muito úteis para o meu estudo.

Anexo D

Guião da entrevista em profundidade a Jéssica

Sobre a resolução do problema 'A marcação do canteiro'

- Agora vou pedir-te que te tentes lembrar de como resolveste o problema 6 da edição do ano passado, o do canteiro da Rosa e do jardineiro, recordas-te? Gostava que fosses contando todos os pormenores de que te lembrares… tenho aqui o enunciado do problema e a tua resolução, queres espreitar? Tenta lembrar-te do máximo de pormenores que conseguires… como é que tiveste acesso ao problema? Como é que pensaste que o ias resolver?
- Que matemática pensaste que ias usar? Também anexaste uma construção do canteiro em GeoGebra. Em que fase da tua resolução decidiste recorrer ao GeoGebra? (Logo no início para explorar o problema, a meio para garantir que o raciocínio fazia sentido, no final para comprovar o resultado).
- Construíste a figura no GeoGebra sozinha ou tiveste ajuda de alguém? Consegues lembrar-te exatamente de como é que procedeste para construir essa figura? E porque construíste aquele segmento (que funciona como seletor)? Qual a sua finalidade nesta construção? Podias ter determinado as áreas pedidas para ver quem tinha razão… porque não o fizeste?

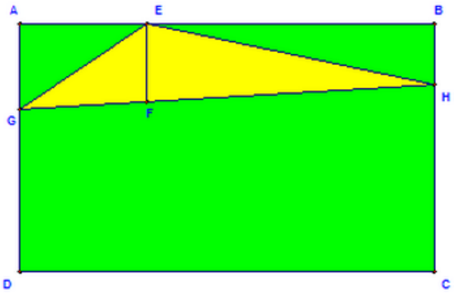
Sobre a resolução do problema 'Unidos e cortados'

- Agora vou pedir-te para me contares exatamente como resolveste o problema 5 desta edição. Consegues? Gostava que começasses do início… tenta lembrar-te de tudo o que fizeste para resolver o problema. Tenho aqui o enunciado e a tua resolução. Podes ver para te ajudar a lembrar. Quando acedeste ao problema? Imprimiste o enunciado? Quantos dias demoraste a resolver? Quem ajudou e de que forma?
- Que conhecimentos matemáticos é que pensaste que ias ter que usar? Definiste logo a tua estratégia à partida?
- Também usaste o GeoGebra neste problema, não foi? Porque é que optaste por ir ao GeoGebra? E em que fase da tua resolução é que foste fazer os esquemas (ex: antes de resolver, a meio, no final)? Pensaste que esse esquema no GGB podia ser útil para o quê precisamente? (ex: no cálculo, no raciocínio, na apresentação da resolução).
- Fizeste um esquema desse tipo em papel antes? E porque é que apresentaste os cálculos todos? (podias ter determinado a área pedida no GeoGebra).
- Agradecimento final.

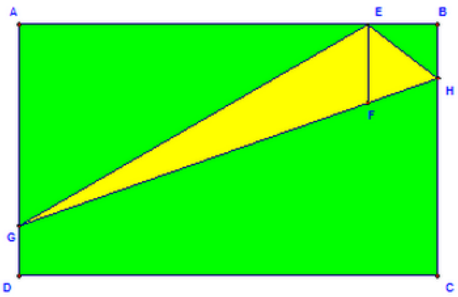
Enunciado do problema "A marcação do canteiro"

SUB14 - Problema 6
A marcação do canteiro

A Rosa explicou ao seu jardineiro que queria colocar uma zona de flores triangular no seu jardim de relva rectangular. E acrescentou que a área do triângulo ficaria ao critério do jardineiro. O bom do empregado pegou numa vara de 2 metros, estendeu-a perpendicularmente a um dos bordos do jardim, num ponto ao acaso (E). Depois, com um fio, traçou uma linha que passava pela extremidade da vara (F) e que unia os dois lados opostos do rectângulo, obtendo o triângulo amarelo [EGH]



No dia seguinte, a Rosa olhou para o triângulo e não gostou, mudou a mesma vara para outro ponto ao acaso da borda do jardim e traçou outra linha que passava pela extremidade da vara e unia os dois lados opostos do rectângulo (obtendo outro triângulo amarelo [EGH]).



Quando lá chegou, o jardineiro protestou, dizendo que a área para as flores tinha diminuído. Mas a Rosa garantiu-lhe que não. Quem tem razão e porquê?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Resolução do problema

Camisola	Nome	Turma	Escola	Concelho	E-mail

Resposta:

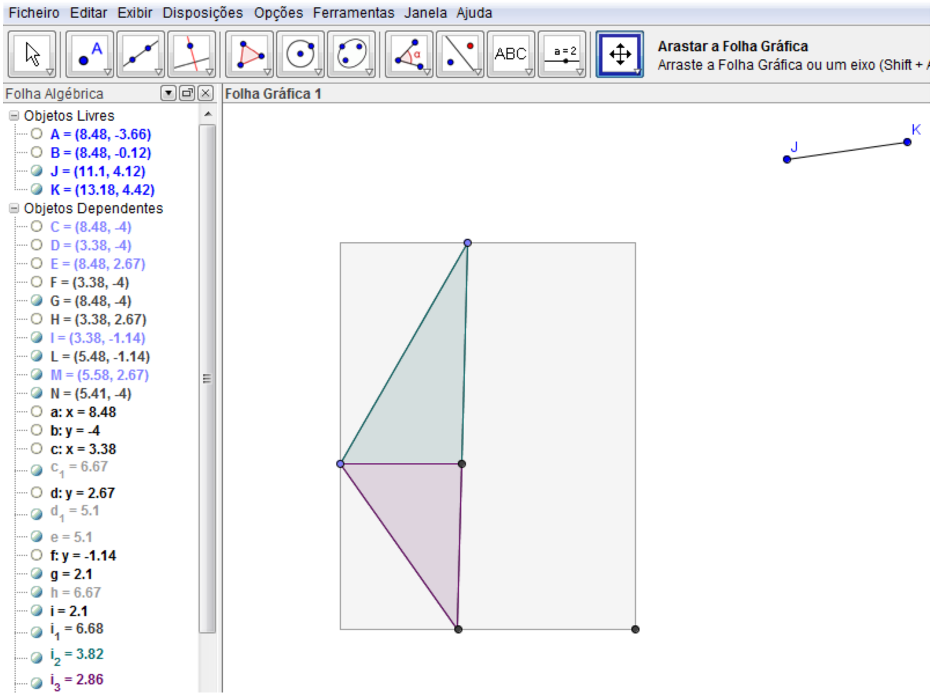
O triângulo amarelo (zona de flores) está dividido em dois triângulos pela vara de 2 metros que o jardineiro colocou. Sabemos que a base desses dois triângulos mede 2 metros _ o comprimento da vara.

Para medir a área de um triângulo, fazemos a seguinte conta: altura x base / 2

Para medir a área desses dois triângulos, será então: altura x 2 / 2. Ora, está claro que 2 / 2 = 1, portanto, a área desses dois triângulos é igual à sua altura.

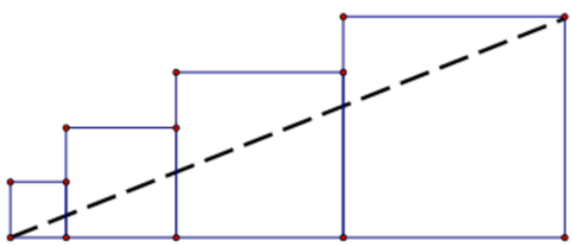
Podemos afirmar que a soma das alturas dos dois triângulos é igual ao comprimento do rectângulo (jardim de relva). Portanto, a área da zona das flores é igual ao comprimento do jardim de relva rectângular.

Se o comprimento do rectângulo (jardim de relva) não muda, então a área do triângulo (zona de flores) também se mantém. Por outras palavras, a Rosa tem razão.



Enunciado do problema "Unidos e cortados"

Unidos e cortados



Considera uma sequência de quadrados de lados 1, 2, 3, 4,... centímetros, dispostos de modo a ficarem unidos uns aos outros, como ilustra a figura. Depois de juntos, cortam-se todos os quadrados segundo uma linha que parte do vértice inferior esquerdo do quadrado menor até ao vértice superior direito do quadrado maior. Qual é a área que fica acima da linha de corte se a sequência tiver 8 quadrados?

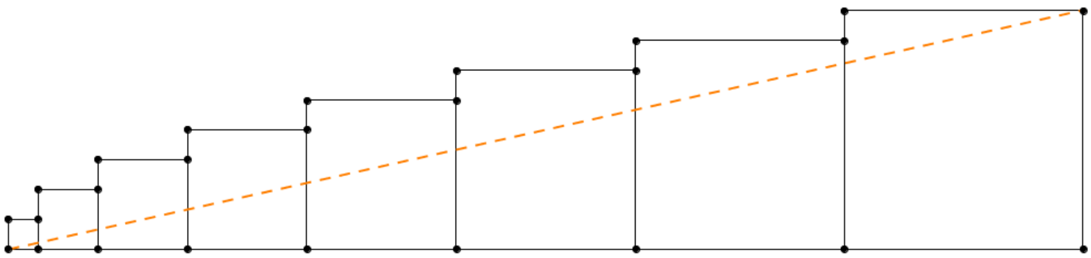
Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Resolução do problema

Resolução do 5º problema do SUB14
"Unidos e cortados"

A figura representa uma sequência de 8 quadrados e lados 1, 2, 3, 4,... centímetros, dispostos de modo a ficarem unidos uns aos outros. Depois de juntos, cortou-se a figura segundo uma linha que parte do vértice inferior esquerdo do quadrado menor até ao vértice superior direito do quadrado maior.

No meio raciocínio, o número do quadrado será o valor do seu lado. Por exemplo, o quadrado 1 é aquele que tem lado 1.



A área total da figura, antes de ser cortada, é de 204 cm^2, visto que:

$A_{quadrado} = l^2$

$A_{quadrado\ 1} = 1^2 = 1\ cm^2$

$A_{quadrado\ 2} = 2^2 = 4\ cm^2$

$A_{quadrado\ 3} = 3^2 = 9\ cm^2$

$A_{quadrado\ 4} = 4^2 = 16\ cm^2$

$A_{quadrado\ 5} = 5^2 = 25\ cm^2$

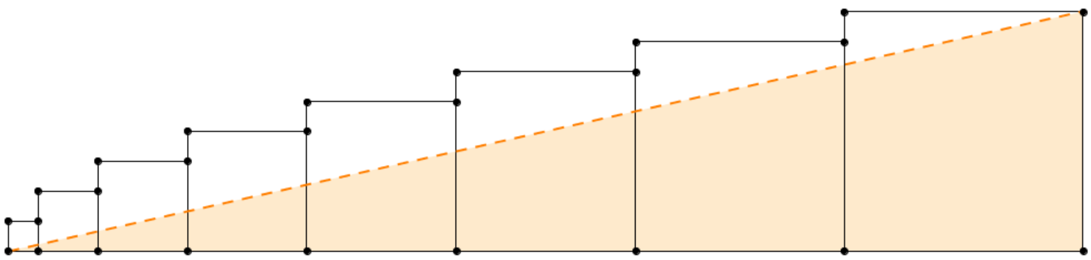
$A_{quadrado\ 6} = 6^2 = 36\ cm^2$

$A_{quadrado\ 7} = 7^2 = 49\ cm^2$

$A_{quadrado\ 8} = 8^2 = 64\ cm^2$

$A_{figura\ total} = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204\ cm^2$

Ao cortarmos a figura pelo segmento de reta laranja, verificamos que a parte abaixo da linha é um triângulo retângulo, como mostra a figura seguinte:



A altura desse triângulo (que designei de triângulo A) é 8 centímetros, pois é a medida do lado do quadrado 8. A base do mesmo triângulo mede 36 centímetros, porque é a soma dos lados dos 8 quadrados.

$$\overline{base\ triângulo\ A} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36\ cm$$

Assim podemos afirmar que a área do triângulo A é 144 cm^2, visto que:

$$A_{triângulo} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{triângulo\ A} = \frac{36\ cm \times 8\ cm}{2} = \frac{288\ cm^2}{2} = 144\ cm^2$$

Se subtrairmos a área do triângulo A à área total da figura, ficaremos com a área da figura que fica acima do segmento de reta laranja. Portanto:

$$A_{parte\ da\ figura\ acima\ da\ linha\ laranja} = A_{figura\ total} - A_{triângulo\ A}$$

$$A_{parte\ da\ figura\ acima\ da\ linha\ laranja} = 204\ cm^2 - 144\ cm^2 = 60\ cm^2$$

Resposta: A área que fica acima da linha de corte é de 60 cm^2.

Anexo E

Guião da entrevista em profundidade a Marco

- Agora vou pedir-te que te tentes lembrar de como resolveste o problema 8 desta edição – o das baterias da máquina de filmar. Foi há pouco tempo. O que achaste desse problema? Consegues descrever exatamente tudo o que fizeste para o resolver?

- Tenta começar do início e tenta lembrar-te de tudo o que fizeste para resolver o problema. Quando acedeste ao problema? Imprimiste o enunciado? Quantos dias demoraste a resolver, quem ajudou e de que forma?

- Definiste logo a tua estratégia à partida? Que conhecimentos matemáticos é que pensaste que ias ter que usar? Levaste o problema para a escola? Discutiste o problema com alguém na escola?

- Tenho aqui um resumo do teu trabalho. Queres espreitar? Se calhar ajuda-te a lembrares-te melhor. Tenho aqui o enunciado do problema, a tua primeira resposta, o feedback que a equipa do SUB14 te deu e a tua nova resposta. Explica-me como pensaste aqui, da 1ª vez. Porque decidiste incluir o gráfico? Como é que o construíste?

- Prestaste atenção à resposta da equipa do SUB14? Foi útil o que te disseram? Como é que isso te influenciou? Tiveste ajuda para perceber melhor essas informações?

- E para construir a tua segunda resolução, tiveste ajuda? Como é que pensaste dessa 2ª vez? Também tentaste fazer um gráfico? Que matemática usaste nessa resolução? (Que conceitos ou ideias ou conhecimentos)

- No ficheiro que enviaste, o formato ods não permite ver as fórmulas. Utilizaste fórmulas na folha de cálculo ou resolveste de outra forma? Como é que aprendeste a usar fórmulas? Como/Com quem aprendeste? Porque pintaste aquela linha de amarelo? Onde aprendeste a resolver problemas deste tipo desta maneira?

- Agradecimento final.

Enunciado do problema

Enquanto dura a bateria

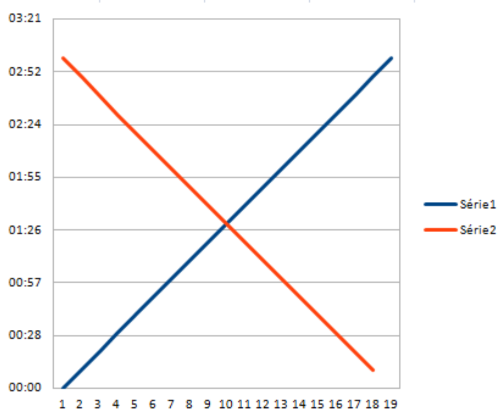
A Bárbara pediu à mãe a câmara de vídeo para filmar o ensaio geral da peça de teatro que está a preparar com os seus colegas no clube de teatro. Ela sabe que a bateria da câmara dura 2 horas se estiver em modo de gravação e 3 horas se estiver em modo de reprodução. A Bárbara quer gravar o ensaio e logo a seguir visionar o vídeo gravado com os colegas e não pode voltar a carregar a bateria. Qual é o tempo máximo, em minutos, que ela poderá gravar do ensaio para conseguir visionar tudo o que gravou, logo depois?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

1.ª resolução submetida

B	C
00:00	03:00
00:10	02:50
00:20	02:40
00:30	02:30
00:40	02:20
00:50	02:10
01:00	02:00
01:10	01:50
01:20	01:40
01:30	01:30
01:40	01:20
01:50	01:10
02:00	01:00
02:10	00:50
02:20	00:40
02:30	00:30
02:40	00:20
02:50	00:10
03:00	#N/D

R:O tempo máximo que ela consegue filmar e 1 hora e meia para também conseguir ver o que gravou.



Feedback da Organização do SUB14

RE: Resposta_SUB14

Voltar a mensagens

Para ver mensagens relacionadas com esta, deve agrupar mensagens por conversação.

sub14 campeonato

Para [redacted]

24-04-2012

Responder

[redacted]

Recebeste o nosso email com o convite para participar no estudo sobre o Sub14? É muito importante!
Não te esqueças de falar com o teu encarregado de educação.

Bem, agora em relação à tua resolução do problema 8, que está muito gira e criativa, vais ter que pensar mais um pouco. A tua resposta final não está certa.
Cá fica uma dica.
Vamos supor que a Bárbara grava mesmo um filme com a duração de 1h30. Como a bateria dura 2h se estiver só a gravar, significa que no final já só rsta 25% da carga, não é? (Pois 1h30 representa 75% de 2h). E será que 25% da carga dá para visionar o filme de 1h30?
Esperamos ter ajudado!

Ficamos a aguardar que corrijas esta resolução e que nos digas se pretendes colaborar connosco no tal estudo!
Até breve,
SUB14

2ª resolução submetida

Gravação		Reprodução	
Tempo de Gravação (min)	% carga utilizada	% carga restante	Tempo de Reproduçã o (min)
120	100,00%	0,00%	0
119	99,17%	0,83%	1,5
118	98,33%	1,67%	3
117	97,50%	2,50%	4,5
116	96,67%	3,33%	6
115	95,83%	4,17%	7,5
114	95,00%	5,00%	9
113	94,17%	5,83%	10,5
112	93,33%	6,67%	12
111	92,50%	7,50%	13,5
110	91,67%	8,33%	15
109	90,83%	9,17%	16,5
108	90,00%	10,00%	18
107	89,17%	10,83%	19,5
106	88,33%	11,67%	21
105	87,50%	12,50%	22,5
104	86,67%	13,33%	24
103	85,83%	14,17%	25,5
102	85,00%	15,00%	27
101	84,17%	15,83%	28,5
100	83,33%	16,67%	30
99	82,50%	17,50%	31,5
98	81,67%	18,33%	33

R:O tempo máximo que ela pode filmar são 72 minutos.

B	C	D	E
98	81,67%	18,33%	33
97	80,83%	19,17%	34,5
96	80,00%	20,00%	36
95	79,17%	20,83%	37,5
94	78,33%	21,67%	39
93	77,50%	22,50%	40,5
92	76,67%	23,33%	42
91	75,83%	24,17%	43,5
90	75,00%	25,00%	45
89	74,17%	25,83%	46,5
88	73,33%	26,67%	48
87	72,50%	27,50%	49,5
86	71,67%	28,33%	51
85	70,83%	29,17%	52,5
84	70,00%	30,00%	54
83	69,17%	30,83%	55,5
82	68,33%	31,67%	57
81	67,50%	32,50%	58,5
80	66,67%	33,33%	60
79	65,83%	34,17%	61,5
78	65,00%	35,00%	63
77	64,17%	35,83%	64,5
76	63,33%	36,67%	66
75	62,50%	37,50%	67,5
74	61,67%	38,33%	69
73	60,83%	39,17%	70,5
72	**60,00%**	**40,00%**	**72**

B	C	D	E
74	61,67%	38,33%	69
73	60,83%	39,17%	70,5
72	**60,00%**	**40,00%**	**72**
71	59,17%	40,83%	73,5
70	58,33%	41,67%	75
69	57,50%	42,50%	76,5
68	56,67%	43,33%	78
67	55,83%	44,17%	79,5
66	55,00%	45,00%	81
65	54,17%	45,83%	82,5
64	53,33%	46,67%	84
63	52,50%	47,50%	85,5
62	51,67%	48,33%	87
61	50,83%	49,17%	88,5
60	50,00%	50,00%	90
59	49,17%	50,83%	91,5
58	48,33%	51,67%	93
57	47,50%	52,50%	94,5
56	46,67%	53,33%	96
55	45,83%	54,17%	97,5
54	45,00%	55,00%	99
53	44,17%	55,83%	100,5
52	43,33%	56,67%	102
51	42,50%	57,50%	103,5
50	41,67%	58,33%	105
49	40,83%	59,17%	106,5
48	40,00%	60,00%	108

B	C	D	E
23	19,17%	80,83%	145,5
22	18,33%	81,67%	147
21	17,50%	82,50%	148,5
20	16,67%	83,33%	150
19	15,83%	84,17%	151,5
18	15,00%	85,00%	153
17	14,17%	85,83%	154,5
16	13,33%	86,67%	156
15	12,50%	87,50%	157,5
14	11,67%	88,33%	159
13	10,83%	89,17%	160,5
12	10,00%	90,00%	162
11	9,17%	90,83%	163,5
10	8,33%	91,67%	165
9	7,50%	92,50%	166,5
8	6,67%	93,33%	168
7	5,83%	94,17%	169,5
6	5,00%	95,00%	171
5	4,17%	95,83%	172,5
4	3,33%	96,67%	174
3	2,50%	97,50%	175,5
2	1,67%	98,33%	177
1	0,83%	99,17%	178,5
0	0,00%	100,00%	180

Anexo F

Guião da entrevista em profundidade a Beatriz

- Agora vou pedir-te que te tentes lembrar de como resolveste o problema 7 desta edição – o das sopas, o Almoço de Colegas. O que achaste desse problema? Consegues descrever exatamente tudo o que fizeste para o resolver? Trouxe aqui o problema e a tua apresentação PowerPoint, caso queiras espreitar e te ajude a lembrar melhor.

- Tenta começar do início e lembrar-te de tudo o que fizeste para resolver o problema. Acedeste ao site logo no dia de lançamento do problema? Imprimiste o enunciado? Quantos dias demoraste a resolver, quem ajudou e de que forma?

- Definiste logo a tua estratégia à partida? Que conhecimentos matemáticos é que pensaste que ias ter que usar? Levaste o problema para a escola? Discutiste o problema com alguém na escola? Com quem e o que discutiram?

- Antes de contruíres os slides, fizeste algum esquema parecido com papel e lápis? Era semelhante e quê? Era diferente em quê? Consegues reproduzi-lo?

- Ainda em relação a esta tua resolução, como é que surgiu a ideia de compor os pratos e usar estas cores? E porque é que apresentaste a mesma informação de três formas? (os pratos, os símbolos à direita e o texto em baixo).

- Costumas utilizar o PowerPoint nas tuas respostas, não é? Parece que usas sempre esta estrutura de vários slides, porquê? E porque é que optaste por este programa? Normalmente, em que fase da tua resolução é que vais ao PowerPoint? (ex: antes de resolver, a meio, no final para compor a apresentação)?

- Agradecimento final.

Enunciado do problema 'Almoço de colegas'

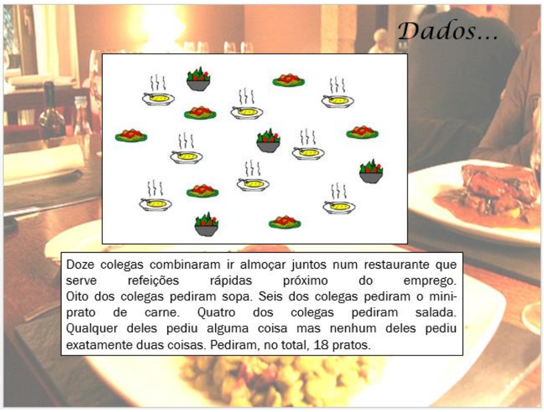

Almoço de colegas

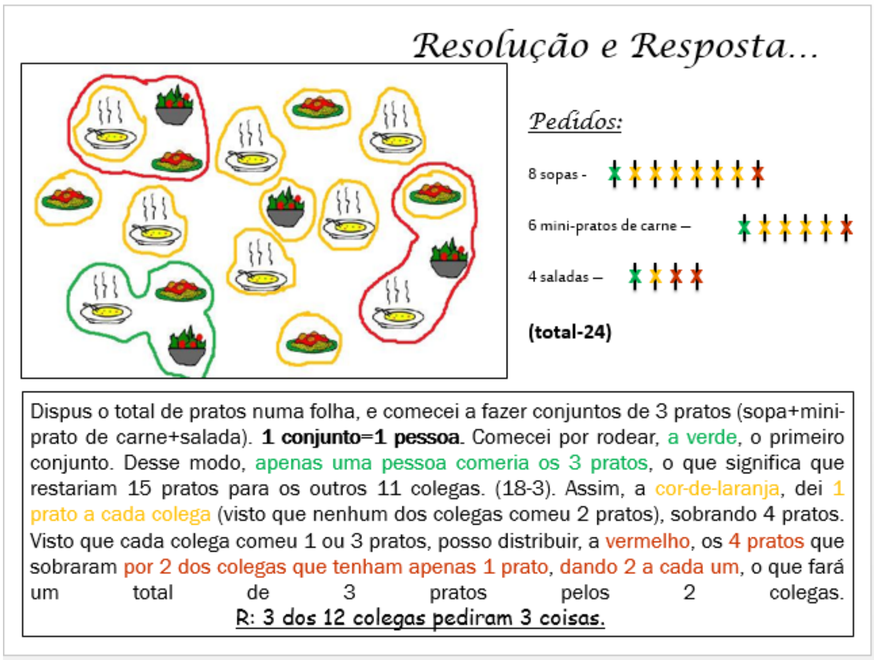
Doze colegas combinaram ir almoçar juntos num restaurante que serve refeições rápidas próximo do emprego.
Oito dos colegas pediram sopa. Seis dos colegas pediram o mini-prato de carne. Quatro dos colegas pediram salada.
Qualquer deles pediu alguma coisa mas nenhum deles pediu exatamente duas coisas.

Quantos dos colegas pediram as três coisas?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Resolução submetida





Anexo G

Problemas propostos no SUB14 – edição 2010/2011

SUB14 - Problema 1
Leitura de férias

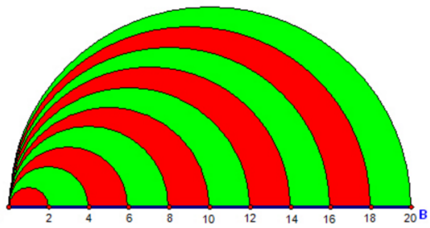
O Gil recebeu um livro como prenda de Natal, que leu nas férias em 4 dias.
No 1º dia leu um terço do livro. No 2º dia leu um terço do que faltava. No 3º dia leu tanto como no 2º dia e mais 10 páginas. No 4º dia leu as 30 páginas que faltavam para acabar o livro.
Quantas páginas tinha o livro do Gil?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Resoluções | 7º ano Listas | 8º ano Listas

SUB14 - Problema 2
Um projecto para a sala de convívio

O grupo do António está a fazer um projecto de educação visual para decorar uma das paredes da sala de convívio. O professor explicou que o projecto teria de ser baseado em arcos de circunferência e poderia ser colorido com duas cores à escolha dos alunos. O António e os colegas tiveram uma ideia que até parece inspirada no símbolo da Universidade do Algarve...
O desenho que eles fizeram começa com um segmento de recta AB, com **20 cm**, que é dividido em 10 partes iguais e cada arco é uma semicircunferência. A área entre dois arcos consecutivos é pintada alternadamente de vermelho e de verde.



Qual é o valor da diferença entre a área pintada de verde e a área pintada de vermelho?

Área do círculo: $A = \pi \times r^2$

Área do semicírculo: $A = \frac{\pi}{2} \times r^2$

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Resoluções | 7º ano Listas | 8º ano Listas

SUB14 - Problema 3
Números num tetraedro

Distribuíram-se quatro números **pares consecutivos** pelos vértices de um tetraedro. A cada face foi atribuído o número que resultou da soma dos três números colocados nos vértices que definem a respectiva face. Depois somaram-se os números que ficaram atribuídos **às faces** do tetraedro e o total deu 132.

Quais foram os números que foram colocados nos vértices do tetraedro?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Resoluções | 7º ano Listas | 8º ano Listas

SUB14 - Problema 4
As idades dos irmãos

A Soraia tem 3 anos de diferença do seu irmão mais velho. Daqui a 9 anos, a diferença entre as idades dos irmãos continuará a ser a mesma mas o produto das idades de ambos irá aumentar 288 unidades.

Quais são as idades dos dois irmãos?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Resoluções | 7º ano Listas | 8º ano Listas

SUB14 - Problema 5
A casa de chá

Quatro amigos combinaram juntar-se para lanchar numa casa de chá, conhecida pelos chás de variados sabores e pelos biscoitos que o acompanham. Cada um deles experimentou um sabor de chá diferente e cada um deles provou uma qualidade de biscoitos diferente. Nem todos gostaram do que pediram na casa de chá. Com base nas pistas que se seguem, encontra o nome e o apelido de cada um dos quatro amigos, o tipo de chá que provou e a qualidade de biscoitos que comeu.

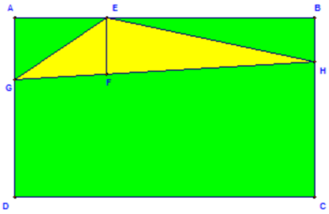
- O Sr. Costa não gostou do chá de canela.
- O Tiago comeu biscoitos de corintos.
- Quem comeu biscoitos de maçã não gostou do chá de menta.
- A Sara, cujo apelido é Mendes, não comeu biscoitos de chocolate.
- O Mário não gostou do chá de flor de laranja.
- A Sofia gostou do chá verde e conversou com o Sr. Paiva.
- Um dos amigos, de apelido Torres, comeu biscoitos de manteiga.

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

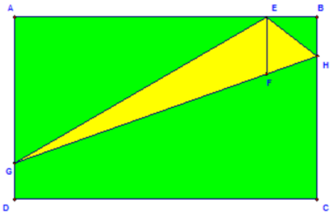
Resoluções | 7º ano Listas | 8º ano Listas

SUB14 - Problema 6
A marcação do canteiro

A Rosa explicou ao seu jardineiro que queria colocar uma zona de flores triangular no seu jardim de relva rectangular. E acrescentou que a área do triângulo ficaria ao critério do jardineiro. O bom do empregado pegou numa vara de 2 metros, estendeu-a perpendicularmente a um dos bordos do jardim, num ponto ao acaso (E). Depois, com um fio, traçou uma linha que passava pela extremidade da vara (F) e que unia os dois lados opostos do rectângulo, obtendo o triângulo amarelo [EGH]



No dia seguinte, a Rosa olhou para o triângulo e não gostou, mudou a mesma vara para outro ponto ao acaso da borda do jardim e traçou outra linha que passava pela extremidade da vara e unia os dois lados opostos do rectângulo (obtendo outro triângulo amarelo [EGH]).



Quando lá chegou, o jardineiro protestou, dizendo que a área para as flores tinha diminuído. Mas a Rosa garantiu-lhe que não. Quem tem razão e porquê?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Resoluções | 7º ano Listas | 8º ano Listas

SUB14 - Problema 7
Pintores e mais pintores

A empresa "Pinta Bem" enviou 8 pintores para pintar um hotel. Sabe-se que esses 8 trabalhadores vão demorar 34 dias nessa obra. Se a eles se juntarem 24 outros pintores, 10 dias depois de o trabalho ter começado, quantos dias serão necessários para concluírem o trabalho?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Resoluções | 7º ano Listas | 8º ano Listas

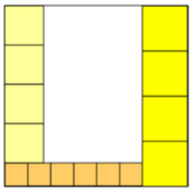
SUB14 - Problema 8
A viagem de carro pela Europa

O Sr. Américo e a família vão fazer uma viagem de automóvel pela Europa. No total vão percorrer 6000 km. Por precaução comprou 5 pneus novos, levando 1 deles de reserva. Ao longo da viagem vai trocando o pneu suplente de modo a cada pneu rode o mesmo número de quilómetros. Quantos quilómetros irá rodar cada um dos 5 pneus?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Resoluções | 7º ano Listas | 8º ano Listas

SUB14 - Problema 9
Um quadrado dividido



Na figura está representado um quadrado que foi dividido em 14 quadrados representados a amarelo, de dimensões diferentes e inteiras, e 1 rectângulo representado a branco, também de dimensões inteiras. O rectângulo branco tem 30464 cm^2 de área.
Qual é a área do quadrado grande?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Enviar Resposta Download

SUB14 - Problema 10
Laranjas à venda

Uma vendedora de fruta está habitualmente junto à estrada a vender sacos de laranjas. No outro dia tinha um certo número de sacos de laranjas para venda. Ao primeiro cliente vendeu metade desses sacos e mais metade de um saco. Ao segundo cliente vendeu metade do que restava e mais metade de um saco. Ao terceiro cliente vendeu metade do que restava e mais metade de um saco. Depois disso, ela ficou com 4 sacos.
Quantos sacos de laranjas tinha no início?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Enviar Resposta Download

Anexo H

Problemas propostos no SUB14 – edição 2011/2012

Problema 1

Data de Publicação:
9 de janeiro de 2012

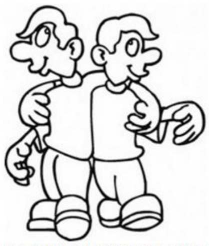
Data limite de resolução:
22 de janeiro de 2012

Resolução do Problema

Classificação 7º ano

Classificação 8º ano

E lá se encontraram…



O Alexandre e o Bernardo vivem a uma distância de 22 km um do outro e querem encontrar-se mas só têm uma forma de fazer o caminho… a pé!
Nas férias decidem que irão ao encontro um do outro logo de manhã. O Alexandre parte da sua casa às 8 horas da manhã e vai caminhando a uma velocidade de 4 km por hora. O Bernardo sai de casa uma hora mais tarde e caminha a uma velocidade de 5 km por hora.

Nenhum dos dois amigos levou relógio mas é possível saber a que horas se encontraram. Que horas eram?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 2

Data de Publicação:
23 de janeiro de 2012

Data limite de resolução:
5 de fevereiro de 2012

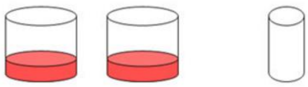
Resolução do Problema

Classificação 7º ano

Classificação 8º ano

A tinta que sobrou

A Miriam gosta de dedicar o tempo livre a fazer decorações em sua casa. Recentemente, pôs mãos à obra e decidiu pintar o seu escritório.
Na hora de arrumar tudo, já muito satisfeita com o trabalho concluído, verificou que tinham sobrado duas latas, cada uma cheia até um quarto da altura. Resolveu juntar o conteúdo das duas latas numa lata mais pequena, com metade do diâmetro das outras duas e com a mesma altura. E achou que nessa lata mais pequena caberia exatamente o conteúdo das outras duas.
Será que tem razão?



$$V_{cilindro} = Área\ base \times h$$

$$Área\ base = \pi r^2$$

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 3

Data de Publicação:
6 de fevereiro de 2012

Data limite de resolução:
19 de Fevereiro de 2012

Resolução do Problema

Classificação 7º ano

Classificação 8º ano

Até encher o tanque

O Sr. Bonifácio tem um tanque na sua horta que precisa de encher regularmente, podendo usar duas torneiras com caudais diferentes. Uma das torneiras enche um tanque em 6 horas e outra torneira enche o mesmo tanque em 3 horas. Logo pela manhã, o Sr. Bonifácio viu o tanque vazio e abriu a primeira torneira (que deita menos). Quando o tanque estava a meio da sua capacidade decidiu abrir também a segunda torneira (que deita mais) para ser mais rápido. Quanto tempo demorou o tanque a encher, desde que ele abriu a primeira torneira?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 4

Data de Publicação:
20 de fevereiro de 2012

Data limite de resolução:
4 de março de 2012

Resolução do Problema

Classificação 7º ano

Classificação 8º ano

Rebuçados para as amigas…

No dia de S. Valentim, o Daniel levou para a escola um saco com 100 rebuçados. Resolveu distribuí-los pelas suas amigas preferidas, de modo que cada amiga recebeu pelo menos um rebuçado e nenhuma das amigas recebeu o mesmo número de rebuçados que outra.

Qual o maior número de amigas que poderá ter recebido rebuçados?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 5

Data de Publicação:
05 de março de 2012

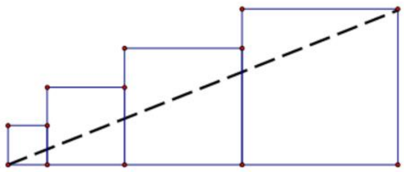
Data limite de resolução:
18 de março de 2012

Resolução do Problema

Classificação 7º ano

Classificação 8º ano

Unidos e cortados



Considera uma sequência de quadrados de lados 1, 2, 3, 4,… centímetros, dispostos de modo a ficarem unidos uns aos outros, como ilustra a figura. Depois de juntos, cortam-se todos os quadrados segundo uma linha que parte do vértice inferior esquerdo do quadrado menor até ao vértice superior direito do quadrado maior. Qual é a área que fica acima da linha de corte se a sequência tiver 8 quadrados?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 6

Data de Publicação:
19 de março de 2012

Data limite de resolução:
1 de abril de 2012

Resolução do Problema

Classificação 7º ano

Classificação 8º ano

Livros ilustrados e ilustradores

A Sara, o Rui, a Lia e o Pedro vão ilustrar quatro livros infantis.
Um dos livros tem 110 página, outro 170, outro 233 e o último 312. No final, verificaram que tinham feito 168 desenhos, ao todo.
O Pedro fez cinco vezes mais desenhos do que a Lia; o Rui fez metade do número de desenhos da Sara e foi um dos que usou três cores. A Sara fez exatamente um desenho por cada três páginas do livro que ilustrou, enquanto a Lia usou quatro cores no livro de 110 páginas. O que fez mais desenhos só usou duas cores. O livro que o Pedro ilustrou tem menos páginas do que o do Rui.

Quantas páginas e ilustrações tem cada livro, quem foi o ilustrador e quantas cores usou?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 7

Data de Publicação:
2 de abril de 2012

Data limite de resolução:
15 de abril de 2012

Resolução do Problema

Classificação 7º ano

Classificação 8º ano

Almoço de colegas

Doze colegas combinaram ir almoçar juntos num restaurante que serve refeições rápidas próximo do emprego.
Oito dos colegas pediram sopa. Seis dos colegas pediram o mini-prato de carne. Quatro dos colegas pediram salada.
Qualquer deles pediu alguma coisa mas nenhum deles pediu exatamente duas coisas.

Quantos dos colegas pediram as três coisas?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 8

Data de Publicação:
30 de abril de 2012

Data limite de resolução:
13 de maio de 2012

Resolução do Problema

Classificação 7º ano

Classificação 8º ano

Enquanto dura a bateria

A Bárbara pediu à mãe a câmara de vídeo para filmar o ensaio geral da peça de teatro que está a preparar com os seus colegas no clube de teatro. Ela sabe que a bateria da câmara dura 2 horas se estiver em modo de gravação e 3 horas se estiver em modo de reprodução. A Bárbara quer gravar o ensaio e logo a seguir visionar o vídeo gravado com os colegas e não pode voltar a carregar a bateria.
Qual é o tempo máximo, em minutos, que ela poderá gravar do ensaio para conseguir visionar tudo o que gravou, logo depois?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 9

Data de Publicação:
30 de abril de 2012

Data limite de resolução:
13 de maio de 2012

Resolução do Problema

Classificação 7º ano

Classificação 8º ano

O preço certo das garrafas

A Alexandra comprou várias garrafas de água mineral. Se cada garrafa custasse menos 20 cêntimos do que custou, ela poderia ter comprado mais 5 garrafas, com o mesmo dinheiro. Mas se cada garrafa custasse mais 20 cêntimos do que custou, ela teria de comprar menos 3 garrafas com o mesmo dinheiro.

Quanto custou cada garrafa de água e quantas garrafas comprou a Alexandra?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 10

Data de Publicação:
14 de maio de 2012

Data limite de resolução:
27 de maio de 2012

Resolução do Problema

Classificação 7º ano

Classificação 8º ano

O número do Bruno

Com os dígitos **1, 2, 3, 4, 5, 6** o Bruno formou um número de seis algarismos distintos, *ABCDEF*. Sabe-se que o número de três algarismos *ABC* é múltiplo de 4, o número de três algarismos *BCD* é múltiplo de 5; o número de três algarismos *CDE* é múltiplo de 3 e o número de três algarismos *DEF* é múltiplo de 11.

Que número formou o Bruno?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Anexo I

Problemas Experimentais

Problema Experimental 1

Data de Publicação:
01/07/2012

Data limite de resolução:
31/07/2012

Enviar Resolução

Download em PDF

Médias no teste de Matemática

A turma do João e da Joana tem 25 alunos. No último teste de Matemática verificou-se o seguinte:
- A média das notas dos alunos da turma foi 10,2 valores.
- A média das notas das raparigas foi 12,0 valores.
- A média das notas dos rapazes foi 9,5 valores.

Quantas raparigas e quantos rapazes tem a turma do João e da Joana?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema Experimental 2

Data de Publicação:
01/07/2012

Data limite de resolução:
31/07/2012

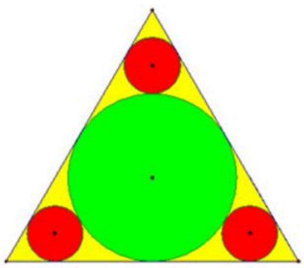
Enviar Resolução

Download em PDF

Motivo decorativo

Na figura está representado um motivo que irá ser usado para construir um vitral.
O triângulo é equilátero e tem de altura 12 cm. Os círculos são tangentes ao triângulo e também tangentes dois a dois.

Qual é o comprimento do raio de cada círculo pequeno?



Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema Experimental 3

Data de Publicação:
01/07/2012

Data limite de resolução:
31/07/2012

Enviar Resolução

Download em PDF

Uma troca de bolas

O Afonso e o Bernardo vivem em extremos opostos da mesma rua. O Afonso tinha uma bola que o Bernardo lhe emprestou e o Bernardo tinha uma bola que o Afonso lhe emprestou.
Ambos saíram, ao mesmo tempo, das respetivas casas, para trocarem de bolas. A velocidade do Bernardo foi o dobro da velocidade do Afonso até se encontrarem na rua.
Logo que trocaram as bolas, voltaram para as suas casas mas desta vez a velocidade do Afonso foi o dobro da velocidade do Bernardo.

Quando o Afonso chegou a casa, ainda o Bernardo se encontrava a 120 metros da sua.
Qual é o comprimento da rua?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.